2. *Die physikalische Struktur des Phasenraumes; von Max Planck.*

(Bearbeitet nach zwei Mitteilungen in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Sitzung vom 5. November und vom 3. Dezember 1915, Verhandlungen p. 407 und p. 438, 1915, und einer Mitteilung in der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften, Sitzung vom 16. Dezember 1915, Berichte p. 909.)

---

§ 1.

Seitdem auf der Tagung des ersten Solvaykongresses in Brüssel H. Poincaré der damals noch sehr jugendlichen Quantenhypothese die verfängliche Frage entgegenhielt [1]), nach welchem Verfahren man denn bei einem System mit mehreren Freiheitsgraden die Teilung nach Quanten vornehmen müsse, hat diese Frage eins der schwierigsten Hindernisse für die weitere Entwicklung der Theorie gebildet. Heute glaube ich eine Antwort von einigermaßen allgemeiner Bedeutung darauf geben zu können, und möchte dieselbe, in teilweiser Neubearbeitung meiner oben genannten Veröffentlichungen, nebst einigen neuen Anwendungen hier zusammenfassend darlegen.

Inzwischen hat Hr. A. Sommerfeld [2]), ausgehend von dem Problem der Spektrallinien, ganz den nämlichen Weg beschritten, und auf ihm bereits so außerordentlich bemerkenswerte Resultate erzielt, daß man wohl schon jetzt von einer direkten Bestätigung

---

1) La Théorie du Rayonnement et les Quanta. Paris, Gauthier-Villars, 1912, p. 120.

2) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. kgl. bayr. Akad. d. Wiss. vom 4. Dezember 1915 und vom 8. Januar 1916. Der Hauptunterschied der Sommerfeldschen Betrachtungsweise von der meinigen liegt wohl darin, daß Hr. Sommerfeld von zeitlich periodischen oder quasiperiodischen Bahnen ausgeht, während bei mir der Phasenraum als solcher, unabhängig von der Zeit, betrachtet wird. Die Unterscheidung zwischen kohärenten und inkohärenten Freiheitsgraden (§ 7) findet sich bei Hrn. Sommerfeld nicht, wohl weil dort nur inkohärente Freiheitsgrade behandelt werden.

dieser Theorie sprechen kann. Einzelheiten werden weiter unten (§ 11) noch Erwähnung finden.[1])

Da der Zustand oder die „Phase" eines mit einer beliebigen Anzahl f von Freiheitsgraden ausgestatteten mechanischen oder elektrodynamischen Systems durch einen bestimmten Punkt in dem von den Koordinaten und den Impulsen gebildeten $2f$-dimensionalen Zustandsraum oder Phasenraum eindeutig bestimmt wird, so kommt das Problem allgemein darauf hinaus, in dem Phasenraum ganz bestimmte Punkte bzw. bestimmte Gebiete namhaft zu machen, welche sich im Sinne der Quantenhypothese durch besondere Eigenschaften vor den unmittelbar benachbarten auszeichnen. Von welcher Art diese Eigenschaften sind und woher sie stammen, können und wollen wir hier vorläufig ganz dahingestellt sein lassen. Wir halten uns dann unabhängig von allen weiteren Hypothesen, z. B. von der Entscheidung darüber, ob die Phasenpunkte den Phasenraum stetig erfüllen können oder nicht, ferner ob nur die Emission oder ob auch die Absorption strahlender Energie den Quantengesetzen unterworfen ist usw.

In jedem Falle müssen wir dem Phasenraum eine gewisse *physikalische Struktur* beilegen, welche der klassischen Dynamik durchaus fremd ist, ohne ihr notwendig zu widersprechen, und wir werden dies dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir den Phasenraum durch mehrere Scharen von bestimmten Hyperflächen $(2f-1)$. Grades:

$$(1)\quad \begin{cases} g=0, & g=g_1, & g=g_2, & \ldots & g=g_n, & \ldots \\ g'=0, & g'=g_1', & g'=g_2', & \ldots & g'=g_{n'}', & \ldots \\ g''=0, & g''=g_1'', & g''=g_2'', & \ldots & g''=g_{n''}'', & \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

in einzelne Zellen, die „Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit", zerlegen. Hierbei bedeuten $g, g', g'', \ldots$ gewisse Funktionen der Koordinaten und Impulse, und $g_1, g_2, \ldots$ bestimmte Konstante, nämlich:

$$(1\,\mathrm{a})\qquad g_n = n\,h, \qquad g_{n'}' = n'h, \qquad g_{n''}'' = n''h, \qquad \ldots$$

(h ist das elementare Wirkungsquantum).

---

1) Vgl. auch die erst nach Abschluß dieser Arbeit erschienene wichtige Abhandlung von K. Schwarzschild: Zur Quantenhypothese, Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wiss. p. 548. 1916, sowie einen Aufsatz von Th. Wereide, Ann. d. Phys. **49**. p. 966. 1916.

Unsere Aufgabe ist vollständig erledigt, wenn die Ausdrücke für die Funktionen $g, g', g'', \ldots$ gefunden sind; ihre Anzahl und ihre Beschaffenheit hängt von der Natur des betrachteten physikalischen Systems ab.

Es versteht sich von selbst, daß die Lösung dieser Aufgabe nicht auf Grund der klassischen Dynamik allein erfolgen kann, sondern nur mit Benutzung gewisser Zusatzannahmen, welche eben den Inhalt der Quantenhypothese ausmachen. Es bestätigt sich auch hier wieder, daß die Quantenhypothese nicht auf Energieelemente, sondern auf Wirkungselemente zu gründen ist, entsprechend dem Umstand, daß das Volumen des Phasenraumes die Dimension von h^f besitzt.

§ 2.

Wenn wir nun nach dem Bau der Funktionen g fragen, welche die Grenzflächen der Elementargebiete des Phasenraumes bestimmen, so ergibt sich zunächst eine allgemeine Eigenschaft derselben aus einer Forderung der klassischen Dynamik. Da nämlich durch die Werte der Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und Impulse $\psi_1, \psi_2, \ldots$[1]) der ganze zeitliche Verlauf der sich in dem System abspielenden Veränderungen eindeutig bestimmt ist, so geht durch jeden Phasenpunkt eine ganz bestimmte Kurve im Phasenraum, die „Phasenbahn", welche von dem Phasenpunkt gemäß den Gesetzen der klassischen Dynamik durchlaufen wird. Ob diese Kurve periodisch ist oder nicht, kommt für das Folgende nicht in Betracht. Eine solche Phasenbahn darf nun unter keinen Umständen eine der durch (1) ausgezeichneten Grenzflächen $g, g', \ldots$ schneiden; sie verläuft vielmehr ihrer ganzen Ausdehnung nach innerhalb eines einzigen Elementargebietes, oder auch längs der Grenze zweier Elementargebiete. Denn da die Wahrscheinlichkeit zweier Zustände, die mit Notwendigkeit auseinander hervorgehen, stets die nämliche ist, so kann der Phasenpunkt im Laufe der ihm durch die Dynamik eindeutig vorgeschriebenen Bewegung niemals aus einem Elementargebiet der Wahrscheinlichkeit in ein anderes übergehen.

---

1) Diese Bezeichnung, die statt der Gibbsschen q und p hier deshalb gewählt ist, weil die Buchstaben q und p in anderer Bedeutung gebraucht sind, wird hoffentlich nicht als allzu unbequem empfunden werden.

Nun lauten die Differentialgleichungen der Phasenbahn, die natürlich die Zeit nicht enthalten, nach den Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} d\varphi_1 : d\varphi_2 : \ldots : d\psi_1 : d\psi_2 : \ldots \\ \qquad = \dfrac{\partial u}{\partial \psi_1} : \dfrac{\partial u}{\partial \psi_2} : \ldots : - \dfrac{\partial u}{\partial \varphi_1} : - \dfrac{\partial u}{\partial \varphi_2} : \ldots \end{cases}$$

wenn u die Energie des Systems bedeutet; sie liefern $2f-1$ Integrale von der Form:

$$(3)\qquad u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad w = \text{const}, \quad \ldots$$

wo $v, w, \ldots$ ebenso wie u gewisse Funktionen der Koordinaten und Impulse vorstellen. Sind sie berechnet, so kann man auch umgekehrt die $2f$ Koordinaten φ und ψ eines jeden Phasenpunktes ausdrücken durch die $2f-1$ Größen $u, v, w, \ldots$ und einen einzigen Parameter, z. B. die Zeit, oder die durchlaufene Bogenlänge. Die Werte der $u, v, \ldots$ bestimmen die besondere Phasenbahn, zu der der Phasenpunkt gehört, und der Wert des Parameters die Lage des Punktes auf seiner Bahn.

Dann besagt unser Satz, daß alle Phasenbahnen, welche von Punkten einer der Grenzflächen g ausgehen, ihrer ganzen Ausdehnung nach auf der betreffenden Fläche liegen, oder daß die Funktionen $g, g', \ldots$ nur von den Größen $u, v, \ldots$, nicht aber von dem Zeit- oder Bogenparameter abhängen. Weitere Vereinfachungen lassen sich oft unmittelbar aus den Symmetrien ableiten, welche das betrachtete spezielle System darbietet.

§ 3.

Im übrigen ergibt sich die Art und die Anzahl der Funktionen $g, g', \ldots$ am direktesten aus der Berücksichtigung der singulären Flächen, welche den Phasenraum durchziehen, entsprechend den singulären Phasenbahnen, welche das betrachtete dynamische System aufweist. Denn es ist von vornherein klar, daß jede Singularität des Phasenraumes auch eine besondere Bedeutung besitzen muß für die Art seiner physikalischen Struktur. Insbesondere wird eine singuläre Fläche des Phasenraumes niemals quer durch ein Elementargebiet der Wahrscheinlichkeit hindurchgehen, sondern sie wird immer die Grenze zweier verschiedener Elementargebiete bilden. Daher gehören alle singulären Flächen des Phasenraumes mit zu dem System (1) der ausgezeichneten Grenzflächen, und wir wollen nun diese singulären Flächen, sofern sie im Endlichen liegen, mit

$$g = 0\,, \quad g' = 0\,, \quad g'' = 0\,, \quad \ldots \tag{4}$$

bezeichnen.

