

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1

Ende August 1921

Heft 1

Inhalt:

	Seite		Seite
Hauptaufsätze. Th. v. Kármán: Ueber laminare und turbulente Reibung	238	Kurze Auszüge. Postigkältelehre	238
K. Pohlhausen: Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht	252	Buchbesprechungen. Klein: Gesamtheorie der Handlungen I. — van Griens: Flugzeugbau — van Rinsum: Wärmeleitfähigkeit fester Steine	233
H. Latzko: Der Wärmeübergang an einem turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom	268	Kleine Mitteilungen. Walther: Maximum und Minimum eines Newtonschen Potentials auf Kugeln — Laaki: Neuere Forschungen über die Natur der chemischen Elemente — Ludwig: Prüfung für das höhere Schulwesen in Dresden	268 298
L. Hopf und E. Trefftz: Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben	286	Nachrichten	261
R. v. Missa: Das Problem der Iterationen	298	Zuschrift an den Herausgeber. Haack: Zur Oberlehrerausbildung	261 262
J. Schur: Ueber algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen	307		
Zusammenfassende Berichte. Th. Pöschl: Bisherige Lösungen des Torsionsproblems	312		

HAUPTAUFSÄTZE

Über laminare und turbulente Reibung.

Von TH. v. KÁRMÁN in Aachen.

Die theoretische Behandlung der Oberflächenreibung von Flüssigkeiten oder Gasen an einer festen Wand stößt auf große Schwierigkeiten, sobald die Vorgänge nicht allein durch die Zähigkeit der Flüssigkeit bestimmt sind, sondern auch die Trägheitskräfte hineinspielen, wie dies — vielleicht außer bei den Strömungserscheinungen in Kapillaren und den Fragen der Schmiermittelreibung — bei fast allen praktischen Aufgaben der Fall ist. In den letzten Jahrzehnten sind immerhin zwei wesentliche Fortschritte auf diesem Gebiet erzielt worden, und zwar in theoretischer Hinsicht durch die sogenannte »Theorie der Grenzschicht« von L. Prandtl und nach der empirischen Richtung hin durch die Sicherstellung der wohl auch früher vermuteten Gesetzmäßigkeit für den Reibungsverlust in glatten Rohren durch H. Blasius.

Leider sind die Ergebnisse der Prandtl'schen Theorie auf verhältnismäßig engem Gebiet beschränkt geblieben, einmal aus dem mehr äußerlichen Grund, weil ihre mathematische Durcharbeitung für bestimmte Fälle langwierige Rechnungen verlangt, dann aber weil, wie die Versuche zeigen, ihr physikalischer Gültigkeitsbereich ähnlich dem der Theorie der reinen Reibungsströmung in Rohren, durch enge Grenzen beschränkt wird. Wie die reine Reibungsströmung, die sogenannte laminare Strömung in Rohren, bei größeren Geschwindigkeiten einer »turbulenten« den Platz räumt, wird die »laminare Grenzschicht« durch eine »turbulente« ersetzt.

In der vorliegenden Arbeit behandle ich zunächst die Theorie der laminaren Reibungsströmung, indem ich die Grundgedanken der Prandtl'schen Grenzschichttheorie vom mathematischen und physikalischen Gesichtspunkte aus möglichst einfach darzustellen suche und eine Methode angebe, die geeignet ist, auch kompliziertere Fälle mit einfachen mathematischen Mitteln, wenigstens angenähert, zu erledigen. Als dann versuche ich, Rechnungsgrundlagen für die turbulente Reibung zu gewinnen, indem ich Ansätze aufstelle, mittels derer die empirischen Gesetze des turbulenten Rohrwiderstandes auf andere Aufgaben über Reibungswiderstand übertragen werden können.

1. Der mathematische Sinn der Grenzschichttheorie¹⁾. Um die Vorstellung zu fixieren, beschränken wir uns auf ebene Flüssigkeitsströmungen und wählen die Achse $y = 0$ als feste Begrenzung, an der die Flüssigkeit haftet.

Die Differentialgleichungen der ebenen Strömung mit Reibung lassen sich, wie bekannt, durch Einführung der Stromfunktion ψ mittels des Ansatzes

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(u und v Geschwindigkeitskomponenten in der x - und y -Richtung) und Elimination des Druckes in die einzige Gleichung

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi \quad (1)$$

zusammenfassen, wobei Δ die Operation $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die Zähigkeitszahl ($\mu =$

Koeffizient der inneren Reibung, $\rho =$ Dichte der Flüssigkeit) bedeutet. Die Grenzschichttheorie bezieht sich auf Strömungsvorgänge, bei denen in einiger Entfernung von der Wand die Reibung keinen merklichen Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld ausüben soll, so daß für große Werte von y die Stromfunktion in eine als bekannt vorausgesetzte Potentialfunktion $\psi_0(x, y, t)$ übergeht. An der Wand selbst sollen beide Geschwindigkeitskomponenten u und v verschwinden. Um beiden Bedingungen zu genügen, setzen wir zunächst:

$$\psi = \psi_0 - y \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)_{y=0} + \sqrt{\nu} \psi_1 \left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}, x, t \right) \quad (2)$$

Es ist klar, daß für kleine Werte von y die ersten beiden Summanden sich aufheben, so daß nur die Stromfunktion $\sqrt{\nu} \psi_1$ (die Stromfunktion der Grenzschichtströmung) übrig bleibt. Wir wollen diese so bestimmen, daß an der Wand $\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$ ist.

Andrerseits wird, wenn ν eine kleine Größe darstellt, $\frac{y}{\sqrt{\nu}}$ für alle merklich von Null verschiedenen Werte von y sehr groß; es genügt also, ψ_1 so zu bestimmen, daß für $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu}} = \infty$, $\sqrt{\nu} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)_{y=0}$ wird, um der ersten Forderung — Uebergang in die Potentialströmung — zu genügen. Wir sehen daher, daß innerhalb der Grenzschicht (η endlich) die ersten zwei Glieder, außerhalb der Grenzschicht (η sehr groß) die beiden letzten Glieder sich aufheben.²⁾

Wir führen den Ansatz (2) in die Gleichung (1) ein, ordnen nach Potenzen von $\sqrt{\nu}$ und behalten nur die höchsten Glieder mit $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ bei. So erhalten wir, indem wir als Variable $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu}}$ statt y einführen, $\frac{\partial \psi_0}{\partial y}$, sowie $\frac{\partial \psi_0}{\partial x}$ nach den Formeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)_{y=0} + \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right)_{y=0} \eta \sqrt{\nu}, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} &= \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} \eta \sqrt{\nu} \end{aligned}$$

entwickeln und endlich berücksichtigen, daß $\Delta \Delta \psi_0 = 0$, $\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right)_{y=0} = 0$ ist;

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial t \partial \eta^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \eta^4} \right] = 0 \quad (3)$$

Diese Gleichung läßt sich einmal integrieren, so daß wir erhalten:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial \eta} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \eta^3} = f(x, t)$$

¹⁾ Literaturnachweise über Grenzschichttheorie enthält die nachfolgende Abhandlung von Pohlhausen.

²⁾ Genau genommen: die v -Komponente der Grenzschichtströmung geht in die u -Geschwindigkeit der Potentialströmung über; für die u -Komponente liefert die Grenzschichtströmung einen Betrag von der Ordnung $\sqrt{\nu}$, der in der Potentiallösung nicht enthalten ist.

oder mit $\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = u$; $\sqrt{v} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -v$, indem wir wieder die Variable $y = \eta \sqrt{v}$ einführen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, t) \dots \dots \dots (4)$$

in Uebereinstimmung mit den Prandtl'schen Gleichungen.

Die Funktion $f(x, t)$ bestimmt sich durch die Bedingung für $y = 0$. Da u in $u_0 = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{y=0}$ übergehen muß, so ist für $\eta = \infty$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = f(x, t) \dots \dots \dots (4a).$$

Nun gilt für die reibungslose Potentialströmung die längs der Begrenzung als Stromlinie differenzierte Bernoullische Gleichung (p_0 der Druck längs der Wand):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \dots \dots \dots (4b),$$

so daß wir schreiben können:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots \dots \dots (4c).$$

Die Bedeutung von (4) und (4b) ist offenbar die, daß die als bekannt vorausgesetzte Druckverteilung p_0 längs der Wand, die der Potentialströmung entspringt, gewissermaßen als eingepprägtes Kraftfeld für die Grenzschichtströmung aufgelast wird; die Druckdifferenzen senkrecht zur Wand innerhalb der Grenzschicht werden dabei vernachlässigt. Es ist dies die wesentlichste Annahme in der Prandtl'schen Theorie, die die Reduktion der Anzahl der Gleichungen, bezw. die der Ordnung des ganzen Problems herbeiführt.

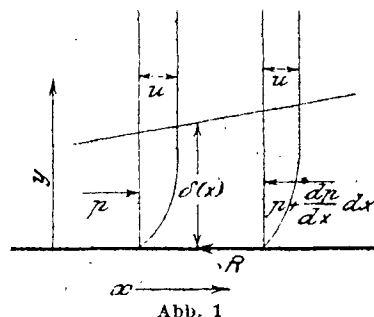
2. Der Impulssatz der Grenzschichttheorie.

Um den physikalischen Sinn der Grenzschichttheorie zu übersehen, wollen wir die in den Gleichungen des vorangehenden Abschnittes enthaltenen Aussagen folgendermaßen formulieren:

a) Es soll eine Grenzschichtdicke δ (als Funktion von x) existieren, derart, daß für $y \geq \delta$ keine merkliche Abweichung im Strömungsbild gegenüber der Potentialbewegung vorhanden ist; namentlich kann die x -Komponente u der Geschwindigkeit für $y = \delta(x)$ gleich der Wandgeschwindigkeit der Potentialbewegung u_0 gesetzt werden.

b) Innerhalb der Grenzschicht ist der Druck nur von x abhängig und gleich dem Drucke, der der Potentialströmung längs der Wand entspricht.

Auf Grund der beiden Annahmen a) und b) sind wir in der Lage, den Impulssatz für die x -Richtung auf ein durch die Wand, ein kurzes Stück der Linie $y = \delta(x)$ und zwei zur Wand senkrechte Querschnitte in x und $x + dx$ begrenztes Flüssigkeitsvolumen anzuwenden. (Abb. 1.) Die Zunahme des Impulses ist gleich zu setzen der Resultierenden der äußeren Kräfte, wobei als äußere Kräfte die Druckdifferenz und die Reibung R an der Wand in Betracht kommen. Da für $y = \delta$ die Strömung in die reibungslose Potentialströmung übergeht, können wir die Reibung an der Uebergangsfläche zwischen Grenzschicht und äußerem Feld vernachlässigen.