Dadurch sind natürlich die Funktionen $g, g', g'', \ldots$ selber noch nicht bestimmt; aber es ist doch schon ein Anhalt zu ihrer Bestimmung gewonnen. Vervollständigt wird dieselbe erst durch ihre Beziehungen zur Größe des Phasenraumes.

§ 4. **Ein einziger Freiheitsgrad.**

In diesem Fall hat der Phasenraum nur zwei Dimensionen, und die Differentialgleichungen (2) der Phasenbahnen reduzieren sich auf eine einzige Gleichung:

$$d\varphi : d\psi = \frac{\partial u}{\partial \psi} : -\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,, \tag{5}$$

welche das Integral $u = \text{const.}$ besitzt; die Gleichung der Erhaltung der Energie ist also zugleich die Gleichung der Phasenbahn, und die Grenzfunktion g in (1) hängt nur von der Energie u, als der einzigen Integrationskonstanten, ab. Eine zweite Funktion g' kann nicht existieren, weil dieselbe ebenfalls nur von u abhängen könnte, während doch g und g' voneinander unabhängig sein müßten.

Nun definieren wir die Funktion g vollständig durch die Gleichung:

$$d\,g = \iint\limits_{u}^{u+d\,u} d\varphi \cdot d\psi\,, \tag{6}$$

zu integrieren über alle Phasenpunkte φ, ψ, deren Energie zwischen u und $u + d\,u$ liegt, jedoch mit der Einschränkung, daß, wenn einem Intervall von u mehrere vollständig voneinander getrennte Gebiete im Phasenraum entsprechen, die Integration nur über ein einziges dieser Gebiete zu erstrecken ist.

Damit ist im Hinblick auf (1a) die Quantenteilung des Phasenraumes vollzogen.

§ 5.

Einige einfache Beispiele werden am besten die Bedeutung dieser Sätze erläutern.

Das dynamische System sei ein um eine *feste Achse* drehbarer starrer Körper. Dann ist, wenn φ den Winkel der Lage,

ω die Winkelgeschwindigkeit, J das Trägheitsmoment bedeutet, die Energie:

$$u = \tfrac{1}{2} J \omega^2$$

und die Impulskoordinate:

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial \omega} = J \omega = \sqrt{2 J u}\,.$$

Der Phasenraum (φ, ψ) ist zweidimensional, die Phasenbahnen sind die Geraden $\psi = \mathrm{const.}$ Eine singuläre Gerade ist $\psi = 0$; das ist also nach (4) zugleich die Grenzfläche $g = 0$. Dieselbe scheidet den ganzen Phasenraum in zwei Hälften, welche die nämlichen Werte von u besitzen. Wir beschränken die Betrachtung gemäß § 4 auf die Seite der positiven ψ. Nach (6) ist:

$$dg = \iint\limits_{u}^{u+du} d\varphi \cdot du \cdot \sqrt{\frac{J}{2u}}\,. \tag{7}$$

Integriert man über φ von 0 bis 2π, über u von u bis $u + du$, so ergibt sich:

$$dg = \pi \sqrt{\frac{2J}{u}} \cdot du\,,$$

also:

$$g = 2\pi \sqrt{2 J u}\,, \tag{8}$$

da $g = 0$ für $u = 0$.

Endlich nach (1a):

$$g_n = 2\pi \sqrt{2 J u_n} = n h\,,$$

folglich[1]):

$$u_n = \frac{n^2 h^2}{8 \pi^2 J} \quad \text{und} \quad \omega_n = \frac{n h}{2 \pi J}\,. \tag{9}$$

§ 6.

Ein anderer Fall eines Systems mit einem einzigen Freiheitsgrad ist ein *einfach periodischer geradliniger Oszillator.* Sei m die Masse, ω die Frequenz, φ die Elongation, so ist die Energie:

$$u = \frac{m}{2} (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \varphi^2)$$

und der Impuls:

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial \dot{\varphi}} = m \dot{\varphi}$$

---

1) **P. Ehrenfest, Verh. d. Deutschen Physik. Ges. 15. p. 451. 1913.**

mithin:

$$u = \frac{m}{2}\,\omega^2\varphi^2 + \frac{1}{2m}\,\psi^2,$$

und die Gleichung der Phasenbahnen:

$$m^2\,\omega^2\,\varphi^2 + \psi^2 = \text{const.}\ ,$$

welche eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen vorstellt. Diese Schar besitzt nur einen singulären Punkt im Endlichen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Das ist nach (4) die singuläre Fläche $g = 0$. Ferner ist nach (6):

$$d\,g = \int\!\!\int_u^{u+du} d\,\varphi \cdot d\,\psi\,,$$

und, wenn man über alle φ und ψ integriert, die zwischen u und $u + d\,u$ liegen:

$$d\,g = \frac{2\pi}{\omega}\,d\,u\,.$$

Dies ergibt, da $g = 0$ für $u = 0$:

(10) $$g = \frac{2\pi}{\omega}\cdot u$$

und nach (1a):

(10a) $$g_n = \frac{2\pi}{\omega}\cdot u_n = n\,h\,, \qquad u_n = \frac{n\,h\,\omega}{2\pi}\,.$$

§ 7. Mehrere Freiheitsgrade.

Die Methode, welche wir hier benutzen werden, um auch bei einem System mit mehreren Freiheitsgraden zu einer bestimmten Einteilung des Phasenraumes zu gelangen, geht ganz allgemein davon aus, daß wir die Bewegungsfreiheit des Systems in passender Weise herabsetzen. Wir greifen nämlich aus der mehrfach unendlichen Schar aller möglichen Phasenbahnen eine gewisse Schaar von kleinerer Mannigfaltigkeit heraus und zwingen nun das System, sich auf diese zu beschränken. Durch welche mechanische Mittel ein solcher Zwang realisiert werden kann, ist hier ebenso nebensächlich wie in der klassischen Mechanik bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Worauf es allein ankommt, ist die Gültigkeit der Gleichungen (2), welche in jedem Falle gewährleistet sein muß, weil auf ihnen die Bedeutung des Phasenraumes für die Messung der Wahrscheinlichkeit beruht. Dabei ist von besonderer Wichtigkeit die richtige

Bestimmung der Impulskoordinaten ψ, welche zu den gewählten Koordinaten φ gehören.

Auf diese Weise gelingt es schließlich, eventuell durch schrittweise Fortsetzung des Verfahrens, das System auf einen einzigen Freiheitsgrad zu reduzieren und somit der oben in § 4 geschilderten Behandlung zugänglich zu machen.

Diese Methode, auf die verschiedenen Freiheitsgrade des Systems der Reihe nach angewendet, liefert im allgemeinen für jeden Freiheitsgrad ein besonderes System von Grenzflächen g. Die vollständigen Ausdrücke der Funktionen $g, g', \ldots$ ergeben sich dann aus dem allgemeinen Satz, daß das Element des ganzen Phasenraumes dG stets in eine Reihe von Faktoren zerfällt, die einzeln nur von $g, g', g'', \ldots$ abhängen. Wenn nun die Anzahl der Funktionen g mit der Anzahl der Freiheitsgrade f übereinstimmt, so besitzt das allgemeine Phasenelement die Form:

$$dG = dg \,.\, dg' \,.\, dg'' \ldots \tag{11}$$

Dann bezeichnen die Größen (1a), wie immer, die gesuchten Grenzflächen (1) der Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit.

Es kommt aber auch vor, daß zwei oder mehrere Freiheitsgrade ein gemeinsames g besitzen. Solche Freiheitsgrade wollen wir „kohärent" nennen. Da dG von der Dimension h^f ist, so folgt, daß i kohärente Freiheitsgrade zu dem Wert von dG einen Beitrag mit dem Glied dg^i liefern.

Wir betrachten nun zunächst Systeme mit zwei kohärenten oder inkohärenten Freiheitsgraden.

§ 8. Zwei kohärente Freiheitsgrade.

Das System bestehe aus *zwei starr miteinander verbundenen*, um ihren ruhenden Schwerpunkt beweglichen Massenpunkten (zweiatomige Molekel). Wenn wir als Koordinaten, wie üblich, die beiden Winkel ϑ (Polabstand, zwischen 0 und π) und φ (Azimuth, zwischen 0 und 2π) wählen, welche die positive Richtung der Symmetrieachse der Molekel im Raum bestimmen, so ist die Energie:

$$u = \frac{J}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)$$

und die beiden Impulskoordinaten sind:

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial \dot{\vartheta}} = J\dot{\vartheta} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\partial u}{\partial \dot{\varphi}} = J\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}\,,$$

mithin:

$$u = \frac{1}{2J}\left(\eta^2 + \frac{\psi^2}{\sin^2\vartheta}\right). \tag{12}$$

Nach (2) ist die Bewegung eine Drehung der Molekel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einer bestimmten Ebene. Da die Richtung dieser Ebene auf die Größe der Wahrscheinlichkeit des Zustandes keinen Einfluß haben kann, so bleibt hierfür als einziges Merkmal übrig die Drehungsgeschwindigkeit ω oder die Energie u. Es existiert also nur eine einzige Schar von Grenzflächen $g =$ const. des Phasenraumes, und die beiden Freiheitsgrade sind kohärent. Die einzige Singularität ist der Punkt $u = 0$, für welchen nach (4) auch $g = 0$.

Nun beschränken wir nach § 7 die Bewegungsfreiheit der Molekel in der Weise, daß wir die Molekel von vornherein zwingen, in einer Ebene zu bleiben. Dann ist die Aufgabe auf die in § 5 behandelte reduziert, und es ergibt sich die Funktion g wieder aus der Gleichung (8).

Kehren wir nun wieder zurück zu der freibeweglichen Molekel, so erhalten wir für ein Element des Phasenraumes:

$$d\,G = \iiint\limits_{g}^{g+dg}\!\!\int d\vartheta\; d\varphi\; d\eta\; d\psi\,,$$

zu integrieren über alle Phasenpunkte, die zwischen g und $g + d\,g$ liegen.

Dies ergibt mit Rücksicht auf (8) und (12):

$$d\,G = 8\pi^2 J\,d\,u = d\,g^2\,, \tag{12a}$$

und daraus folgt als Grenze des gesamten Phasenraumes[1]) zwischen $g = 0$ und $g = n\,h$:

$$G = 8\pi^2 J\,u_n = (n\,h)^2\,. \tag{13}$$

§ 9. Zwei inkohärente Freiheitsgrade.

Ein Massenpunkt m bewege sich in einer bestimmten *Ebene* unter dem Einfluß eines ruhenden anziehenden Kraftzentrums. Die potentielle Energie sei zunächst *quasi-elastisch,*

---

1) Die Ableitung dieser Beziehung weicht nicht nur in der Form, sondern auch in der Sache von der Art der Einführung der entsprechenden Gleichungen (4) und (30) meiner früheren Abhandlungen ab. Die hier gegebene halte ich für weniger willkürlich und daher für zutreffender.

also

$$\frac{m}{2}\omega^2 r^2,$$

wobei ω konstant.

Nehmen wir als Koordinaten die Entfernung $r\,(>0)$ vom Kraftzentrum und den Winkel χ (zwischen 0 und 2π), den der Radiusvektor r mit einer festen Richtung bildet, so ist die Energie:

$$u = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\chi}^2) + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 \tag{14}$$

und die entsprechenden Impulskoordinaten:

$$\varrho = \frac{\partial u}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial \dot{\chi}} = m r^2 \dot{\chi}, \tag{15}$$

also:

$$u = \frac{1}{2m}\left(\varrho^2 + \frac{\zeta^2}{r^2}\right) + \frac{m}{2}\omega^2 r^2. \tag{16}$$

Die drei Differentialgleichungen der Phasenbahnen (2):

$$dr : d\chi : d\varrho : d\zeta = \frac{\varrho}{m} : \frac{\zeta}{m r^2} : \left(\frac{\zeta^2}{m r^3} - m\omega^2 r\right) : 0 \tag{17}$$

besitzen die Integrale:

$$u = \text{const.}, \qquad v = \zeta = \text{const.} \tag{17a}$$

Die Werte von u und v ergeben die Form der Bahn des Massenpunktes: eine Ellipse mit bestimmten Achsenlängen und dem Kraftzentrum als Mittelpunkt, welche in der Zeit $2\pi/\omega$ durchlaufen wird. Die dritte Integrationskonstante bestimmt die Richtungen der Achsen. Da diese aber keinerlei Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des Zustandes haben können, so hängen die Grenzfunktionen g und g' nur von u und v ab.

Als Singularitäten des Phasenraumes kommen in Betracht die Grenzfälle der Ellipse, nämlich die gerade Linie und der Kreis; sie entsprechen den Bedingungen $r_{\text{min.}}$ (kleine Halbachse) $= 0$ und $r_{\text{min.}} = r_{\text{max.}}$ (beide Halbachsen einander gleich). Zwischen diesen beiden Extremen spielen sich alle Bewegungen des Massenpunktes ab.

Für die geradlinige Bewegung ($r_{\text{min.}} = 0$) lautet die Grenzbedingung $v = 0$. Wir betrachten gemäß § 4 im folgenden nur diejenige Hälfte des Phasenraumes, für welche $v > 0$. Bei der kreisförmigen Bewegung ($r_{\text{min.}} = r_{\text{max.}}$) ist für ein Element der Phasenbahn sowohl $d r = 0$ als auch $d \varrho = 0$, also nach (17) zugleich:

$$\varrho = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\zeta^2}{m r^3} - m \omega^2 r = 0 .$$

Dies ergibt mit Rücksicht auf (16) und (17a):

$$u = v \omega ,$$

während im allgemeinen $u > v \omega$.

Daher sind im Phasenraum die singulären Flächen:

(18) $$u - v \omega \equiv u' = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

zugleich Grenzflächen von Elementargebieten der Wahrscheinlichkeit. Wir identifizieren sie nach (4) mit den Flächen:

$$g = 0 \quad \text{und} \quad g' = 0$$

und nehmen ferner als das Einfachste an, daß g nur von u' (> 0) und g' nur von v (> 0) abhängt. Die Berechtigung zu dieser Annahme wird sich erst später darin zeigen, daß das Element des Phasenraumes $d G$ allgemein die Form $d g \,.\, d g'$ besitzt.

Um nun zunächst g zu finden, setzen wir nach dem in § 7 geschilderten Verfahren $g' = 0$, also $v \equiv \zeta = 0$ (geradlinige Bewegungen) und führen diese Gleichung als feste Bedingung in die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes ein. Dann reduziert sich seine Bewegungsfreiheit auf einen einzigen Grad, mit der Koordinate r und dem Impuls ϱ; die Energie wird:

(19) $$u = u' = \frac{\varrho^2}{2 m} + \frac{m}{2} \omega^2 r^2 ,$$

und die Differentialgleichungen (2) lauten:

$$d r : d \varrho = \frac{\varrho}{m} : - m \omega^2 r .$$

Folglich ist nach (6):

$$d g = \iint_u^{u + d u} d r \cdot d \varrho = d u \cdot \int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} \right)_r \cdot d r$$

und nach (19):

$$d g = d u' \cdot \int \frac{m}{\varrho} \cdot d r .$$

Da die Integration über alle Phasenpunkte zu erstrecken ist, welche einem bestimmten Wert von u entsprechen, so sind auch die negativen ϱ mitzurechnen, und daher:

$$dg = 2\,du' \int\limits_{r_{\min.}}^{r_{\max.}} \frac{m}{|\varrho|} \cdot dr\,. \tag{20}$$

Hier ist das Integral nach der ersten Gleichung (15) nichts anderes als die Zeit, welche der Massenpunkt gebraucht, um aus der kleinsten Entfernung $r_{\min.}$ in die größte Entfernung $r_{\max.}$ vom Kraftzentrum zu gelangen. Das ist der vierte Teil der Zeit eines ganzen Umlaufs, also:

$$dg = 2\,du' \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}\,du'\,,$$

und

$$g = \frac{\pi}{\omega}\,u' = \frac{\pi}{\omega}(u - \omega v)\,, \tag{21}$$

da für $u' = 0$ $g = 0$. Mithin nach (1a):

$$g_n = \frac{\pi}{\omega}\,u_n' = n\,h\,. \tag{22}$$

Diese für die geradlinigen Schwingungen eines Massenpunktes gültige Beziehung steht in einem gewissen Gegensatz zu der entsprechenden Formel (10a) für einen geradlinigen Oszillator, wegen des hier fehlenden Faktors 2. Das bedeutet aber keinen sachlichen Widerspruch, sondern ist im Grunde dadurch bedingt, daß hier die Koordinate r stets positiv ist und daher die doppelte Schwingungszahl besitzt wie dort die Koordinate φ.

Jetzt haben wir noch g' durch v auszudrücken. Zu diesem Zweck setzen wir nun g und $u' = 0$, also $u = v\,\omega$ (kreisförmige Bewegungen) und führen dies als feste Bedingung in die Bewegungen des Massenpunktes ein. Dann bleibt als einzige freie Koordinate φ, die Energie wird:

$$u = \omega\,\zeta\,, \tag{23}$$

und die Differentialgleichungen (2) lauten:

$$d\chi : d\zeta = \frac{\partial u}{\partial \zeta} : -\frac{\partial u}{\partial \chi} = \omega : 0\,.$$

Daher ist nach (6):

$$dg' = \iint d\chi \cdot d\zeta\,,$$

zu integrieren über χ von 0 bis 2π, also:

$$d\,g' = 2\pi\,d\zeta = 2\pi\,dv\,,$$

und, da für $v = 0$ $g' = 0$:

$$g' = 2\pi\,v = 2\pi\,\zeta\,, \tag{24}$$

ferner nach (1a):

(25) $$g'_{n'} = 2\pi v_{n'} = n' h\,.$$

Kehren wir nun wieder zurück zum Massenpunkt mit zwei Freiheitsgraden, so erhalten wir für ein Element des Phasenraumes:

(25a) $$dG = \iiiint\limits_{g,\,g'}^{g+dg,\,g'+dg'} dr \cdot d\chi \cdot d\varrho \cdot d\zeta,$$

zu integrieren über alle Phasenpunkte, welche in dem durch die Grenzen bezeichneten Gebiete liegen, oder, wenn wir nun neben r und χ statt ϱ und ζ als Integrationsvariable g und g' einführen, durch die Gleichungen:

$$g = \frac{\pi}{\omega}\left(\frac{\varrho^2}{2m} + \frac{\zeta^2}{2mr^2} + \frac{m}{2}\omega^2 r^2\right) - \pi\zeta \quad \text{und} \quad g' = 2\pi\zeta,$$

$$dG = \iiiint \frac{dr\,d\chi\,dg\,dg'}{D}\,,$$

wobei:

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial \varrho} & \dfrac{\partial g}{\partial \zeta} \\[2mm] \dfrac{\partial g'}{\partial \varrho} & \dfrac{\partial g'}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \frac{2\pi^2\varrho}{m\omega}\,.$$

Also:

$$dG = dg\,dg' \iint \frac{m\omega\,dr\,d\chi}{2\pi^2\varrho}\,.$$

Führt man hier wieder $|\varrho|$ für ϱ ein, wodurch der Faktor 2 im Nenner fortfällt, und integriert über χ von 0 bis 2π, über r von $r_{\text{min.}}$ bis $r_{\text{max.}}$, so ergibt sich:

(26) $$dG = dg\,dg' \cdot \frac{2\omega}{\pi} \int \frac{m\,dr}{|\varrho|} = dg \cdot dg',$$

und durch diese Beziehung ist die Berechtigung der auf Grund von (18) gemachten Annahme über den Bau von g und g' erwiesen. Wenn man die Werte von g und g' als Koordinaten in einer Ebene aufträgt, so stellen die Geraden $g = g_n$ und $g' = g'_{n'}$ die Grenzlinien der Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit vor, und ihre Schnittpunkte bestimmen gewisse ausgezeichnete Ellipsen.[1]

---

1) Näheres hierüber vgl. in den Verhandl. d. D. Phys. Ges. **17.** p. 448 ff. 1915.