Wir erhalten somit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - R \dots \dots \dots (5).$$

Zur Deutung der einzelnen Glieder sei bemerkt: $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} \rho u dy$ ist die zeitliche Zunahme des in dem betrachteten Volumen enthaltenen Impulses; $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$ ist der Ueber-

schoß des an der vorderen Stirnfläche ausströmenden Impulses gegenüber der Impuls-
menge, die an der hintern Stirnfläche einströmt; $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy$ ist die an der Längeneinheit
der Seitenfläche $y = \delta(x)$ einströmende Flüssigkeitsmenge, so daß $u_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy$ den mit
dieser Flüssigkeitsmenge eintretenden Impuls angibt.

Für die auf die Flächeneinheit bezogene Reibungskraft R haben wir bei Annahme
einer laminaren Strömung zu setzen $R = \tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ (τ = Schubspannung in der
Flüssigkeit). Wir werden später sehen, daß Gl (5) auch für turbulente Strömungszustände
brauchbar bleibt, falls wir unter u und p die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit
und des Druckes verstehen und für τ_0 einen entsprechenden empirischen Ansatz einführen.

Die Gl. (5) können wir natürlich auch durch Integration nach der y -Richtung aus
der Differentialgleichung (4) mit Berücksichtigung von (4a) und (4b) ableiten. Sie liefert
offenbar, wenn wir für das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ in der Grenzschicht
($0 < y < \delta$) plausible Annahmen einführen, lediglich eine Differentialgleichung für
 δ , d. h. für die Grenzschichtdicke als Funktion von x und t . Wenn wir uns auf
stationäre Vorgänge beschränken, erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung
erster Ordnung für δ als Funktion von x , so daß wir die Entwicklung
der Grenzschicht durch verhältnismäßig einfache Rechnungen verfolgen können. Die
nachfolgende Abhandlung von K. Pohlhausen enthält die Berechnungen für eine Reihe
praktisch wichtiger Fälle, so daß ich auf dieses Verfahren hier nicht einzugehen brauche.
Die Berechnungen von K. Pohlhausen zeigen, daß in allen Fällen, die nach den
Prandtl'schen partiellen Differentialgleichungen durchgerechnet worden sind, das An-
näherungsverfahren mit sehr guter, für die Praxis sicher ausreichender, Annäherung die
Ergebnisse wiedergibt, so daß in dieser Weise eine weitere Entwicklung der Theorie
auch dort ermöglicht wird, wo die Lösung der partiellen Differentialgleichungen äußerst
mühsam, wenn nicht unmöglich ist.

3. Laminare und turbulente Grenzschicht. Der einfachste und praktisch
wichtigste Fall, den die Grenzschichttheorie behandelt, ist der Reibungswiderstand einer
Platte, die in ruhender Flüssigkeit parallel zu ihrer eigenen Ebene geschleppt wird.
Nehmen wir wieder den Fall der ebenen Bewegung und beziehen wir die Bewegung
auf die ruhend gedachte Platte, so haben wir folgende Aufgabe: Es ist als Potential-
bewegung die Parallelströmung mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit U gegeben, die
reibende Begrenzung soll im Koordinatenursprung $x = y = 0$ beginnen und für $x \geq 0$
durch die Achse $y = 0$ gegeben sein. Wir haben die Grenzschichtdicke und die Wand-
reibung als Funktion von x zu berechnen. Diese Aufgabe ist bereits von H. Blasius¹⁾
gelöst worden; er findet, daß die Grenzschichtdicke wie \sqrt{x} wächst. Rechnet man den
Reibungswiderstand für eine Platte von der Länge l und der Breite 1 aus, so erhält
man als Reibungskraft (bei beiderseitiger Reibung)

$$W = 1,327 \sqrt{\mu \rho l U^3},$$

oder falls man in üblicher Weise $W = c_f \gamma F \frac{U^2}{2g}$ (7)

setzt, indem man den Widerstand auf die Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$, die Oberfläche F
und das spez. Gewicht der Flüssigkeit $\gamma = \rho g$ bezieht:

$$W = 1,327 \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} F \gamma \frac{U^2}{2g} \dots \dots \dots (8).$$

Der Koeffizient des Reibungswiderstandes c_f ist eine Funktion der »Reynoldsschen
Zahl« oder »reduzierten Geschwindigkeit« R , falls wir als solche die dimensionslose
Größe: Geschwindigkeit \times Plattenlänge dividiert durch Zähigkeitszahl einführen, und
zwar haben wir:

$$c_f = 1,327 \frac{1}{\sqrt{R}} \dots \dots \dots (8a).$$

¹⁾ Zeitschrift für Mathematik und Physik B. 56, 1908, S. 13.

Blasius hat in einer späteren Arbeit¹⁾ auf Grund von Messungen gezeigt, daß für große Reynoldssche Zahlen die Formel (8) bzw. (8a) nicht mehr gilt, daß vielmehr ein Umschlag in der Gesetzmäßigkeit des Widerstandes und vermutlich im Strömungszustand erfolgt, ähnlich wie es bei der Strömung in Rohren an der kritischen Grenze der Fall ist. Jenseits des Umschlages nimmt der Widerstand stärker als die $\frac{3}{2}$ Potenz der Geschwindigkeit zu, d. h. der Widerstandskoeffizient in Gl. (7) nimmt langsamer als $\frac{1}{\sqrt{R}}$ ab.

Wir nehmen nun an, daß die laminare Grenzschicht, für die die Prandtl-Blasius'sche Theorie die soeben angegebenen Ergebnisse liefert, durch eine »turbulente Grenzschicht« ersetzt wird, bei der — wie bei der turbulenten Strömung in Rohren — die Geschwindigkeit fortgesetzten Schwankungen nach Größe und Richtung unterworfen ist. Die Folge der Schwankungen ist zunächst die, daß wenn wir die Stromlinien der mittleren Bewegung zeichnen, die Schubspannung nicht allein durch die Gleitung der benachbarten Flüssigkeitsteile bedingt ist; der der Reibung entsprechende Anteil der Schubspannung tritt vielmehr zurück gegen den Impulstransport zufolge der ungeordneten Konvektion der Zusatzgeschwindigkeiten. Es ist bekanntlich bisher nicht gelungen, irgendwie die Natur dieser — offenbar statistischen Gesetzen gehorchenden — Impulskonvektion zu erforschen und die Schwankungserscheinungen der turbulenten Strömung einer theoretischen Berechnung zugänglich zu machen. In dieser Hinsicht trägt zur Lösung des Rätsels auch die vorliegende Abhandlung nichts bei. Was hier unternommen wird, ist nur Folgendes: wir führen für die Verteilung der zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht plausible Annahmen ein, die auf dem empirischen Gesetz der turbulenten Strömung in Rohren fußen, und wenden auf das Gleichgewicht der Grenzschicht die in 2 abgeleitete Impulsgleichung an. Wir gelangen so, wie sich zeigen wird, zu Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Reibung an einer geschlepten Platte, die mit der Erfahrung sehr gut übereinstimmen.

4. Die turbulente Strömung in glatten Rohren. Die Gesetze des Strömungswiderstandes in Rohren sind Gegenstand außerordentlich zahlreicher Versuche gewesen. Das empirische Material blieb jedoch bis zur letzten Zeit wenig übersichtlich, weil man vielfach die verschiedenen Grade der Wandraubigkeit außer acht ließ und die Versuche nicht auf den physikalisch richtigen Parameter, auf den Reynoldsschen Kennwert, bezog²⁾. In vielen Fällen wurde wieder nicht berücksichtigt, daß das konstante Geschwindigkeitsprofil im Rohr nur nach einer ziemlich langen »Anlaufstrecke« sich ausbildet. H. Blasius³⁾ gebührt das Verdienst, durch Sichtung des Materials und Vergleich der besten Versuche für glatte Rohre eine empirische Formel gefunden zu haben, die in einem großen Bereich die Gesetzmäßigkeit des Strömungswiderstandes sehr genau wiedergibt. Demnach ist der Druckabfall für ein kreisförmiges Rohr, bezogen, auf die Geschwindigkeitshöhe der mittleren Geschwindigkeit $\frac{v^2}{2g}$

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad \lambda = 0,316 \sqrt{\frac{\nu}{v d}} \dots \dots \dots (9)$$

(l = Rohrlänge, d = Rohrdurchmesser).

Der Druckabfall ist nach dieser Formel, die in einem sehr großen Geschwindigkeitsbereich die Versuche sehr gut wiedergibt der $\frac{1}{4}$ Potenz der mittleren Geschwindigkeit proportional, während man früher vielfach angenommen hatte, daß das Widerstandsgesetz oberhalb der kritischen Geschwindigkeit sich ziemlich bald dem quadratischen Gesetze nähert. v. Mises hat gelegentlich die Vermutung ausgesprochen⁴⁾, daß gleichzeitig mit wachsender Geschwindigkeit die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt immer gleichmäßiger wird, so daß die gemessenen parabelartigen Geschwindigkeitsprofile nur eine Uebergangserscheinung bilden und das Profil sich stetig mit wachsender Geschwindigkeit ändert. In der technischen Literatur wird zumeist stillschweigend

¹⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten herausg. vom Verein deutsch. Ing., Heft 131 (1913) S. 1
²⁾ Die bisher einzige Widerstandsformel, die die beiden maßgebenden Variablen, relative Rauigkeit und Reynoldssche Zahl, in Rechnung setzt, ist die von R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 50 ff.
³⁾ S. Fußnote 1.
⁴⁾ R. v. Mises, a. a. O. S. 73.

eine parabelartige, von der Geschwindigkeit unabhängige Verteilung angenommen. Wir stimmen v. Mises so weit bei, daß wir eine mit der Reynold'schen Zahl veränderliche Verteilung annehmen, jedoch mit dem Unterschied, daß wir als asymptotische Form nicht die gleichförmige Verteilung, sondern eine ganz bestimmte Verteilungsfunktion voraussetzen, der sich die Geschwindigkeitsverteilung bei großer Reynold'scher Zahl und bei vollkommen glatten Wänden nähert. Wir nehmen daher an, daß so wie im laminaren Bereich auch im turbulenten, wenigstens bei großen Reynold'schen Zahlen, für die das Widerstandsgesetz (9) gilt, eine sich ähnlich bleibende Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt besteht, so daß bei Vergrößerung der Durchflußmenge alle Geschwindigkeiten proportional wachsen. Prandtl hat die Frage aufgeworfen, ob man aus dem empirischen Gesetz (9) Folgerungen auf diese Geschwindigkeitsverteilung ziehen kann. Er fand, auf Grund einer Dimensionsbetrachtung, daß unter gewissen plausiblen Voraussetzungen das Widerstandsgesetz die Verteilung der Geschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Wand eindeutig bestimmt. Die Anregung zu der folgenden Betrachtung geht auf eine mündliche Mitteilung von Hrn. Prandtl im Herbst 1920 zurück; die Veröffentlichung erfolgt mit seinem Einverständnis, wobei meine Ableitung etwas von der seinigen verschieden ist.

Um die Vorstellungen zu fixieren, betrachte ich ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt. Wird die Geschwindigkeit in der Rohrachse ($r = 0$) mit u_{max} bezeichnet, so bedeutet die Annahme eines von der Durchflußmenge unabhängigen, sich ähnlich vergrößernden Geschwindigkeitsprofils, daß das Verhältnis $\frac{u}{u_{max}}$ eine bestimmte Funktion von $\frac{r}{a}$ allein ist ($r =$ Abstand von der Rohrachse, $a =$ Rohrhalmmesser).

Meine 1. Annahme lautet daher: die Geschwindigkeit im Abstand r von der Rohrachse kann

$$u = u_{max} \varphi\left(\frac{r}{a}\right) \dots \dots \dots (10)$$

gesetzt werden, wobei $\varphi\left(\frac{r}{a}\right)$ von u_{max} unabhängig ist. Bei Verdoppelung der Geschwindigkeit in der Mitte werden alle Geschwindigkeiten verdoppelt.

Die 2. Annahme soll folgendes aussagen: die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand, d. h. in der Nähe von $r = a$, soll außer von den physikalischen Konstanten μ und ϱ nur von der Entfernung von der Wand $\eta = a - r$, ferner von der an die Wand übertragenen Schubspannung (Reibungskraft) τ_0 abhängen. Wir setzen also für kleine Werte von η

$$u = f(\mu, \varrho, \tau_0, \eta) \dots \dots \dots (11)$$

Namentlich soll u für kleine Werte von η unabhängig sein von den Abmessungen des Rohres, d. h. von a . Dieser Annahme liegt die plausible Vorstellung zugrunde, daß die Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe einer Wand von den sonstigen Begrenzungen der Strömung unabhängig ist, so daß zwischen der Reibung an einem Wandelement und der unmittelbar benachbarten Geschwindigkeitsverteilung eine eindeutige Beziehung besteht. Wir denken uns Gl. (11) entwickelt nach steigenden Potenzen von η ; das erste Glied der Entwicklung soll lauten:

$$u = f_1(\mu, \varrho, \tau_0) \eta^x \dots \dots \dots (11a),$$

wobei wir x später bestimmen werden.

Die 3. Annahme enthält das empirische Widerstandsgesetz: bei Verdoppelung der Geschwindigkeit soll der Druckabfall bzw. die Schubspannung an der Wand τ_0 wie $1:2^{3/4}$ vergrößert werden.

Die Dimensionsgleichheit der linken und rechten Seite der Gleichung (11a) kann offenbar nur erhalten bleiben, wenn f die Größen μ, ϱ, τ_0 ebenfalls nur in Potenzen enthält und zwar ist es, wenn man bedenkt, daß $\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ und $\frac{\nu}{\eta}$ die Dimension von Geschwindigkeiten haben, leicht einzusehen, daß die einzig mögliche dimensionsrichtige Kombination lautet:

$$u = B \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{\frac{1+x}{2}} \left(\frac{\nu}{\eta}\right)^x \dots \dots \dots (12),$$

wobei B eine dimensionslose Konstante bedeutet.

Da nun andererseits u laut (10) bei Vergrößerung der Durchflußmenge proportional, τ_0 jedoch entsprechend dem Widerstandsgesetz mit der $1/4$ -Potenz der Durchflußmenge wächst, so muß die Beziehung

$$\frac{1 + \kappa}{2} = 1/7, \kappa = 1/7 \dots \dots \dots (13)$$

gelten.

Wir erhalten daher als erstes Glied einer Entwicklung der Geschwindigkeit als Funktion der Wandentfernung

$$u \approx B \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/7} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/7} \dots \dots \dots (12a)$$

oder für die Schubkraft, falls $u(\eta)$ die Geschwindigkeitsverteilung in der Wandnähe bezeichnet.

$$\tau_0 = \frac{1}{B^{1/7}} \rho \nu^{1/4} \lim_{\eta=0} \left(\frac{u^7}{\eta^7}\right) \dots \dots \dots (12b)$$

B bedeutet dabei eine für glatte Wände gültige universelle Konstante, deren Größe offenbar durch das statistische Gesetz des turbulenten Schwankungsgleichgewichts bedingt ist.

Es wirkt zunächst etwas befremdend, daß der Differentialquotient an der Wand unendlich groß ist. Da an einer glatten Wand keine Impulskonvektion stattfinden kann, weil beide Komponenten der Geschwindigkeit verschwinden, muß die Schubkraft gleich der Reibungskraft $\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}$ sein. Dieser Ausdruck wäre nach Gl. (12a) unendlich. Die Sache klärt sich aber dadurch auf, daß man die Gleichungen (12) bzw. (12a) als einen asymptotischen Ausdruck für die Geschwindigkeitsverteilung für unendlich große Reynoldssche Zahlen auffassen muß, wie auch das Potenzgesetz für den Strömungswiderstand ein asymptotisches Gesetz für absolut glatte Wände und für sehr große Reynoldssche Zahlen darstellt. Die wahre Geschwindigkeitsverteilung erhält man, indem man etwa zur Geschwindigkeitskurve eine Tangente mit endlicher Neigung zieht, so daß $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta}$ wird.¹⁾ Es ist leicht einzusehen, daß mit wachsender Reynoldsscher Zahl der Berührungspunkt dieser Tangente in den Punkt $\eta = 0$ rückt. Es scheint aber, daß die Gleichung (12a) bereits bei mäßigen Reynoldsschen Zahlen den Geschwindigkeitsverlauf genügend genau wiedergibt.

Die besten Versuche über die Geschwindigkeitsverteilung in einem kreisförmigen Rohre sind zweifellos die von F. E. Stanton²⁾, insbesondere weil er erstens sehr feine Pitotröhren zur Geschwindigkeitsmessung verwandt und zweitens eine sehr lange geradlinige Anlaufstrecke vor der Meßstrecke angeordnet hatte, so daß die Messungen mit Sicherheit in dem Bereich lagen, wo das Geschwindigkeitsprofil sich nicht mehr merklich ändert. Abb. 2 zeigt die von Stanton gemessenen

Geschwindigkeitswerte (Verhältnis der örtlichen Geschwindigkeit zur Geschwindigkeit in der Rohrachse) als Funktion des Wandabstandes, beide in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Man sieht, daß — abgesehen von dem

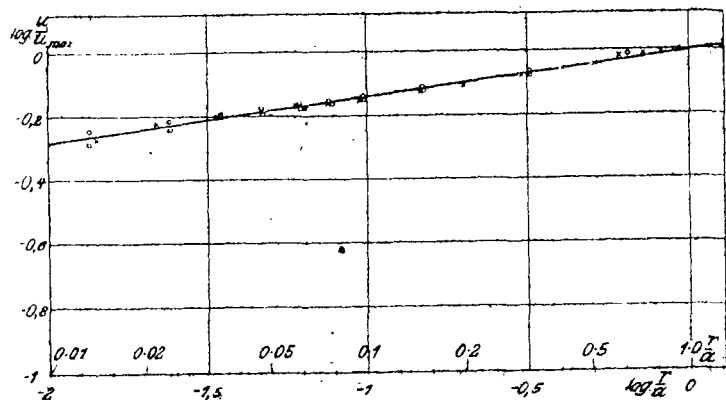


Abb. 2

ersten Meßpunkte, der 0,25 mm von der Wand liegt, so daß die Angabe des Pitotrohres,

¹⁾ Vgl. z. B. die interessanten Messungen von T. E. Stanton, D. Marshall und C. N. Bryant, Proc. Roy. Soc., London, Bd. 97, 1920, S. 413.

²⁾ Proceedings of the Royal Society of London Bd. 85, 1911, S. 369.

dessen Durchmesser 0,33 mm beträgt, kaum mehr zuverlässig ist, die Meßpunkte sehr genau an einer Geraden mit $1/7$ Neigung liegen¹⁾.

Für die weiteren Anwendungen haben wir zunächst die Größe B in den Gleichungen (12a) bzw. (12b), die nach unseren Annahmen für glatte Flächen eine universelle Konstante des turbulenten Strömungszustandes bedeutet, zu ermitteln. Zu diesem Zwecke ist eigentlich die Kenntnis des Gesamtverlaufes der Geschwindigkeitsverteilung von der Wandnähe bis zur Rohrmitte erforderlich, während die Formeln für (12a) und (12b) zunächst nur für die Wandnähe gelten. Ich bin so vorgegangen, daß ich zur Berechnung einige geeignete Interpolationsformeln herangezogen habe, die die Geschwindigkeitsverteilung, wie sie von mehreren Experimentatoren gemessen worden sind, gut wiedergeben und an der Wand in die Gleichung (12a) übergehen.

a) Wir erhalten einen extremen Fall, wenn wir die Formeln, welche die Geschwindigkeit als proportional der $1/7$ -Potenz der Entfernung von der Wand angibt, bis zur Rohrmitte fortsetzen. Wir schreiben daher:

$$u = u_{\max} \left(\frac{a-r}{a} \right)^{1/7} = u_{\max} \left(1 - \frac{r}{a} \right)^{1/7} \dots \dots \dots (13)$$

oder für die Wandnähe

$$u = B \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/7} \left(\frac{y}{r} \right)^{1/7} = u_{\max} \frac{\eta^{1/7}}{a^{1/7}}$$

Berücksichtigen wir, daß zwischen Druckabfall und Randspannung die Beziehung

$$\frac{dp}{dx} \pi a^2 = 2 \pi a \tau_0 \text{ bzw. } \tau_0 = \gamma \frac{\eta}{2l} a$$

besteht, so erhalten wir, indem wir zur Berechnung des Strömungswiderstandes die Blasius'sche Formel anwenden:

$$B \left(\frac{\lambda v^2}{8} \right)^{1/7} \frac{1}{\rho^{1/7}} = \frac{u_{\max}}{a^{1/7}}$$