§ 10.

Wir wollen nun auch den Fall betrachten, daß die Anziehungskraft dem *Coulombschen Gesetz* folgt, indem das Kraftzentrum mit der elektrischen Ladung $+e$, der bewegliche Massenpunkt m mit der Ladung $-e$ behaftet ist. Da die Behandlungsmethode hier genau die nämliche ist wie im vorigen Paragraphen, so darf die Darstellung etwas abgekürzt werden. Für die nämlichen Koordinaten r, χ und Impulse ϱ, ζ sei die gesamte Energie des Systems:

$$u = \frac{1}{2m}\left(\varrho^2 + \frac{\zeta^2}{r^2}\right) - \frac{e^2}{r} < 0 \tag{27}$$

und die Differentialgleichungen der Phasenbahnen:

$$d r : d\chi : d\varrho : d\zeta = \frac{\varrho}{m} : \frac{\zeta}{m r^2} : \left(\frac{\zeta^2}{m r^3} - \frac{e^2}{r^2}\right) : 0\,. \tag{28a}$$

Die Bahn des Massenpunktes ist eine Ellipse, mit dem Kraftzentrum als einem Brennpunkt, nach der Gleichung:

$$\cos\chi = \frac{p - r}{\varepsilon r}\,, \tag{28b}$$

wo

$$p = \frac{v^2}{m e^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2 u v^2}{m e^4} < 1\,. \tag{28c}$$

Die Grenzfunktionen g und g' hängen wieder nur von den Integrationskonstanten u und $v \equiv \zeta$ ab. Als Singularitäten des Phasenraumes kommen ebenso wieder in Betracht die geradlinige und die kreisförmige Bewegung ($r_{\text{min.}} = 0$ und $r_{\text{min.}} = r_{\text{max.}}$).

Für erstere ist $v = 0$, für letztere, da gleichzeitig:

$$\varrho = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\zeta^2}{m r^3} - \frac{e^2}{r^2} = 0\,,$$

$$u = -\frac{m e^4}{2 v^2} \quad \text{oder} \quad v = e^2\sqrt{\frac{-m}{2u}}\,.$$

Daher sind im Phasenraum die singulären Flächen:

$$e^2\sqrt{\frac{-m}{2u}} - v \equiv u' = 0 \quad \text{und} \quad v = 0 \tag{29}$$

zugleich Grenzflächen der Elementargebiete. Wir identifizieren sie nach (4) mit den Flächen $g = 0$ und $g' = 0$, und nehmen ferner an, daß g nur von u', g' nur von v abhängt. u' ist stets positiv; v nehmen wir ebenfalls positiv.

Um zunächst g zu finden, setzen wir nach dem in § 7 geschilderten Verfahren $g' = 0$, also $v = 0$ (geradlinige Bewegungen) und führen diese Gleichung als feste Bedingung in die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes ein. Dann reduziert sich seine Bewegungsfreiheit auf einen einzigen Grad, mit der Koordinate r und dem Impuls ϱ; die Energie wird:

$$u = \frac{\varrho^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

oder nach der Definition von u':

$$u = -\frac{m e^4}{2 u'^2}, \tag{30}$$

und die Differentialgleichungen (2) lauten:

$$d r : d \varrho = \frac{\varrho}{m} : -\frac{e^2}{r^2}.$$

Folglich ist nach (6):

$$d g = \int_u^{u+du}\!\!\int d r\, d \varrho = d u \cdot \int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)_r \cdot d r,$$

und nach (30), wie auch nach der vorhergehenden Gleichung:

$$d g = \frac{m e^4}{u'^3} \cdot d u' \int \frac{m\, d r}{\varrho}$$

oder:

$$d g = \frac{2 m e^4 d u'}{u'^3} \int \frac{m\, d r}{|\varrho|}. \tag{31}$$

Das Integral ist gleich der Zeit, welche der Massenpunkt gebraucht, um aus der kleinsten Entfernung in die größte Entfernung vom Kraftzentrum zu gelangen. Dies ist hier, wo das Kraftzentrum im Brennpunkt der Ellipse liegt, nicht der vierte Teil, sondern die Hälfte der Zeit eines ganzen Umlaufes, also:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi e^2 \sqrt{\frac{m}{-2 u^3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \pi u'^3}{m e^4}, \tag{31a}$$

folglich:

$$d g = 2\pi\, d u'$$

und

$$g = 2 \pi u' = 2 \pi e^2 \sqrt{\frac{-m}{2u}} - 2 \pi \zeta, \tag{32}$$

also nach (1a):

$$g_n = 2\pi\, u_n' = n h. \tag{33}$$

Um endlich g' durch $v = \zeta$ auszudrücken, setzen wir nun $g = u' = 0$, also:

$$u = -\frac{m\,e^4}{2\,\zeta^2}$$

(kreisförmige Bewegungen), und führen dies als feste Bedingung in die Bewegung des Massenpunktes ein. Dann bleibt als einzige freie Koordinate χ, und die Differentialgleichungen (2) lauten:

$$d\chi : d\zeta = \frac{m\,e^4}{\zeta^3} : 0\,.$$

Daher ist nach (6):

$$d\,g' = \iint d\chi\; d\zeta$$

zu integrieren über χ von 0 bis 2π, also:

$$d\,g' = 2\pi\,d\zeta = 2\pi\,dv$$

(34) $$g' = 2\pi\,\zeta \quad = 2\pi\,v$$

und nach (1a):

(35) $$g'_{n'} = 2\pi\,v_{n'} = n'h\;.$$

Kehren wir nun wieder zurück zum Massenpunkt mit zwei Freiheitsgraden, so erhalten wir für ein Element des Phasenraumes:

$$d\,G = \iiiint\limits_{g,\;g'}^{g+dg,\;g'+dg'} d\,r\;d\chi\;d\varrho\;d\zeta$$

oder, mit Einführung von g und g' statt ϱ und ζ neben r und χ als Integrationsvariablen, durch die Gleichungen (32) und (34):

$$d\,G = d\,g\;d\,g' \cdot \iint \frac{d\,r\;d\chi}{D}\,,$$

wobei:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \varrho} & \frac{\partial g}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g'}{\partial \varrho} & \frac{\partial g'}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \pi^2 e^2 \sqrt{\frac{-2}{m\,u^3}} \cdot \varrho\,,$$

folglich:

$$d\,G = d\,g\;d\,g' \cdot \iint \frac{d\,r\;d\chi}{\pi^2 e^2\,\varrho} \cdot \sqrt{\frac{-\,m\,u^3}{2}}\,.$$

Integriert man über χ von 0 bis 2π und beachtet, daß u bei konstantem g und g' konstant bleibt, so kommt, bei Beschränkung auf positive ϱ:

$$dG = \frac{2\,dg\,dg'}{\pi e^2} \cdot \sqrt{\frac{-2u^3}{m}} \cdot \int \frac{m\,dr}{|\varrho|}$$

oder, da das Integral wieder durch (31a) gegeben ist:

$$dG = dg\,dg' \; ,$$

wie es nach (11) sein muß. Den Werten g_n in (33) und $g'_{n'}$ in (35) entspricht eine zweifach unendliche Schar von ausgezeichneten Bahnellipsen des Massenpunktes, mit den großen Halbachsen:

$$\text{(36a)} \qquad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{(n+n')^2 h^2}{4\pi^2 m e^2}$$

und den Exzentrizitäten:

$$\text{(36b)} \qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{n'^2}{(n+n')^2} \, .$$

Es sind genau die nämlichen Ellipsen, zu welchen auch Hr. Sommerfeld[1]) gelangt ist.

§ 11.

Von besonderem Interesse für die Theorie der Spektrallinien wird der vorliegende Fall, wenn man ihn, nach dem Vorgang von Hrn. Sommerfeld, nicht nach der klassischen, sondern nach der *relativistischen Mechanik* behandelt. Dann ändern sich die Gleichungen nur insofern, als die zu r und χ gehörigen Impulskoordinaten jetzt lauten:

$$\text{(37)} \qquad \varrho = \frac{m\dot r}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}, \qquad \zeta = \frac{m r^2 \dot\chi}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

wobei m die konstante Ruhmasse, c die Lichtgeschwindigkeit und

$$q^2 = \dot r^2 + r^2 \dot\chi^2,$$

während die Energie statt (27) den Wert annimmt:

$$\text{(38)} \quad u = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} - \frac{e^2}{r} = c\sqrt{m^2 c^2 + \varrho^2 + \frac{\zeta^2}{r^2}} - \frac{e^2}{r} < m c^2 .$$

Die Differentialgleichungen der Phasenbahnen sind dann wieder durch (2) gegeben, und die Integrationskonstanten wieder:

$$u \quad \text{und} \quad v \equiv \zeta \, .$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 498.