Das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit v , die in der Blasius'schen Formel vorkommt, zur maximalen Geschwindigkeit beträgt nach dem Ansatz (13)

$$\frac{v}{u_{\max}} = 0,816.$$

Wir gelangen so mit $\lambda = 0,316 \left(\frac{v}{a} \right)^{1/4}$ zu dem Werte für die Konstante B

$$B = 2^{1/7} \left(\frac{8}{0,316} \right)^{1/7} 0,816 = 8,57.$$

b) Eine bessere Annäherung an die Messungen erhalten wir, falls wir das Geschwindigkeitsprofil in der Rohrmitte etwas »abrunden«. Man erhält dies am einfachsten durch den Ansatz

$$u = u_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right)^{1/7} \dots \dots \dots (13a),$$

wobei wir noch über den Exponenten n verfügen können. $n = 1$ führt offenbar zum Ansatz (13) zurück. In der Abb. 3 sind eine Reihe von Messungen verschiedener Experimentatoren zusammengetragen und die drei Kurven mit $n = 1, 1,25$ und 2 gezeichnet. Man sieht, daß die Versuchspunkte fast ausnahmslos zwischen den beiden Kurven $n = 1$ und $n = 2$ liegen. Führt man den obigen Rechnungsgang mit $n = 1,25$ und $n = 2$ durch, so erhält man für die Konstante B

$$B = 8,62 \text{ mit } n = 1,25$$

$$B = 8,82 \text{ » } n = 2,00.$$

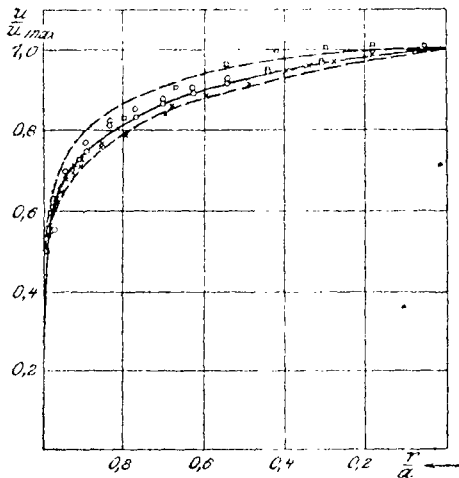


Abb. 3

¹⁾ Es sei bemerkt, daß Christen eine Formel für die Geschwindigkeitsverteilung vorgeschlagen hat, nach der die Geschwindigkeit statt der $1/7$ -Potenz der $1/8$ -Potenz der Wandentfernung proportional ist. Vergl. z. B. Zeitschrift für Gewässerkunde Bd. 6 (1904) S. 175. Eine ausführliche Darstellung der verschiedenen Verteilungsformeln findet man bei Forchheimer, Hydraulik, Leipzig 1914. S. 93-119; ferner Gümbel, Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft Bd. 14 (1913) S. 393.

Die Verhältniszahlen $\frac{\text{mittlere Geschwindigkeit}}{\text{maximale Geschwindigkeit}}$ betragen 0,838 für $n = 1,25$ und 0,875 für $n = 2$. Die zuverlässigsten Messungen liefern 0,84¹⁾. Ich schließe daraus, daß der Ansatz (14) mit $n = 1,25$ bis 2 die Verhältnisse ziemlich genau wiedergibt, und rechne in den folgenden Zeilen allgemein mit $B = 8,7$.

Wir haben daher die Gleichungen (12 a) zu schreiben:

$$u = 8,7 \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/7} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/4} \quad (14a).$$

Drücken wir die Schubspannung τ_0 als Funktion der Geschwindigkeit aus, so lautet die Gleichung (12 b)

$$\tau_0 = \frac{1}{B^{7/4}} \rho \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ u^2 \left(\frac{\nu}{u\eta}\right)^{1/4} \right\}.$$

Mit den soeben gewonnenen Werten von B auf Grund der drei Interpolationsformeln würde die Gleichung lauten:

$$\tau = 0,0225 \rho \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ u^2 \left(\frac{\nu}{u\eta}\right)^{1/4} \right\} \quad (14b),$$

als allgemeiner Ausdruck für die Randreibung, falls die Geschwindigkeitsverteilung $u(\eta)$ in der Wandnähe bekannt ist.

Die Konstante in Gl. (14b) beträgt 0,0233, wenn man den Ansatz (14) für die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr annimmt, dagegen 0,0231 bzw. 0,0221 unter Annahme von (14a) mit $n = 1,25$ bzw. $n = 2$.

5. Anwendung auf Wärmeübertragung. Vergleicht man unsere Ansätze mit jenen Darstellungen, welche die turbulente Reibung durch eine scheinbare Erhöhung des Reibungskoeffizienten zum Ausdruck bringen²⁾, so setzen wir zunächst allgemein für die Schubspannung, die in einer Schicht in der Entfernung η von der Wand übertragen wird,

$$\tau = g(\eta, \mu, \rho, u) \frac{d}{dy} (u \rho) \quad (15).$$

Falls u als Funktion von η und das Druckgefälle im Rohr bekannt sind, können wir die Funktion g explizite ausrechnen. In der Nähe der Wand muß τ in τ_0 übergehen. Berücksichtigt man (14a), und namentlich die Beziehung: $\eta \frac{du}{dy} = u$, so erhält man für g :

$$g(\eta, \mu, \rho) = 0,805 \rho \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} \eta^{6/7}.$$

Setzt man nun, wie aus der Gleichgewichtsbestimmung beim kreisförmigen Rohre folgt, $\tau = \tau_0 \frac{\tau}{u}$, so folgt allgemein:

$$g(\eta, \mu, \rho) = 0,805 \rho \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} Y^{6/7} \quad (15a),$$

wobei Y eine Funktion von η allein bezeichnet, die für kleine η in η übergeht. Die Beziehung (15a) gilt für beliebige Querschnitte, falls man annimmt, daß das Verhältnis der Schubspannungen $\frac{\tau}{\tau_0}$ unabhängig von der Geschwindigkeit nur eine Funktion des Ortes ist.

Die Größe g kann als eine Art »turbulenter Reibungskoeffizient« oder besser als »Turbulenzfaktor« bezeichnet werden.

Der Anteil der eigentlichen Reibung ist bei größeren Reynoldsschen Zahlen bis auf eine außerordentlich dünne Schicht an der Wand verschwindend klein, so daß die Schubspannung fast ausschließlich als Mittelwert der Impulskonvektion aufzufassen ist. Diese Auffassung ist deshalb von Interesse, weil sie uns in die Lage versetzt, die von

¹⁾ Es müssen die Messungen von Gardner J. Williams erwähnt werden (Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 1902, auch bei Gumbel loc. cit.), bei welchen die Verhältniszahl bei wachsenden Reynoldsschen Zahlen etwas abnimmt und dann dem Grenzwert 0,811 sich nähert. Dies würde für die einfache Interpolationsformel unter a) sprechen. Es kommen aber auch bedeutend höhere (bis 0,87) Werte vor. Dabei ist der Einfluß der Anlaufstrecke und der Raubigkeit noch nicht völlig geklärt.

²⁾ Vergl. z. B. Boussinesq, Mémoires des savants étrangers B. 23 (1877) S. 1 u. ff., Hahn, Herglotz und Schwarzschild, Zeitschrift für Math. Phys. 51, 1904, S. 411.

Reynolds¹⁾ und Prandtl²⁾ entdeckte Analogie zwischen Reibungswiderstand und Wärmeübertragung bei turbulenter Strömung weiter auszubauen. Nehmen wir an, daß die Impulsübertragung und die Wärmeübertragung durch denselben Mechanismus der ungeordneten molaren Schwankungsbewegung geschieht, so erhalten wir offenbar zwei analoge Ansätze für die senkrecht zur Strömung durch »turbulente Impulsleitung« pro Flächeneinheit übertragene Schubkraft und für die durch »turbulente Wärmeleitung« übertragene Wärmemenge:

$$\tau = 0,805 \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} Y^{6/7} \frac{d(\rho u)}{dy}, \quad q = 0,805 \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} Y^{6/7} \frac{d(c\rho\Theta)}{dy} \quad (15a),$$

wobei c die spez. Wärme, Θ die Temperatur, folglich $c\Theta$ den Wärmehalt der Masseneinheit bedeutet. Es muß dabei bemerkt werden, daß der Ansatz (15a) mit guter Annäherung bis zur Wand fortgesetzt werden darf, wenn dieselbe Proportionalität, die wir für den Mechanismus der »turbulenten Impuls- und Wärmeübertragung« annehmen, auch für die molekulare Impuls- und Wärmeübertragung, d. h. für die laminare innere Reibung und für die eigentliche Wärmeleitung besteht. Wie bereits Prandtl hervorgehoben hat, äußert sich dies in der Tatsache, daß für die betreffende Flüssigkeit zwischen Wärmeleitfähigkeit λ , Reibungskoeffizienten μ und spezifischer Wärme c die Beziehung $\frac{c\mu}{\lambda} = 1$ be-

steht. Diese Beziehung ist für Gase angenähert erfüllt. Ist $\frac{c\mu}{\lambda}$ von 1 sehr verschieden, wie z. B. bei Wasser, so kann der Ansatz nur bis zur Grenze der unmittelbar an der Wand befindlichen laminaren Schicht erstreckt werden, während der Einfluß dieser Schicht — wie an anderer Stelle näher ausgeführt werden soll — durch eine Randbedingung ersetzt werden kann.

Der Ansatz (15a) erlaubt nun, die Wärmeübertragung in allen Fällen zu rechnen, in denen das für die zeitlichen Mittelwerte geltende »Geschwindigkeitsfeld« der turbulenten Strömung und somit q bekannt ist. Mit Hilfe dieses Ansatzes hat H. Latzko³⁾ eine Reihe von technisch wichtigen Fällen der Wärmeübertragung an turbulente Ströme durchgerechnet. Es gelingt insbesondere, zu zeigen, daß von einer »Wärmeübergangszahl« schlechthin, wie es in der Technik zumeist geschieht, nicht gesprochen werden kann, daß vielmehr die Wärmeübertragung durch die Gesamtanordnung bedingt ist. Es gelingt auch, den Einfluß der einzelnen Faktoren klarzulegen und dadurch das vielfach sich widersprechende experimentelle Material zu ordnen. In dieser Hinsicht erscheint die Berechnungsmöglichkeit der Wärmeübertragungsvorgänge über die erwähnten Prandtl'schen Analogieschlüsse hinaus wesentlich erweitert, da bei den letzteren eine vollkommene Übereinstimmung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes angenommen werden mußte, während mit Hilfe unseres Ansatzes auch die Abweichungen zwischen beiden der Berechnung zugänglich gemacht werden.