Die weitere Behandlung des Problems erfolgt nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methode. Die Bahn des Massenpunktes entspricht der Gleichung:

$$\cos\alpha\chi = \frac{p - r}{\varepsilon r}, \tag{38a}$$

wobei

$$p = \frac{c^2 v^2 - e^4}{e^2 u}, \tag{38b}$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{(m^2 c^4 - u^2)\cdot(c^2 v^2 - e^4)}{e^4 u^2} < 1, \tag{38c}$$

$$\alpha^2 = 1 - \frac{e^4}{c^2 v^2} < 1, \tag{38d}$$

sie läßt sich auffassen als eine Ellipse mit dem Parameter p und der Exzentrizität ε, deren Achsen sich, wenn r eine Periode durchläuft, um den Winkel

$$2\pi\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

im Sinne der Bewegung drehen. Der größte und der kleinste Wert von r ergeben sich aus der Gleichung:

$$r_{\substack{\text{max.}\\\text{min.}}} = \frac{e^2 u \pm \sqrt{e^4 u^2 - (c^2 v^2 - e^4)\cdot(m^2 c^4 - u^2)}}{m^2 c^4 - u^2}. \tag{38e}$$

Die singulären Grenzflächen im Phasenraum, entsprechend den Bedingungen $r_{\text{min.}} = r_{\text{max.}}$ und $r_{\text{min.}} = 0$, sind:

$$\frac{m c e^2}{\sqrt{m^2 c^4 - u^2}} - v = 0 \quad \text{und} \quad v - \frac{e^2}{c} = 0. \tag{39}$$

Das sind also die Flächen $g = 0$ und $g' = 0$. Die erstere bezeichnet die kreisförmigen Bahnen des Massenpunktes um das Kraftzentrum als Mittelpunkt, die letztere spiralförmige Bahnen, die in dem Kraftzentrum anfangen bzw. endigen.

Zur Bestimmung von g ergibt dann die Bedingung $g' = 0$ oder:

$$v \equiv \zeta = \frac{e^2}{c}$$

nach (38):

$$u = c\sqrt{m^2 c^2 + \varrho^2 + \frac{e^4}{c^2 r^2}} - \frac{e^2}{r} \tag{40}$$

und

$$d g = \int_u^{u+du}\!\!\int d r\, d\varrho = d u \int_0^{r_{\text{max.}}} \left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)_r \cdot d r,$$

folglich:

$$dg = du \int \sqrt{m^2 c^2 + \varrho^2 + \frac{e^4}{c^2 r^2}} \cdot \frac{dr}{c\varrho}$$

$$= 2\,du \int_0^{r_{\text{max.}}} \sqrt{m^2 c^2 + \varrho^2 + \frac{e^4}{c^2 r^2}} \cdot \frac{dr}{c\,|\varrho|}\,.$$

Das (bei konstantem u zu nehmende) Integral ist nach der ersten Gleichung (37) gleich der Zeit, welche der Massenpunkt gebraucht, um von der Entfernung 0 in die größte Entfernung vom Kraftzentrum zu gelangen, und nach (40) gleich:

$$\frac{\pi c^3 m^2 e^2}{(m^2 c^4 - u^2)^{3/2}},$$

also:

$$dg = \frac{2\pi m^2 c^3 e^2\,du}{(m^2 c^4 - u^2)^{3/2}},$$

oder:

$$(41) \qquad dg = 2\pi \frac{e^2}{c} \cdot d\,\frac{u}{\sqrt{m^2 c^4 - u^2}}\,.$$

Andererseits ergibt zur Bestimmung von g' die Bedingung $g = 0$ (kreisförmige Bewegungen) wieder:

$$(42) \qquad dg' = \iint d\chi\, d\zeta = 2\pi\, dv\,.$$

Nehmen wir nun den allgemeinen Fall mit zwei Freiheitsgraden, so erhalten wir für ein Element des Phasenraumes:

$$dG = \iiiint_{g,\,g'}^{g+dg,\,g'+dg'} dr\, d\chi\, d\varrho\, d\zeta,$$

zu integrieren über alle Phasenpunkte in dem durch die Grenzen bezeichneten Gebiete, oder, mit Einführung von u statt ϱ neben r, χ und $v = \zeta$ als Integrationsvariablen, nach Gleichung (38):

$$(43) \quad \begin{cases} dG = \dfrac{4\pi^2 m^2 c^3 e^2}{(m^2 c^4 - u^2)^{3/2}} \cdot du\, dv \\[2ex] \quad = \dfrac{4\pi^2 m^2 c^3 e^2}{m^2 c^4} \cdot d\,\dfrac{u}{\sqrt{m^2 c^4 - u^2}} \cdot dv = dg \cdot dg'. \end{cases}$$

Nun handelt es sich noch darum, g und g' einzeln so durch u und v auszudrücken, daß die Gleichung (43) allgemein erfüllt ist, während für die beiden Grenzfälle die Gleichungen (39), (41) und (42) gelten. Dies wird erreicht, wenn wir setzen:

$$g = 2\pi\left(\frac{e^2 u}{c\sqrt{m^2c^4 - u^2}} - \sqrt{v^2 - \frac{e^4}{c^2}}\right), \tag{44}$$

$$g' = 2\pi\left(v - \frac{e^2}{c}\right). \tag{45}$$

Daraus folgen dann nach (1) die Grenzflächen der Elementargebiete des Phasenraumes $g = n h$ und $g' = n' h$, und damit nach (38a) usw. die für die ausgezeichneten Bahnkurven des Massenpunktes charakteristischen Parameter.

Die hier für die relativistische Mechanik erhaltenen Resultate weichen noch etwas von den Sommerfeldschen korrigierten Resultaten[1]) ab, insofern, als sich dort statt der Gleichung (45) die Gleichung $g' = 2\pi v$, in der hier gebrauchten Bezeichnung, findet, entsprechend dem Umstand, daß Hr. Sommerfeld als Grenzfläche des Phasenraumes nicht

$$v = \frac{e^2}{c},$$

sondern $v = 0$ annimmt. Quantitativ genommen, ist allerdings der Unterschied nicht sehr beträchtlich, da e^2/c fast 1000mal so klein ist wie h; aber er besitzt für Spektralmessungen doch schon praktische Bedeutung.

§ 12. Drei kohärente Freiheitsgrade.

Dieser Fall findet sich verwirklicht bei der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, wenn die *drei Hauptträgheitsachsen einander gleich sind.* Denn die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes kann dann nicht von der Richtung der augenblicklichen Drehungsachse, sondern nur von der Größe der Winkelgeschwindigkeit ω abhängen.

Beschränken wir zunächst die Bewegung auf einen einzigen Freiheitsgrad, indem wir die Drehungsachse als fest annehmen, so haben wir den in § 5 behandelten Fall; also gelten wieder die Gleichungen (8) und (9).

Nehmen wir jetzt den Fall der freien Drehung und bezeichnen die Lage des Körpers durch die drei Winkel ϑ, φ und χ, wobei ϑ und φ die beiden Richtungswinkel einer im Körper festliegenden Geraden, χ den Drehungswinkel um diese Gerade bedeutet, so ist die Energie der Bewegung:

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 499, in der Nachschrift bei der Korrektur, vom 10. Februar 1916.

$$u = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{J}{2} (\dot{\vartheta}^2 + 2 \cos \vartheta \, \dot{\varphi} \dot{\chi} + \dot{\varphi}^2 + \dot{\chi}^2),$$

die dazugehörigen Impulse:

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial \dot{\vartheta}} = J \dot{\vartheta}, \qquad \psi = \frac{\partial u}{\partial \dot{\varphi}} = J(\dot{\varphi} + \cos \vartheta \, \dot{\chi}),$$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial \dot{\chi}} = J(\dot{\chi} + \cos \vartheta \, \dot{\varphi}),$$

also:

(46) $$u = \frac{1}{2J} \left(\eta^2 + \frac{\psi^2 + \zeta^2 - 2 \psi \zeta \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right),$$

und wir erhalten für das Element des Phasenraumes:

$$dG = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_u^{u+du} d\vartheta \, d\varphi \, d\chi \, d\eta \, d\psi \, d\zeta.$$

Zur Ausführung der Integration benutzen wir statt ζ die Integrationsvariable ζ', indem wir setzen:

$$\zeta = \zeta' \sin \vartheta + \psi \cos \vartheta .$$

Dann ist:

(47) $$u = \frac{1}{2J} (\eta^2 + \psi^2 + \zeta'^2)$$

und:

$$dG = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_u^{u+du} d\vartheta \, d\varphi \, d\chi \, d\eta \, d\psi \, d\zeta' \cdot \sin \vartheta .$$

Die Integration ist zu erstrecken: über ϑ von 0 bis π, über φ und χ von 0 bis 2π, über η, ψ und ζ' von u bis $u + du$, gemäß (47). Dies ergibt:

(47a) $$dG = 2 \cdot 4\pi^2 \cdot 4\pi \cdot 2Ju \, d\sqrt{2Ju}$$

und durch Vergleichung mit (8):

(48) $$G = \tfrac{4}{3} g^3 .$$

Daraus folgt für das Gesamtvolumen[1]) des Phasenraumes zwischen $g = 0$ und $g = g_n = nh$:

(49) $$G = \tfrac{4}{3} (nh)^3 .$$

§ 13. Drei Freiheitsgrade, davon zwei kohärent.

Ein Beispiel hierfür ist die *räumliche Bewegung* eines Massenpunktes unter dem Einfluß eines anziehenden Kraftzentrums.

---

1) Vgl. die Anmerkung am Schluß von § 8.

Daß von den drei Freiheitsgraden dieses Systems zwei kohärent sind, folgt daraus, daß die Bahn des Massenpunktes eine ebene ist, und daß die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes nicht abhängen kann von der Richtung dieser Ebene. Beschränkt man also die Bewegung auf eine bestimmte Ebene, wodurch die Zahl der Freiheitsgrade auf zwei reduziert wird, so tritt damit in dem System der Grenzflächen des Phasenraumes keine Vereinfachung ein, und das besagt, daß der verschwundene Freiheitsgrad keine selbständige Schar von Grenzflächen liefert (§ 7), sondern mit einem der beiden anderen kohärent ist; mit welchem, muß die Rechnung lehren.

Benutzen wir als Koordinaten der räumlichen Lage des Massenpunktes die Polarkoordinaten r, ϑ, φ und bezeichnen die potentielle Energie mit $f(r)$, so ist die Gesamtenergie:

$$u = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + f(r)$$

und die entsprechenden Impulse sind:

$$(50)\qquad \begin{cases} \varrho = \dfrac{\partial u}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \eta = \dfrac{\partial u}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta}, \\ \psi = \dfrac{\partial u}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}, \end{cases}$$

folglich:

$$(51)\qquad u = \frac{1}{2m}\left(\varrho^2 + \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{\psi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) + f(r).$$

Das Element des Phasenraumes beträgt:

$$(52)\qquad dG = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dr\,d\vartheta\,d\varphi\,d\varrho\,d\eta\,d\psi.$$

Durch die sechs Phasenkoordinaten ist natürlich die Ebene, die Form und Lage der Bahnkurve, sowie die Geschwindigkeit (nach Größe und Richtung) des Massenpunktes eindeutig bestimmt. Die bezüglich des Umlaufsinnes positive Normale der Bahnebene besitze die Richtungswinkel ϑ', φ', ferner sei χ der Winkel, welchen die Richtung von r mit derjenigen im Raume festen Richtung bildet, welche die Projektion der positiven z-Achse ($\vartheta = 0$) auf die Bahnebene darstellt, und

$$m r^2 \dot{\chi} = v = \zeta > 0$$

sei die Integrationskonstante des Flächenprinzips. Dann können wir in (52) neben r und ϱ statt ϑ, φ, η, ψ die vier neuen Integrationsvariablen ϑ', φ', χ, ζ einführen mittels der Gleichungen:

$$
(53)\qquad \left\{\begin{aligned}
\cos\vartheta &= \sin\vartheta'\cos\chi\,,\\
\operatorname{tg}(\varphi-\varphi') &= \frac{\operatorname{tg}\chi}{\cos\vartheta'}\,,\qquad \sin(\varphi-\varphi') = -\frac{\sin\chi}{\sin\vartheta}\,,\\
\eta &= \frac{\zeta\sin\vartheta'\sin\chi}{\sin\vartheta}\,,\\
\psi &= \zeta\cos\vartheta'
\end{aligned}\right.
$$

und erhalten:

$$dG = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int D\cdot d\vartheta'\,d\varphi'\,dr\,d\chi\,d\varrho\,d\zeta\,,$$

wobei die Funktionaldeterminante:

$$D = \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\vartheta'},\quad\ldots\quad\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right| = \zeta\sin\vartheta'.$$

Die Integration ist auszuführen über ϑ' von 0 bis π, über φ' von 0 bis 2π und über die übrigen Variablen ganz in derselben Weise wie oben bei der Behandlung des ebenen Systems, wo die entsprechenden Größen auch genau die nämlichen Bezeichnungen haben. Dies ergibt durch Vergleichung mit (25a) und (26):

$$dG = 4\pi\zeta\,dg\,dg'\;,$$

und nach (24):

$$(54)\qquad dG = dg\,.\,dg'^2\;.$$

Durch diese Gleichung ist das räumliche Problem vollkommen auf das ebene zurückgeführt, und man erkennt, daß die beiden kohärenten Freiheitsgrade nicht der Energiekonstanten u, sondern der Flächenkonstanten v zukommen, was offenbar damit zusammenhängt, daß die Energie ein Skalar, das Rotationsmoment aber ein Vektor ist.

§ 14.

Ein anderes Beispiel von drei Freiheitsgraden, deren zwei kohärent sind, bietet die Bewegung eines *beliebigen starren Körpers* um einen festen Punkt. Denn da diese Bewegung durch das Rollen des Trägheitsellipsoids längs einer im Raume festen Tangentialebene, der „invariablen" Ebene, dargestellt wird, und da die Wahrscheinlichkeit des Zustandes nicht von der Richtung dieser Ebene abhängen kann, so wird das System der Grenzflächen des Phasenraumes nicht vereinfacht, wenn man die Zahl der Freiheitsgrade dadurch auf zwei herabmindert, daß man die Richtung der invariablen Ebene von vornherein festlegt (vgl. § 13). Es gibt also auch hier im Phasenraum nur zwei Scharen von Grenzflächen: g und g'.

Die Hauptträgheitsmomente des Körpers seien J, K, L, und die Lagenwinkel wieder ϑ, φ, χ (§ 12), wobei ϑ und φ die positive Richtung der dritten Hauptträgheitsachse L, χ die der ersten Hauptträgheitsachse J charakterisieren möge.

Dann sind die Komponenten der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit in bezug auf die drei Hauptträgheitsachsen:

$$(55)\qquad \begin{cases} \alpha = \sin\vartheta\cos\chi\,\dot\varphi - \sin\chi\,\dot\vartheta\,, \\ \beta = -\sin\vartheta\sin\chi\,\dot\varphi - \cos\chi\,\dot\vartheta\,, \\ \gamma = \cos\vartheta\,\dot\varphi + \dot\chi\,, \end{cases}$$

ferner die kinetische Energie des Körpers:

$$(56)\qquad u = \tfrac{1}{2}(J\alpha^2 + K\beta^2 + L\gamma^2)\,,$$

die Impulskoordinaten:

$$(57)\qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial\dot\vartheta}\,,\qquad \psi = \frac{\partial u}{\partial\dot\varphi}\,,\qquad \zeta = \frac{\partial u}{\partial\dot\chi}\,,$$

und das Element des Phasenraumes:

$$dG = \iiiiiint d\vartheta\, d\varphi\, d\chi\, d\eta\, d\psi\, d\zeta\,.$$

Zur Ausführung der Integration benutzen wir statt η, ψ, ζ die Integrationsvariablen α, β, γ, die nach (57) und (56) mit jenen durch die Gleichungen verknüpft sind:

$$(58)\begin{cases} \eta = -J\alpha\sin\chi - K\beta\cos\chi\,, \\ \psi = J\alpha\sin\vartheta\cos\chi - K\beta\sin\vartheta\sin\chi + L\gamma\cos\vartheta\,, \\ \zeta = L\gamma\,. \end{cases}$$

Dies ergibt, durch Bildung der Funktionaldeterminante:

$$dG = \iiiiiint d\vartheta\, d\varphi\, d\chi\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \cdot JKL\sin\vartheta\,,$$

und durch Integration über ϑ von 0 bis π, über φ und χ von 0 bis 2π:

$$(59)\qquad dG = 8\pi^2 JKL\iiint d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,.$$

Sind die drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ergibt sich hieraus durch Integration über α, β, γ mit Rücksicht auf (56) der frühere Ausdruck (47a).

Um nun für den allgemeinen Fall g und g' aufzufinden, bedenken wir, daß g und g' nur von den beiden Integrationskonstanten der Bewegung: der Energie u und dem Quadrate des Rotationsmomentes:

(60) $$v = J^2\alpha^2 + K^2\beta^2 + L^2\gamma^2$$

abhängen, und führen daher zunächst in (59) als neue Integrationsvariable die durch (56) und (60) definierten Größen $2u$ und v ein. Als dritte Integrationsvariable wählen wir das Quadrat der Drehungsgeschwindigkeit:

(61) $$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \, ,$$

weil diese Größe sich ebenfalls homogen und linear aus den Quadraten $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ zusammensetzt. Dann geht der Ausdruck (59) über in:

(62) $$dG = \frac{\pi^2 JKL}{(J-K)(K-L)(J-L)} \iiint \frac{d(2u)\cdot dv \cdot d\omega^2}{\alpha\beta\gamma}$$

und, wenn wir α, β, γ durch die Integrationsvariablen ausdrücken:

(63) $$dG = \pi^2 \iiint \frac{d(2u)\, dv\, d\omega^2}{\sqrt{(a-\omega^2)(b-\omega^2)(c-\omega^2)}} \, ,$$

wobei:

(64) $$\begin{cases} a = 2u\left(\dfrac{1}{K} + \dfrac{1}{L}\right) - \dfrac{v}{KL} \, , \\ b = 2u\left(\dfrac{1}{L} + \dfrac{1}{J}\right) - \dfrac{v}{LJ} \, , \\ c = 2u\left(\dfrac{1}{J} + \dfrac{1}{K}\right) - \dfrac{v}{JK} \, . \end{cases}$$

Nun fragen wir nach den Singularitäten des Phasenraumes. Diese entsprechen den Fällen, daß von den drei Größen a, b, c zwei einander gleich sind. Die Differenzen derselben sind allgemein:

(65) $$\begin{cases} b - c = \left(\dfrac{1}{L} - \dfrac{1}{K}\right)\cdot\left(2u - \dfrac{v}{J}\right) , \\ c - a = \left(\dfrac{1}{J} - \dfrac{1}{L}\right)\cdot\left(2u - \dfrac{v}{K}\right) , \\ a - b = \left(\dfrac{1}{K} - \dfrac{1}{J}\right)\cdot\left(2u - \dfrac{v}{L}\right) . \end{cases}$$

Um die Anschauung zu fixieren, nehmen wir $J > K > L$ an. Dann ist, wie man aus (56) und (60) ersieht:

(65a) $$\begin{cases} 2u - \dfrac{v}{J} = K\left(1 - \dfrac{K}{J}\right)\beta^2 + L\left(1 - \dfrac{L}{J}\right)\gamma^2 \gtreqless 0 , \\ 2u - \dfrac{v}{K} = L\left(1 - \dfrac{L}{K}\right)\gamma^2 + J\left(1 - \dfrac{J}{K}\right)\alpha^2 \gtreqless 0 , \\ 2u - \dfrac{v}{L} = J\left(1 - \dfrac{J}{L}\right)\alpha^2 + K\left(1 - \dfrac{K}{L}\right)\beta^2 \leqq 0 , \end{cases}$$

und die singulären Flächen des Phasenraumes entsprechen den drei Gleichheitszeichen. Das erste ergibt $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, also eine konstante Drehung um die Achse der größten Trägheit J; das zweite bezeichnet eine Drehung um die Achse der mittleren Trägheit K, nebst derjenigen Bewegung, welche bei einer unendlich kleinen Störung dieser (instabilen) Drehung eintritt; das dritte ergibt $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, also eine konstante Drehung um die Achse der kleinsten Trägheit L. Diese drei singulären Flächen stellen zugleich Grenzflächen der Elementargebiete des Phasenraumes vor, zwischen ihnen spielen sich alle Bewegungen ab, in der Art, daß, je nachdem $v \lesseqgtr 2Ku$, die Phasenbahnen ganz in dem Zwischenraum zwischen der zweiten und dritten Grenzfläche oder ganz in dem Zwischenraum zwischen der ersten und zweiten Grenzfläche verlaufen.