6. Die turbulente Grenzschicht an der ebenen Platte. Wir wollen nun die aus der Betrachtung der turbulenten Strömung in Rohren gewonnenen Ergebnisse zur Berechnung des turbulenten Reibungswiderstandes einer Platte auf die längs derselben bestehende Grenzschichtströmung übertragen. Wir legen allen folgenden Berechnungen die oben abgeleiteten Gleichungen (14a) und (14b) zugrunde, nach denen einerseits die Geschwindigkeitsverteilung als Funktion der Entfernung von der Wand

$$u = 8,7 \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/7} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/7} \dots \dots \dots (14a)$$

falls τ_0 , die an der Wand übertragene Schubspannung gegeben ist, andererseits die Schubspannung τ_0

$$\tau_0 = 0,0225 \rho u^2 \left(\frac{\nu}{u\eta}\right)^{1/4} \dots \dots \dots (14b)$$

beträgt, wenn $u(\eta)$ die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand darstellt. Wollen wir diese Beziehungen auf die »turbulente Grenzschicht« übertragen, so haben

¹⁾ Proceedings, Manchester Lit. and Phil. Soc 1874, p. 9. On the passage of heat between metal surfaces and liquids in contact with them. Phil. Transact. of the Roy. Soc. Vol 190.

²⁾ Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit. Physik. Zeitschr. 11, 1910, S. 1072.

³⁾ Vergl. dieses Heft, S. 268 bis 290.

wir einen entsprechenden Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung aufzustellen. Wird die Grenzschichtdicke wiederum mit δ bezeichnet und die Geschwindigkeit der ungestörten Bewegung mit U , die Entfernung von der Wand mit y , so lautet der einfachste Ansatz:

$$u = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (16).$$

Setzen wir (16) mit (14 a) gleich, so ist offenbar

$$8,7 \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{4/7} \frac{1}{\nu^{1/7}} = \frac{U}{\delta^{1/2}},$$

d. h. wir erhalten für die Schubspannung τ_0 den Ausdruck:

$$\tau_0 = 0,0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (17).$$

Gl. (17) liefert uns den Ansatz, den wir als Reibungskraft in die Impulsgleichung der Grenzschicht einzuführen haben, um eine Theorie der turbulenten Grenzschicht zu gewinnen, die die Prandtl-Blasiussche Theorie der laminaren Grenzschicht ersetzen soll. Setzen wir in der Tat (17) in Gl. (5) ein, so haben wir zunächst

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u dy = \int_0^\delta 0,0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} dy \quad \sqrt{-}$$

Ermitteln wir die Integrale $\int_0^\delta u dy$ und $\int_0^\delta u^2 dy$ mit Hilfe des Ansatzes (16), so erhalten wir als Differentialgleichung der Grenzschichtdicke

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\delta = \left(\frac{90}{7} \right)^{4/5} (0,0225)^{4/5} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5} \dots \dots \dots (18)$$

oder für die Länge l

$$\delta_l = 0,37 l \left(\frac{\nu}{Ul} \right)^{1/5} \dots \dots \dots (18a).$$

Während die laminare Grenzschicht mit \sqrt{x} proportional wächst, nimmt die turbulente Grenzschicht nach Gl. (18) mit $x^{4/5}$ zu.

Wir sind nun in der Lage, den Reibungswiderstand einer Platte von der Länge l zu berechnen und zwar entweder durch Integration der Reibungskräfte längs der Platte oder durch Anwendung des Impulssatzes auf den Endquerschnitt bei $x = l$. Der Widerstand (doppelseitig) ergibt sich offenbar zu:

$$W = \frac{7}{36} \rho U^2 \delta_l = 0,036 \rho U^2 l \left(\frac{\nu}{Ul} \right)^{1/5} \dots \dots \dots (19).$$

Beziehen wir die Widerstandskraft durch die Formel

$$W = c_f F \gamma \frac{U^2}{2g}$$

wieder auf die Geschwindigkeitshöhe, so erhalten wir für den Widerstandskoeffizienten c_f das Resultat:

$$c_f = 0,072 \frac{1}{R^{0,2}} \dots \dots \dots (19a),$$

wobei die Reynoldssche Zahl h' wieder $R = \frac{Ul}{\nu}$ gesetzt wurde.¹⁾

¹⁾ Herr Prandtl hat nach einer brieflichen Mitteilung die Formel (19a) bereits vor mir besessen. Er gibt (vgl. Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, I. Lieferung, München und Berlin 1921, S. 186) eine ähnliche Formel mit einem ergänzenden Gliede an, welches dem Umstände Rechnung trägt, daß am Vorderende einer gut zugeschärften Platte Laminarströmung herrschen kann. Indem er die Zahlenfaktoren aus älteren Versuchen von Gebers ermittelt, gibt er die Formel $c_f = 0,073 \frac{1}{R^{0,2}} - \frac{1600}{R}$ an, wobei der Zahlenfaktor im zweiten Glied im allgemeinen von der Zuschärfung abhängt und bei abgerundeter Vorderkante praktisch verschwindend klein sein soll.

In der Abb. 4 sind die Versuchsergebnisse mit verhältnismäßig glatten Platten eingetragen,

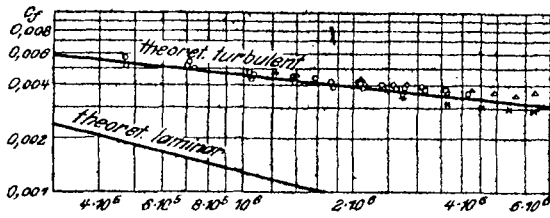


Abb. 4

von Gibbons und Wieselsberger¹⁾ ferner die Linie für c_f nach Gl. (19a), wobei sowohl für die Reynoldssche Zahl als für den Widerstandskoeffizienten ein logarithmischer Maßstab gewählt ist. Man sieht, daß die Uebereinstimmung außerordentlich gut ist.²⁾

Eine ebenso gute Bestätigung der soeben durchgeführten Berechnungen liefern die Geschwindigkeitsmessungen in der Nähe eines geschleppten Brettes. So stellen die Punkte in Abb. 5 die gemessene Geschwindigkeitsverteilung senkrecht zu

einem im Wasser geschleppten Brett als Funktion des Abstandes von der Wand dar und zwar in einem 8,56 m. hinter der Vorderkante durchgelegten Querschnitt³⁾. Die ausgezogene Linie liefert die Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (16), wobei die Grenzschichtdicke nach Gl. (18) gerechnet wurde.

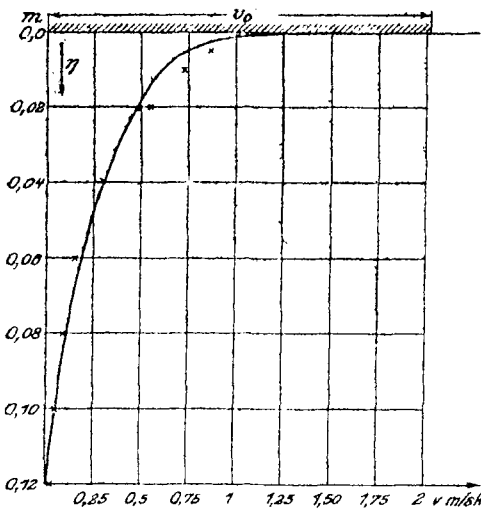


Abb. 5

Aus dem Vergleich der Meßergebnisse mit der nach Ansatz (16) angenommenen Kurve sieht man vor allem, daß es keineswegs notwendig ist, wie dies in der technisch Literatur zumelst geschieht, einen Geschwindigkeitssprung an der Wand anzunehmen. Durch unsere Ansätze wird vielmehr der rasche Abfall der Geschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Wand durch den Verlauf der Potenzkurve mit dem Exponenten $1/7$ richtig und zwanglos dargestellt.

7. Laminare Reibung an einer rotierenden Scheibe.

Als weiteres Beispiel zur Anwendung der für die Berechnung laminarer und turbulenter Reibungswiderstände gewonnenen Methoden will ich den Fall einer gleichmäßig rotierenden ebenen Scheibe behandeln. Der laminare Strömungszustand, der durch eine rotierende ebene Scheibe hervorgerufen wird, besitzt aus dem Grunde besonderes Interesse,

weil er einen der seltenen Fälle darstellt, in denen die Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeiten ohne Vernachlässigungen integriert werden können. Man ist also hier in der Lage, unmittelbar beurteilen zu können, mit welcher Genauigkeit die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen eine Annäherung liefern.

Ich stelle mir folgende Aufgabe:

Der Halbraum $x > 0$ soll von Flüssigkeit erfüllt sein. Die Begrenzungsebene $x = 0$ rotiert um die x -Achse mit der gleichförmigen Drehgeschwindigkeit ω . Wir fragen nach dem Bewegungszustand in dem Halbraum $x > 0$ mit Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung.

Wir führen Zylinderkoordinaten r, ϑ, x ein und bezeichnen mit c_r, c_ϑ, c_x die Geschwindigkeitskomponenten nach der radialen, tangentiellen und axialen Richtung; p bedeute den Flüssigkeitsdruck. Die Differentialgleichungen der Strömung in Zylinderkoordinaten — wenn alle Geschwindigkeiten von ϑ unabhängig sind, wie aus Symmetriegründen folgt, — lauten:

¹⁾ Vergl. »Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen« I. Lieferung S. 123.

²⁾ Gebers (Schiffbau 22, 1921, S. 687 ff., insbes. S. 791) gelangt zu etwas höheren Exponenten. Ich vermute, daß beim Schleppen sehr langer Platten Erschütterungen nicht zu vermeiden sind, was den Widerstand rascher wachsen läßt.

³⁾ Gumbel, Das Problem des Oberflächenwiderstandes, Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft Bd. 1918 S. 478.

$$\left. \begin{aligned} c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} - \frac{c^2}{r} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c_r}{r} \right) + \frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} \right\} \\ c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{2 c_r c_x}{r} &= \nu \left\{ \frac{\partial^2 c_x}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} \right\} \\ c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 c_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{\partial c_x}{\partial x} = 0 \quad (20a)$$

Man erkennt an dem Bau der Gleichungen, daß man das System (20) und (20a) durch den Ansatz:

$$c_r = r f(x), \quad c_x = r g(x), \quad c_x = h(x), \quad p = p(x) \quad (21)$$

befriedigen kann, so daß man für die drei Funktionen f, g, h die gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen

$$f^2 - g^2 + h \frac{d^2 f}{dx^2} = \nu \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad 2fg + h \frac{dg}{dx} = \nu \frac{d^2 g}{dx^2}, \quad \frac{dh}{dx} + 2f = 0 \quad (22)$$

erhält, während die Gleichung

$$h \frac{dh}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (23)$$

die aus der dritten Gleichung des Systems (20) entstanden ist, die Druckverteilung $p(x)$ bestimmt.