Wir wählen zur weiteren Betrachtung aus den erstgenannten Teil des Phasenraumes, der von der zweiten und der dritten singulären Fläche begrenzt wird, für den also zugleich:

$$(66) \qquad 2Ku - v \geqq 0 \quad \text{und} \quad 2Lu - v \leqq 0\,.$$

Dann sind nach (64) die Größen a, b, c alle positiv, nach (65) ist $b > a > c$, und nach (63) liegt das Quadrat der Drehungsgeschwindigkeit ω^2 stets zwischen a und b. Von den drei Komponenten α, β, γ der Drehungsgeschwindigkeit nehmen α und β längs einer Phasenbahn positive und negative Werte an. Dagegen γ behält immer sein Vorzeichen, da es nach der ersten Ungleichung (66) nicht durch 0 hindurchgehen kann. Daraus folgt, daß der betrachtete Phasenraum in zwei vollständig getrennte Stücke zerfällt, die sich nur durch das Vorzeichen von γ unterscheiden. Wir beschränken nach § 4 die Betrachtung auf den Raum mit positivem γ, d. h. auf solche Bewegungen, bei welchen die augenblickliche Drehungsachse des Körpers mit der positiven Achse des kleinsten Trägheitsmomentes L einen spitzen Winkel bildet. Setzen wir zur Abkürzung die positiven Größen:

$$(67) \qquad \begin{cases} a - c = \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{J}\right)\left(2u - \frac{v}{K}\right) = u'\,, \\ b - a = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{J}\right)\left(\frac{v}{L} - 2u\right) = v'\,, \end{cases}$$

so sind nach (4) die Flächen $u' = 0$, $v' = 0$ des Phasenraumes zu identifizieren mit den Grenzflächen $g = 0$ und $g' = 0$.

Wir führen nun zunächst in (63) statt ω^2 als Integrationsvariable den Winkel ε ein, durch die Gleichung:

$$\omega^2 = a + (b - a) \sin^2 \varepsilon \ . \tag{68}$$

Als Grenzen von ε wählen wir 0 und $\pi/2$. Dann entsprechen jedem Werte von ε auf jeder Phasenbahn vier verschiedene Phasenpunkte, wegen der doppelten Vorzeichen von α und β, also ist der Ausdruck (63) von dG noch mit 4 zu multiplizieren, woraus folgt:

$$d\,G = 8\pi^2 \iiint \frac{d(2u) \cdot dv \cdot d\varepsilon}{\sqrt{(a - c) + (b - a) \sin^2 \varepsilon}} \ ,$$

und, mit Einführung von u' und v' statt $2u$ und v:

$$d\,G = \frac{8\pi^2}{C} \iint du'\,dv' \int_0^{\pi/2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{u' + v' \sin^2 \varepsilon}} \ , \tag{69}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$C = \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{J}\right) \cdot \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{J}\right) \cdot \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right) \cdot \tag{70}$$

Jetzt handelt es sich noch darum, g und g' vollständig als Funktionen von u' und v' zu bestimmen, und zwar so, daß erstens dG allgemein in die beiden Faktoren dg und dg'^2 zerfällt, und daß zweitens $g = 0$ für $u' = 0$, und $g' = 0$ für $v' = 0$. Beide Bedingungen zeigen sich erfüllt, wenn wir, mit Einführung zweier Proportionalitätskonstanten p und p', setzen:

$$g = p \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{u' + v' \sin^2 \varepsilon}\, d\varepsilon - \sqrt{v'} \right) , \tag{71}$$

$$g'^2 = p' v' ; \tag{72}$$

denn dann wird nach (69):

$$d\,G = \frac{16\,\pi^2}{p\,p' C} \cdot dg\, dg'^2 . \tag{73}$$

Die Einzelbestimmung von p und p' erfolgt nach dem in § 7 geschilderten Verfahren durch geeignete Beschränkung der Bewegungsfreiheit des Körpers; daher berechnen wir nun g für den speziellen Fall, daß $g' = 0$, also $v' = 0$ als feste Bedingung eingeführt wird. Dann reduziert sich die Bewegung auf eine konstante Drehung um die L-Achse, und wir haben nach (8):

$$g = 2\pi \sqrt{2\,L\,u} \ . \tag{74}$$

Dabei ist nach (67) für $v' = 0$:

$$2\,L\,u\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{J}\right)\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right) = u'. \tag{75}$$

Andererseits ist nach (71) für $v' = 0$:

$$g = p \cdot \sqrt{u'} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{76}$$

folglich durch Gleichsetzung von (74) und (76):

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{J}\right)\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right)}. \tag{77}$$

Ebenso findet man g' aus dem speziellen Fall, daß $g = 0$ und $u' = 0$. Dann ist der Körper auf solche Bewegungen beschränkt, die entstehen, wenn einer anfänglichen Drehung um die mittlere, instabile Hauptträgheitsachse K eine unendlich kleine Störung erteilt wird.

Wir können uns aber diese ganze Rechnung sparen, wenn wir die Beziehung (54) benutzen, die in Verbindung mit (73) ergibt:

$$\frac{16\,\pi^2}{p\,p'\,C} = 1,$$

Also nach (77) und (70):

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{J}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{J}\right)\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right)}; \tag{78}$$

daraus folgt, nach (72) und (67):

$$g'^2 = 4\,\pi^2 \cdot \frac{\frac{v}{L} - 2\,u}{\sqrt{\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{J}\right)\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right)}}. \tag{79}$$

Die Gleichungen (71) mit (77) und (79) ergeben nach (1a) die vollständige physikalische Struktur desjenigen Teiles des Phasenraumes, der durch die Ungleichungen (66) charakterisiert wird. Ganz entsprechend lauten natürlich die Resultate für den anderen Teil des Phasenraumes, denjenigen, bei welchem die Drehungsachsen des Körpers die Achse des größten Trägheitsmomentes J umschließen.

§ 15.

Eine besondere Behandlung erheischt der spezielle Fall, daß von den drei Trägheitsmomenten *zwei einander gleich* sind, weil dann ω^2 durch u und v bestimmt ist, und somit nicht mehr als dritte unabhängige Variable neben diesen beiden Größen benutzt werden kann.

Wir setzen also nun:

$$J = K > L .$$

Die zu berechnenden Funktionen g und g' hängen nur von den beiden Integrationskonstanten der Bewegung ab: der Energie

$$u = \tfrac{1}{2}\left(J(\alpha^2 + \beta^2) + L\gamma^2\right) \tag{80}$$

und dem Quadrat des Rotationsmomentes:

$$v = J^2 (\alpha^2 + \beta^2) + L^2 \gamma^2 . \tag{81}$$

Um ihre Grenzwerte zu bestimmen, fragen wir nach den Singularitäten des Phasenraumes. Dieselben ergeben sich aus der Überlegung, daß die Größen:

$$2\,J\,u - v = L\,(J - L)\,\gamma^2 = u' \tag{82}$$

und

$$v - 2\,L\,u = J\,(J - L)\,(\alpha^2 + \beta^2) = v' \tag{83}$$

stets positiv sind. Die Grenzfälle $u' = 0$ und $v' = 0$ identifizieren wir daher nach (4) mit den singulären Flächen $g = 0$ und $g' = 0$ des Phasenraumes. Die erstere entspricht einer Drehung des Körpers um eine der unendlich vielen J-Achsen ($\gamma = 0$), die zweite einer Drehung um die L-Achse ($\alpha = 0$ und $\beta = 0$). Zwischen diesen Extremen spielen sich alle Bewegungen ab, und zwar so, daß während jeder Bewegung γ konstant bleibt, während α und β sich nach Größe und Vorzeichen ändern. Die Fläche $u' = 0$ oder $g = 0$ trennt also den gesamten Phasenraum in zwei Hälften, die sich nur durch das Vorzeichen von γ unterscheiden. Wir beschränken nach § 4 die Betrachtung auf die positiven γ, d. h. auf solche Bewegungen, bei welchen die augenblickliche Drehungsachse des Körpers mit der positiven L-Achse einen spitzen Winkel bildet.

Nun führen wir in (59) statt α, β, γ als Integrationsvariable u', v' und einen Winkel ε ein, der definiert ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} ; \tag{84}$$

dann ergibt sich mittelst Berechnung der entsprechenden Funktionaldeterminante, indem man die Integration über ε von 0 bis 2π erstreckt:

$$(85) \qquad d\,G = 4\pi^3 \sqrt{\frac{J^2 L}{(J-L)^3}}\,\frac{d\,u'\,d\,v'}{\sqrt{u'}} = d\,g \cdot d\,g'^2 .$$

Diese Gleichung nebst den Grenzbedingungen läßt sich befriedigen, wenn wir g nur von u', g' nur von v' abhängig annehmen. Um g und g' einzeln zu bestimmen, beschränken wir nach dem in § 7 geschilderten Verfahren die Bewegungsfreiheit des Körpers und berechnen zunächst g, indem wir $g' = 0$, also $v' = 0$ als feste Bedingung einführen. Dann reduziert sich die Bewegung auf eine konstante Drehung um die L-Achse, und wir haben nach (8):

$$g = 2\pi\sqrt{2\,L\,u} .$$

Dabei ist nach (82) und (83) für $v' = 0$:

$$u = \frac{u'}{2(J-L)} ,$$

also:

$$(86) \qquad g = 2\pi\sqrt{\frac{L\,u'}{J-L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L(2\,J\,u - v)}{J-L}} .$$

Andererseits ist, wenn wir $g = 0$, also $u' = 0$, als feste Bedingung einführen, die Bewegung eine konstante Drehung um eine der J-Achsen, also wiederum nach (8):

$$g' = 2\pi\sqrt{2\,J\,u} ;$$

dabei ist nach (82) und (83) für $u' = 0$:

$$u = \frac{v'}{2(J-L)} ,$$

also:

$$(87) \qquad g' = 2\pi\sqrt{\frac{J\,v'}{J-L}} = 2\pi\sqrt{\frac{J(v - 2\,L\,u)}{J-L}} .$$

Das ist gerade der Wert, welcher aus (79) hervorgeht, wenn man darin $K = J$ setzt.