Das System der Randbedingungen lautet offenbar, da die Flüssigkeit im Unendlichen keine Rotation besitzen, dagegen für $x=0$ an der rotierenden Wand haften soll,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(\infty) &= 0, \\ g(0) &= \omega, & g(\infty) &= 0, \\ h(0) &= 0, \end{aligned}$$

Die Funktion $h(x)$ hat für $x = \infty$ einen endlichen Grenzwert. Dies bedeutet so viel, wie daß eine ständige Zuströmung gegen die rotierende Wand stattfindet, wie es auch aus Gründen der Kontinuität zu erwarten ist. Die rotierende Wand wirkt infolge des Haftens der Flüssigkeit als eine Art Schleuderventilator; in unmittelbarer Nähe der Wand wird die Flüssigkeit ständig nach außen befördert, so daß die Flüssigkeitsmenge durch axiale Zuströmung ersetzt werden muß.

Führen wir, um dimensionslose Größen zu erhalten, als unabhängige Variable

$$\xi = x \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (24)$$

und statt f, g, h die Funktionen f, g, h ,

$$f = \frac{f}{\omega}, \quad g = \frac{g}{\omega}, \quad h = \frac{h}{\nu \omega} \quad (24a)$$

ein, so erhalten wir statt (22) das Gleichungssystem:

$$f^2 - g^2 + h \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad 2fg + h \frac{dg}{d\xi} = \frac{d^2 g}{d\xi^2}, \quad \frac{dh}{d\xi} + 2f = 0 \quad (22a)$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} f &= 0, \quad g = 1, \quad h = 0 \quad \text{für } \xi = 0, \\ f &= 0, \quad g = 0 \quad \text{für } \xi = \infty, \end{aligned}$$

so daß die Gleichungen von sämtlichen speziellen Daten der Aufgabe unabhängig sind. Wir sehen daraus die Ähnlichkeitsgesetze der Aufgabe. Da $g(\xi)$ die Verhältniszahl der Drehgeschwindigkeit in der Entfernung $x = \xi \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ von der Wand zu der Drehgeschwindigkeit ω bezeichnet, so ist es klar, daß mit wachsender Geschwindigkeit nur in einer Schicht an der Wand merkliche Rotationsgeschwindigkeiten zu beobachten sind, die mit wachsender Geschwindigkeit und abnehmender Zähigkeit wie $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ abnehmen. Andererseits folgt aus der letzten der Gleichungen (24a), daß die axiale Zuströmungsgeschwindigkeit im Unendlichen wie $\sqrt{\nu \omega}$ zunimmt.

Das Gleichungssystem (22) kann durch ein beliebiges numerisches Verfahren oder durch Reihenentwicklung gelöst werden. Wir ziehen jedoch vor, das in § 3 angedeutete

und in der Arbeit von K. Pohlhausen¹⁾ ausgeführte Verfahren anzuwenden und dadurch eine erste Näherung zu gewinnen. Wir nehmen an, daß die Funktionen f und g in der Entfernung δ von der Wand bereits unmerklich wenig sich von Null unterscheiden. Aus den Ansätzen (21) folgt, daß die »Grenzschichtdicke« in unserm Falle längs der Wand konstant ist, so daß δ von ξ nicht abhängt. Wir integrieren die beiden ersten Gleichungen des Systems (22 a) zwischen $\xi = 0$ und $x = \delta$, d. h. $\xi = \delta \sqrt{\frac{a}{\nu}} = \xi_0$. Alsdann haben wir:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\xi_0} (f^2 - g^2) d\xi + \int_0^{\xi_0} \eta \frac{df}{d\xi} d\xi &= \left[\frac{df}{d\xi} \right]_0^{\xi_0} \\ \int_0^{\xi_0} 2fg d\xi + \int_0^{\xi_0} \eta \frac{dg}{d\xi} d\xi &= \left[\frac{dg}{d\xi} \right]_0^{\xi_0} \end{aligned} \right\} \quad (25).$$

Wir integrieren das zweite Integral partiell und berücksichtigen, daß nach der letzten Gleichung des Systems (22 a) $\frac{d\eta}{d\xi}$ durch $-2f$ ersetzt werden kann.

So erhalten wir schließlich:

$$\eta \int_0^{\xi_0} f^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} \eta g^2 d\xi = - \left[\frac{df}{d\xi} \right]_0^{\xi_0}, \quad 4 \int_0^{\xi_0} fg d\xi = - \left[\frac{dg}{d\xi} \right]_0^{\xi_0} \quad (26).$$

Als angenäherte Ausdrücke für die Funktionen f und g setzen wir an:

$$\left. \begin{aligned} f &= a \frac{\xi}{\xi_0} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{\xi}{\xi_0}\right) - 1/2 \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^3 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^3, \\ g &= 1/2 \left(2 + \frac{\xi}{\xi_0}\right) \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right) \end{aligned} \right\} \quad (27).$$

wobei a eine zu bestimmende Konstante bedeutet.

Dabei haben wir berücksichtigt, daß

$$\left. \begin{aligned} f &= 0, \quad g = 1 \quad \text{für } \xi = 0 \\ f &= \frac{df}{d\xi}, \quad g = \frac{dg}{d\xi} \quad \text{für } \xi = \delta \end{aligned} \right\}$$

gilt und außerdem, wie aus den Gleichungen (22 a) leicht einzusehen ist,

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = -1, \quad \frac{d^2 g}{d\xi^2} = 0 \quad \text{für } \xi = 0$$

sein muß.

Ermitteln wir die in (26) enthaltenen Integrale numerisch, so bekommen wir:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\xi_0} f^2 d\xi &= \xi_0 [0,0301 a^2 - 0,00326 a + 0,00159] \\ \int_0^{\xi_0} g^2 d\xi &= \xi_0 \cdot 0,2357 \\ \int_0^{\xi_0} fg d\xi &= \xi_0 [0,0607 a - 0,00567] \end{aligned} \right\} \quad (28).$$

und wenn wir diese Ausdrücke in (26) einsetzen, erhalten wir zwei gewöhnliche Gleichungen für a und ξ_0 , die lauten:

$$\left. \begin{aligned} 0,0903 a^2 - 0,00978 a - 0,23093 &= - \frac{a}{\xi_0^2} \\ 0,2428 a - 0,02328 &= \frac{3}{2\xi_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (29).$$

Die numerische Auflösung liefert:

$$a = 1,026, \quad \xi_0 = 2,58 \quad (30)$$

¹⁾ Dieses Heft S. 252 bis 268.

Auf Grund dieser Ergebnisse sind wir in der Lage, die Grenzschichtdicke δ und die axiale Zuströmungsgeschwindigkeit c_∞ im Unendlichen zu berechnen. Es gilt offenbar:

$$\delta = \xi_0 \sqrt{\frac{r'}{\omega}} = 2,58 \sqrt{\frac{r'}{\omega}}, \quad c_\infty = \omega \int_0^{\xi_0} 2 \eta d\xi = 0,708 \sqrt{r' \omega} \quad (31)$$

Nehmen wir z. B. Luft als Flüssigkeit mit $\nu = 0,14 \text{ cm}^2/\text{sec}$ und eine Drehzahl $n = 600 \text{ min}$, d. h. $\omega = \frac{2\pi n}{60} = 62,8 \text{ sec}$, so wäre die Grenzschichtdicke nach (31)

$$\delta = 0,122 \text{ cm}$$

und die axiale Zuströmungsgeschwindigkeit:

$$c_\infty = 7,6 \text{ cm/sec.}$$

Die wichtigste Aufgabe ist die Berechnung des Reibungswiderstandes. Wenn wir die Wand mit $r = a$ begrenzt annehmen, so erhalten wir offenbar den Fall einer rotierenden Scheibe mit dem Halbmesser a . Auf die Bewegung der Flüssigkeit kann nun der Umstand, daß die äußeren Teile der Ebene $x = 0$ fehlen, nicht gänzlich ohne Einfluß sein, doch ist es anzunehmen, daß, wenn die Dicke der Grenzschicht gegen den Halbmesser der Scheibe sehr klein ist, wie es in fast allen praktischen Fällen zutrifft, diese Beeinflussung unerheblich bleibt. Unter dieser Annahme können wir einfach das Moment der an der Scheibe wirkenden Schubkräfte von $r = 0$ bis $r = a$ integrieren, oder, was zu demselben Resultat führen muß, den Drehimpuls, der in der Zeiteinheit mit der Flüssigkeit an der Zylinderfläche $r = a$ austritt, berechnen und dem Moment der Reibungskräfte gleich setzen. Wir wählen den zweiten Weg. Wir haben als Drehimpuls der an der Zylinderfläche in der Zeiteinheit austretenden Flüssigkeit:

$$D = 2\pi a^2 \rho \int_0^\delta c_r c_\infty dx = M \quad (32)$$

oder nach den Ansätzen (21), (24) und (24a):

$$M = 2\pi a^4 \rho \omega^{3/2} \int_0^{\xi_0} \eta^2 d\xi \quad (32a)$$

Das Integral $\int_0^{\xi_0} \eta^2 d\xi$ haben wir bereits oben berechnet. Setzen wir seinen Wert aus (28) ein, so erhalten wir:

$$M = 0,92 a^4 \rho \nu^{1/2} \omega^{3/2} \quad (33)$$

oder

$$M = 1,84 a^3 \frac{U^2}{2\theta} \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (33a)$$

falls die Umfangsgeschwindigkeit mit $U = a\omega$, und als Reynoldssche Kennziffer $R = \frac{Ua}{\nu}$ eingeführt wird.

Um den Widerstand einer zweiseitig durch Flüssigkeit umgebenen Scheibe zu erhalten, müssen wir den Ausdruck (33) naturgemäß doppelt in Rechnung setzen.

8. Reibungswiderstand einer rotierenden Scheibe bei turbulenter Flüssigkeitsbewegung. Die in (33) gefundene Gesetzmäßigkeit: ein mit der Potenz $3/2$ der Drehzahl proportionales Reibungsmoment wird bei höheren Drehzahlen durch die Erfahrung nicht bestätigt. Man mißt vielmehr eine bedeutend raschere Zunahme des Widerstandsmomentes mit der Drehgeschwindigkeit. Wir machen wieder, wie bei den geschleppten ebenen Platten die Annahme, daß es sich um eine »turbulente Grenzschicht« handelt, und versuchen durch Anwendung des Impulssatzes einen angenäherten Wert für die Grenzschichtdicke und den Reibungswiderstand zu gewinnen.

In dem Falle der rotierenden Scheibe haben wir zwei Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, einmal in der radialen Richtung und dann in der tangentiellen Richtung.

Wir wollen die Bezeichnungen des vorangehenden Abschnittes beibehalten; außerdem bezeichnen wir die Reibungskräfte, die an der Flächeneinheit der Wand wirken, mit τ_r und τ_t , Abb. 6. Als dann haben wir in der radialen Richtung folgende Impulsgrößen:

a) Ueberschuß der austretenden Impulsmenge an der Zylinderfläche $(r + dr) \delta$ (für ein Bogenelement von dem Öffnungswinkel Eins) gegenüber der an der Fläche $r \delta$ eintretenden Impulsmenge

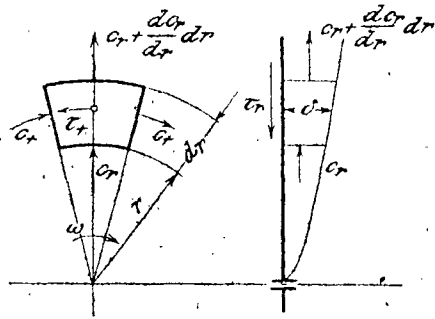


Abb. 6

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \rho \int_0^\delta c_r^2 dx \right\} dr$$

b) Die radiale Komponente der an der Stirnfläche ein- bzw. austretenden Impulsmenge (gleich der Zentrifugalkraft der rotierenden Flüssigkeitsmenge)

$$- \left(\rho \int_0^\delta c_t^2 dx \right) dr$$

Diese Impulsgrößen müssen mit der Schubkraft $\tau_r r dr$ im Gleichgewicht stehen, so daß wir erhalten:

$$\rho \frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^\delta c_r^2 dx \right\} - \rho \int_0^\delta c_t^2 dx = - \tau_r r \quad (34)$$

In der tangentiellen Richtung können wir die Differenz des Drehmomentes des an der ganzen Zylinderfläche $2 \pi (r + dr) \delta$ aus- und an der Fläche $2 \pi r \delta$ eintretenden Impulses berechnen und sie dem Drehmoment der an der Ringfläche wirkenden Reibungskräfte gleichsetzen. Wir erhalten offenbar:

$$2 \pi \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^\delta c_t c_r dx \right\} = - \tau_t 2 \pi r^2 \quad (35)$$

Als Ansätze für die Geschwindigkeitsverteilung führe ich ein, gemäß den Ausführungen in § 4

$$c_r = c_0 \left(\frac{x}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right), \quad c_t = r \omega \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^{1/7} \right] \quad (36)$$

wobei bereits berücksichtigt ist, daß

$$\text{für } x=0 \quad c_r = 0, \quad c_t = r \omega; \quad \text{für } x=\delta \quad c_r = c_t = 0$$

sein muß.

Alsdann können wir die Integrale in den Gleichungen (34) und (35) auswerten und wir erhalten:

$$\int_0^\delta c_r^2 dx = 0,207 c_0^2 \delta \quad \left| \quad \int_0^\delta c_r c_t dx = 0,0681 r \omega c_0 \delta, \quad \int_0^\delta c_t^2 dx = 0,0278 r^2 \omega^2 \delta \quad (37) \right.$$

Fernerhin setzen wir gemäß unseren Voraussetzungen über das Maß der turbulenten Reibung Gl. (146), indem wir die Geschwindigkeitskomponenten an der Wand zusammensetzen und für die Resultierende unseren Reibungsansatz anwenden:

$$\tau_r = 0,0225 \rho \frac{c_0^{7/4} \omega^{3/4}}{\delta^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{r \omega}{c_0} \right)^2 \right]^{3/8}, \quad \tau_t = 0,0225 \rho (r \omega)^{7/4} \frac{r^{3/4}}{\delta^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{c_0}{r \omega} \right)^2 \right]^{3/8}$$

Mit diesen Ansätzen erhalten wir aus Gl. 34 und (35) die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dr} \left\{ 0,207 c_0^2 r \delta \right\} - 0,0278 r^2 \omega^2 \delta = - 0,0225 c_0^2 r \left(\frac{r}{c_0 \delta} \right)^{1/4} \left[1 + \left(\frac{r \omega}{c_0} \right)^2 \right]^{3/8}$$

$$\frac{d}{dr} \left[0,0681 r^3 \omega c_0 \delta \right] = 0,0225 r^4 \omega^3 \left(\frac{r}{r \omega \delta} \right)^{1/4} \left[1 + \left(\frac{c_0}{r \omega} \right)^2 \right]^{3/8}$$

Man sieht zunächst, daß die Gleichungen befriedigt werden, wenn wir für die Abhängigkeit der Grenzschichtdicke von der Achsenentfernung r setzen:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \alpha r \omega \\ \delta &= \beta r^{3/6} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

und wir erhalten zwei gewöhnliche Gleichungen für α und β ganz analog dem Gleichungssystem (29) im vorangehenden Abschnitt.

Die Gleichungen lauten:

$$0,7156 \alpha^2 \beta - 0,0278 \beta = - 0,0225 \alpha^2 \left(\frac{v}{a \beta \omega}\right)^{1/6} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{3/6}$$

$$0,3133 \alpha \beta = 0,0225 \left(\frac{v}{\beta \omega}\right)^{1/6} (1 + \alpha^2)^{1/6} \quad (39)$$

Aus den beiden Gleichungen folgt zunächst durch Division:

$$1,0689 \alpha^2 - 0,0278 = 0$$

Die numerische Auflösung liefert:

$$\alpha = 0,162 \text{ und daraus } \beta = 0,462 \left(\frac{v}{\omega}\right)^{1/6} \dots \dots \dots (40)$$

Mit diesen Werten wird die Grenzschichtdicke:

$$\delta = 0,462 r \left(\frac{v}{r^2 \omega}\right)^{1/6}$$

Nun können wir nach dem Verfahren des vorangehenden Abschnittes oder auf Grund der Gleichung (35) das Widerstandsmoment rechnen und erhalten:

$$M = 2 \pi a^2 \rho \int c_r c_t dx = 0,0364 a^5 \omega^2 \rho \left(\frac{v}{a^2 \omega}\right)^{1/6} \dots \dots \dots (41)$$

und für die doppelseitige Reibung:

$$M = 0,0728 a^5 \omega^2 \rho \left(\frac{v}{a^2 \omega}\right)^{1/6} \dots \dots \dots (41a)$$

Wir wollen wieder im Einklang mit den Berechnungen über den Schleppwiderstand von Platten alle Reibungswiderstände auf das Geschwindigkeitsquadrat bzw. auf Geschwindigkeitshöhe beziehen. Bedeutet U die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, so wird das Moment

$$M = 0,146 \gamma \frac{U^2}{2g} a^3 \left(\frac{v}{U a}\right)^{1/6} \dots \dots \dots (42)$$

oder die Widerstandsziffer c_f als Funktion der »Reynoldsschen Kennziffer« der Scheibe

$$R = \frac{U a}{v}$$

$$c_f = 0,146 \frac{1}{\sqrt{R}} \dots \dots \dots (43)$$

In Abb. 7 ist c_f als Funktion der Reynoldsschen Kennziffer R — beide in logarithmischem Maßstabe — aufgetragen. Dieselbe Abbildung enthält auch die aus der Berechnung der laminaren Grenzschicht nach Gl. (33a) sich ergebende Widerstandsziffer:

$$c_f = \frac{3,88}{\sqrt{R}} \quad (44)$$

Die experimentellen Daten sind aus einer jüngst erschienenen Arbeit von W. Schmidt¹⁾ über Reibungswiderstand von glatten Scheiben in Wasser, entnommen. Man sieht, daß die Versuchsergebnisse der theoretischen Berechnung gut entsprechen. Insbesondere ist es von Interesse, daß die Messungen

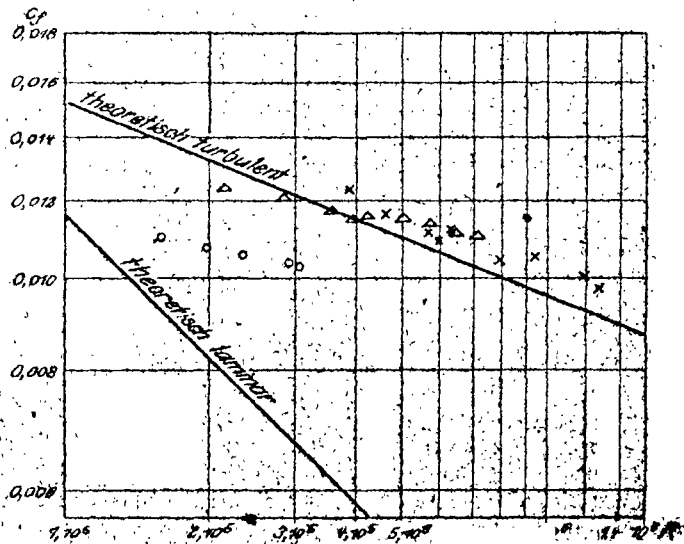


Abb. 7

¹⁾ Z. d. V. d. Ing. Bd. 65, 1921, S. 441

bei kleineren Reynoldsschen Zahlen gerade in das Uebergangsgebiet zwischen Laminarströmung und turbulenter Strömung fallen¹⁾.

8. Bemerkungen über Rauhgkeit. Während bei vollkommen glatten Röhren das Blasius'sche Widerstandsgesetz anscheinend in einem großen Geschwindigkeitsbereich gültig ist, so daß es als mehr denn eine Interpolationsformel erscheint, erhält man bei Röhren mit rauher Wandung bald nach Ueberschreitung des kritischen Punktes eine annähernd quadratische Abhängigkeit des Druckgefälles von der Geschwindigkeit. Für diesen Zustand kann man für das Druckgefälle setzen:

$$h = \lambda \left(\frac{\epsilon}{d} \right) \frac{v^2 l}{2g d} \quad (45)$$

wobei λ eine Funktion der relativen Rauhgkeit $\frac{\epsilon}{d}$ bedeutet. Mit ϵ bezeichnen wir eine Größe von der Dimension einer Länge, die gewissermaßen die mittlere Erhöhung der Wandrauhgkeit mißt; das Verhältnis dieser Größe zum Rohrdurchmesser wollen wir mit v. Mises²⁾ als »relative Rauhgkeit« bezeichnen.

Das quadratische Gesetz für rauhe Wände ist schon dadurch plausibel, daß man sich den Reibungswiderstand aus den Einzelwiderständen der Wanderrhöhungen zusammengesetzt denkt, die einzeln dem quadratischen Gesetz gehorchen. Der Mechanismus des Reibungswiderstandes ist in diesen Fällen offenbar durch regelmäßige Ablösung von Wirbeln ganz bestimmter Intensität und Abmessungen bedingt, wie dies bei Strömungen an Widerstandskörpern der Fall ist.

Man kann nun versuchen, demgegenüber den Strömungswiderstand in vollkommen glatten Röhren sich so vorzustellen, daß in diesem Falle Wirbel verschiedenster Größe sich ablösen und in dem turbulenten Strom regellos herumschwimmen, wobei die Häufigkeit der Wirbel verschiedener Intensität und verschiedener Abmessungen durch ein uns unbekanntes statistisches Gesetz geregelt wird.

Den Reibungswiderstand in glatten Röhren kann man nach dieser Auffassung als zusammengesetzt ansehen aus den Reibungswiderständen, die den einzelnen Wirbelgattungen entsprechen. Nehmen wir an, daß zwischen den Wirbelgrößen und der Rauhgkeit eine Beziehung besteht, so können wir auch sagen: der Reibungswiderstand in glatten Röhren kann aus den bei rauhen Röhren beobachteten, mit der Geschwindigkeit quadratisch wachsenden Einzelwiderständen durch Superposition gewonnen werden, falls wir die einzelnen quadratischen Widerstände mit richtigen Gewichten in Rechnung setzen.

Es ist nicht ohne Interesse, daß man auf Grund dieser Auffassung auf die Gestalt der Funktion $\lambda \left(\frac{\epsilon}{d} \right)$ Schlüsse ziehen kann, und zwar ohne daß man das Häufigkeitsgesetz bzw. die Gewichtsfunktion der Einzelwiderstände kennen würde.

Insbesondere kann man zeigen, daß falls das Blasius'sche Gesetz für glatte Röhre zu Recht besteht, die Funktion $\lambda \left(\frac{\epsilon}{d} \right)$ wenigstens für kleine Werte von $\frac{\epsilon}{d}$ die Formel $\lambda_0 \left(\frac{\epsilon}{d} \right)^{2/3}$ haben muß, wobei λ_0 eine Konstante bezeichnet.

Wenn wir die quadratischen Widerstände nach (45) unter Annahme einer Gewichtsfunktion $\varphi(\epsilon)$ superponieren, so wird das Widerstandsgesetz für glatte Röhre lauten³⁾:

$$h = \frac{\int \lambda \left(\frac{\epsilon}{d} \right) \varphi(\epsilon) d\epsilon}{\int \varphi(\epsilon) d\epsilon} \frac{l v^2}{d 2g} \quad (46)$$

¹⁾ Die Versuche von Odell (Engineering, Bd. 77, 1904, S. 33 und von A. Stodola, Die Dampfturbinen 4. Auflage, Berlin 1910, S. 120—129) über die Reibung rotierender Scheiben in Luft liefern um etwa 20 bis 30 vH höhere Werte und eine raschere Zunahme der Reibung mit der Umfangsgeschwindigkeit. (Bei Odell $\sim \omega^{2.5}$, wobei ϵ eine kleine positive Zahl ist, bei Stodola $\omega^{1.9}$ statt $\omega^{1.5}$). Die Versuche von Odell sind sicher zweifelhaft, weil die Papierscheiben, welche er angewendet hat, flattern und so durch einen größeren Reibungswiderstand vortäuschen. Bei Stodola scheint der höhere Exponent der Rauhgkeit der Scheibe zu entsprechen.

²⁾ Elemente der techn. Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 50.

³⁾ Daß die Integration bis ∞ erstreckt wird, ist nur Formsache, $\varphi(\epsilon)$ nimmt eben mit wachsender ϵ sehr stark ab, bzw. ist von einem bestimmten Werte von ϵ ab gleich Null.

Ich nehme nun an, daß die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ für Werte von ε , die gegen den Rohrdurchmesser klein sind, nur von den physikalischen Konstanten und der Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe der Wandelemente abhängt. Insbesondere soll daher $\varphi(\varepsilon)$ unabhängig von dem Rohrdurchmesser sein. Die unmittelbar der Wand benachbarte Geschwindigkeitsverteilung ist jedoch nach unseren früheren Annahmen vollkommen bedingt durch die Schubspannung an dem betreffenden Wandelement. Ich setze also:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, \mu, \rho, \tau_0).$$

Aus den vier Größen kann nur eine dimensionslose Kombination gebildet werden, nämlich:

$$z = \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/2} \frac{a}{\nu} \tag{47}$$

Wir setzen also:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi\left[\frac{\varepsilon}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right], \quad h = \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \frac{\int_0^\infty \lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \varphi\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{\varepsilon}{\nu}\right) dz}{\int_0^\infty \varphi\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{z}{\nu}\right) dz}$$

Führen wir z als Variable ein, so erhalten wir

$$h = \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \frac{\int_0^\infty \lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \varphi(z) dz}{\int_0^\infty \varphi(z) dz}$$

Setzen wir $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{2m}$, so wird:

$$h = \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \lambda_0 \frac{\int_0^\infty z^{2m} \varphi(z) dz}{\int_0^\infty \varphi(z) dz} = K \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \frac{\lambda_0^{m/2}}{\lambda_0^{m/2}} = K \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \frac{\lambda_0^{m/2}}{\lambda_0^{m/2}} \tag{48}$$

wobei $K = \lambda_0 \frac{\int_0^\infty z^{2m} \varphi(z) dz}{\int_0^\infty \varphi(z) dz}$ eine reine Zahl ist.

Berücksichtigen wir, daß zwischen h und τ_0 die Beziehung:

$$\gamma h \frac{d^3 \pi}{4} = d \pi \tau_0 l \quad \text{oder} \quad \tau_0 = \frac{\gamma h d}{4 l}$$

besteht, so erhalten wir

$$h \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{\gamma^{m/2} d^{m/2}}{4^{m/2} \gamma^{m/2}} = K \frac{l}{d^{1+m}} \frac{v^2}{2g} \frac{\lambda_0^{m/2}}{\lambda_0^{m/2}}$$

Lösen wir die Gleichung nach h auf, so haben wir:

$$h = \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{2}{2+m}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \left(\frac{\nu}{d v}\right)^{\frac{2m}{2+m}} \tag{49}$$

Dieses Gesetz entspricht genau dem Blasius'schen Widerstandsgesetz für glatte Rohre, falls wir setzen:

$$\frac{2m}{2+m} = 1/4$$

oder

$$m = 2/7$$

Führt man für die Gewichtsfunktion φ einen bestimmten Ansatz — etwa nach Art des Fehlergesetzes — ein, so kann man die Beziehung zwischen den Konstanten des für das glatte Rohr gültigen Blasius'schen Gesetzes mit den Konstanten des Rauheitskoeffizienten

¹⁾ Herr Prandtl teilt mir mit, daß er dasselbe Ergebnis auf ganz anderen Wege erhalten hat.

gesetzes berechnen. Ich hoffe, auf die Weiterentwicklung dieser Ueberlegungen bald zurückkommen zu können.

Führen wir andererseits das Gesetz $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{v}{d}\right)^{2/n}$ in (45) ein, so haben wir mit $\lambda_0 \varepsilon^{2/n} = \zeta$

$$h = \zeta \frac{l}{d^{2/n}} \frac{v^2}{2g}$$

oder

$$v \sim \sqrt{\frac{h}{l}} d^{2/n} \approx \left(\frac{h}{l}\right)^{0,5} d^{0,64}$$

Nach der Analogie zwischen Rohren und Kanälen würde für die Geschwindigkeit in einem Kanal mit dem Gefälle J und dem hydraulischen Radius P die Formel gelten:

$$v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,64}$$

Es sei bemerkt, daß nach R. Manning die empirische Formel $v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,66}$, nach Forchheimer $v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,7}$, schließlich nach Hermašek die Formel $v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,6}$ die Versuchsergebnisse in rauhen Kanälen gut wiedergibt¹⁾. 84

Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht.

Von K. POHLHAUSEN in Aachen.

Die außerordentlichen mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Integration der Differentialgleichungen der Flüssigkeitsbewegung, besonders bei Berücksichtigung der Reibung, auftreten, und die im wesentlichen im nichtlinearen Charakter dieser Gleichungen begründet sind, haben in der geschichtlichen Entwicklung der Lehre von der Flüssigkeitsbewegung eine Trennung zwischen »Hydrodynamik« und »Hydraulik« bewirkt. Auf der einen Seite vernachlässigt man die Reibung, um zu einfacheren Gleichungen zu gelangen, und erkauft die Strenge mit wesentlichen Abweichungen der berechneten Strömung von der beobachteten. Auf der andern Seite entwickelte die Technik, die zu einer Beurteilung des wirklichen Verhaltens einer Flüssigkeit gezwungen ist, in der Hydraulik eine eigene Lehre von den Bewegungen einer Flüssigkeit. Hier werden die exakten Gleichungen durch empirische Annahmen und anschauliche Betrachtungen ersetzt, deren Ergebnisse im wesentlichen mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Erst in neuerer Zeit bemüht man sich, die Hydrodynamik mit der Hydraulik in Einklang zu bringen, und zwar durch Berücksichtigung der Reibung in der mathematischen Theorie und durch Vertiefung der hydraulischen Betrachtungen. Die ersten allgemeinen Ansätze, bei denen die Reibung Berücksichtigung fand, wurden von Stokes²⁾ gemacht, dem es unter anderm gelungen ist, den Widerstand einer Kugel in einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit zu berechnen. Voraussetzung dieser Lösung war, daß die Bewegung im wesentlichen durch die Zähigkeit bestimmt wird, daß also entweder die Zähigkeit sehr groß oder das Produkt aus Körperabmessung und Geschwindigkeit sehr klein ist. Für die Bewegung einer Flüssigkeit mit geringer Zähigkeit gab zuerst Prandtl³⁾ eine systematische Vereinfachung, die zu der Theorie der »Grenzschicht« führte und von seinen Schülern Blasius⁴⁾, Boltze⁵⁾ und Hiemenz⁶⁾ im einzelnen ausgeführt und auf Beispiele angewandt wurde.

¹⁾ Vergl. Ph. Forchheimer, Hydraulik, Leipzig 1914, S. 70 u. ff.

²⁾ G. Stokes: On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums Camb. Trans. 2, 1851 (See papers Bd. 3, S. 1).

³⁾ L. Prandtl: Verhandl. des III. Intern. Math. Kongress 1904 (Heidelberg) Leipzig 1905, S. 444.

⁴⁾ H. Blasius: Dissertation Göttingen 1907, Zeitschr. für Math. u. Phys. 56, 1908, S. 1.

⁵⁾ E. Boltze: Dissertation Göttingen 1908.

⁶⁾ K. Hiemenz: Dissertation Göttingen 1911. Dinglers polyt. Journal Bd. 526, 1911, S. 321.