Setzt man (86) und (87) in (85) ein, so ergibt sich in der Tat:

$$d\,G = d\,g\,d\,g'^2 ,$$

und damit ist nach (1a) die Quantenteilung des Phasenraumes vollzogen.

Fragen wir z. B. nach den ausgezeichneten Bewegungen, welche den Durchschnitten je zweier Flächen $g = g_n$ und $g' = g'_{n'}$ entsprechen, so ergibt sich hierfür nach (86) und (87):

$$g_n = n\,h = 2\pi\sqrt{\frac{L\,u'}{J-L}} \quad \text{und} \quad g'_{n'} = n'h = 2\pi\sqrt{\frac{J\,v'}{J-L}} ,$$

und daraus nach (82) und (83):

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{n' h}{2\pi J}\right)^2 \quad \text{und} \quad \gamma^2 = \left(\frac{n h}{2\pi L}\right)^2, \tag{88}$$

und die Rotationsgeschwindigkeit:

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{n'^2}{J^2} + \frac{n^2}{L^2}\right), \tag{89}$$

eine Beziehung, welche bereits von Hrn. H. Rubens[1]) mitgeteilt worden ist. Für drei ungleiche Trägheitsmomente gibt es keine anderen konstanten Drehungen als die um eine der drei Hauptträgheitsachsen.

§ 16.

Zum Schluß wollen wir noch die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes *m innerhalb einer leeren Hohlkugel* mit fester elastischer Wandung behandeln, wegen ihrer Bedeutung für die Thermodynamik idealer Gase, insbesondere auch für die Entropiekonstante und die Nullpunktsenergie eines einatomigen Gases.

Die Bahn des Punktes ist zickzackförmig; sie besteht aus einer im allgemeinen unendlich großen Anzahl von gleich langen geradlinigen Strecken, den „freien Weglängen", die in einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene liegen. Da die Richtung dieser Ebene sicherlich ohne Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ist, so bringt die Beschränkung der Bewegung auf eine bestimmte Ebene und der damit verbundene Verlust eines Freiheitsgrades keine Vereinfachung in dem System der Elementargebiete des Phasenraums mit sich. Von den drei ursprünglich vorhandenen Freiheitsgraden sind also auch hier wieder zwei miteinander kohärent.

Wir erledigen daher zuerst das entsprechende ebene Problem: die kräftefreie Bewegung des Massenpunktes innerhalb eines *Kreises* mit dem Radius R. Seien r (> 0) und χ (zwischen 0 und 2π) die beiden Polarkoordinaten des Massenpunktes, und

$$\varrho = m\dot{r}, \qquad \zeta = m r^2 \dot{\chi}$$

---

1) H. Rubens u. G. Hettner, Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wiss. v. 3. Febr. 1916, p. 181; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 18. p. 166. 1916.

die dazugehörigen Impulse, so sind die Integrationskonstanten der Bewegung erstens die Energie:

$$u = \frac{1}{2m}\left(\varrho^2 + \frac{\zeta^2}{r^2}\right), \tag{90}$$

zweitens das Rotationsmoment:

$$v = \zeta \,. \tag{91}$$

Die Singularitäten des Phasenraumes werden bezeichnet durch die beiden Grenzfälle: erstens, daß der Massenpunkt der Peripherie des Kreises entlang läuft, $r_{\text{min.}} = r_{\text{max.}} = R$, d. h. $\varrho = 0$ oder nach (90) und (91): $v^2 = 2mR^2u$; zweitens, daß der Massenpunkt durch den Kreismittelpunkt geht, $r_{\text{min.}} = 0$, d. h. $v = \zeta = 0$.

Dies sind also die Grenzflächen $g = 0$ und $g' = 0$. Wir betrachten im folgenden nach § 4 nur positive v.

Für das Element des Phasenraumes erhalten wir wieder (25a), und wenn wir als Integrationsvariable u statt ϱ aus (90) einführen:

$$dG = du\,dv \cdot \iint dr \cdot d\chi \cdot \frac{m}{\varrho}\,.$$

Die Integration ist über χ von 0 bis 2π, über r von $r_{\text{min.}}$ bis R (bei konstantem u und v) auszuführen und liefert:

$$dG = \frac{2\pi}{u}\sqrt{2mR^2u - v^2}\,du\,dv\,, \tag{91a}$$

wobei berücksichtigt ist, daß jedem Wert von r, v, u zwei Werte von ϱ, also zwei Phasenpunkte, entsprechen.

Um nun dG auf die Form $dg \,.\, dg'$ zu bringen und zugleich die Grenzbedingungen für g und g' zu befriedigen, schreiben wir die letzte Gleichung in der Form:

$$dG = 2\pi \,.\, du' \,.\, dv = dg \,.\, dg'\,, \tag{92}$$

indem wir v und u' als unabhängige Variable wählen, und infolgedessen:

$$u' = 2\sqrt{2mR^2u - v^2} - 2v \arccos \frac{v}{R\sqrt{2mu}} \tag{93}$$

setzen. Dann sind auch die Grenzbedingungen erfüllt, wenn wir g proportional u' und g' proportional v annehmen, zugleich mit der Festsetzung, daß der arc zwischen 0 und $\pi/2$ liegt, und es handelt sich nur noch um die Proportionalitätskonstanten. Diese ergeben sich für jede Größe einzeln, wenn man die Bewegungsfreiheit des Systems entsprechend den Grenzfällen beschränkt.

Im ersten Fall (Bewegung im Kreise) ist g und $u' = 0$, und

$$dg' = \iint d\chi \cdot d\zeta = 2\pi \cdot dv ,$$

also

(94) $$g' = 2\pi v .$$

Im zweiten Fall (Bewegung im Radius) ist g' und $v = 0$, und

$$dg = \iint dr\, d\varrho = R\sqrt{\frac{2m}{u}} \cdot du ,$$

wobei berücksichtigt ist, daß jedem Werte von u zwei entgegengesetzte Werte der Geschwindigkeit, also auch zwei verschiedene Phasenpunkte entsprechen. Da nun in diesem Falle nach (93):

$$u' = 2R\sqrt{2mu} , \qquad du' = R\sqrt{\frac{2m}{u}} \cdot du ,$$

so folgt:

(95) $$dg = du', \qquad g = u' ,$$

und mit diesen Werten von g und g' ist die Beziehung (92) in der Tat allgemein erfüllt.

Wir haben also für die Quantenteilung des Phasenraumes:

(96) $$g_n = u'_n = nh \quad \text{und} \quad g'_{n'} = 2\pi v_{n'} = n'h .$$

Um uns diese Beziehungen zu versinnlichen, bedenken wir, daß der in (93) vorkommende arc, den wir gleich α setzen wollen, nichts anderes ist als der halbe Öffnungswinkel des von der freien Weglänge des Massenpunktes abgegrenzten Kreissektors. Für die Kreisbewegung wird $\alpha = 0$, für die Radialbewegung wird

$$\alpha = \frac{\pi}{2} .$$

Die durch die Quantenstruktur des Phasenraumes bedingten ausgezeichneten Bewegungen gewinnt man, indem man für irgend ein Wertenpaar der ganzen Zahlen n und n' die entsprechende freie Weglänge $2R\sin\alpha$ und die dazugehörige Geschwindigkeit q berechnet. Bedenkt man, daß

(97) $$u = \frac{m}{2} q^2 \quad \text{und} \quad v = mqR\cos\alpha ,$$

so ergibt sich aus (93) und (96) die merkwürdige Gleichung:

(98) $$\operatorname{tg}\alpha - \alpha = \frac{n}{n'} \cdot \pi .$$

Daraus der Wert von a, eindeutig und unabhängig vom Wirkungsquantum h, und dann:

$$q = \frac{n' h}{2 \pi m R \cos a} . \tag{99}$$

Die Einzelheiten sind unmittelbar den Gleichungen zu entnehmen. Nun ist es leicht, auch das räumliche Problem zu erledigen: die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes in einer *Hohlkugel* vom Radius R. Wir brauchen zu diesem Zweck nur genau ebenso zu verfahren, wie oben in § 13, nur mit Weglassung der potentiellen Energie $f(r)$, und erhalten dann auch wieder, wie in (54):

$$d G = d g \,.\, d g'^{2} .,$$

wobei nun g und g' durch (94) und (95) gegeben sind. Damit ist auch für die räumliche Bewegung mit drei Freiheitsgraden die Quantenteilung des Phasenraumes vollzogen.

Die Anwendung der hier erhaltenen Resultate auf die Thermodynamik idealer Gase würde den Rahmen dieses Aufsatzes überschreiten, da sie vollständig allgemein nicht durchgeführt werden kann ohne die Aufstellung einer besonderen Hypothese über das Gesetz, nach welchem die Phasenpunkte einer großen Anzahl von gleichartigen, gegenseitig unabhängigen, Systemen innerhalb eines einzelnen Elementargebietes des Phasenraumes angeordnet sind, insbesondere über die sich neuerdings immer schärfer zuspitzende Grundfrage, ob die Phasenpunkte auch das Innere des Elementargebietes erfüllen können oder ob sie stets nur an dessen Grenzen angehäuft sind. Denn je nach der Beantwortung dieser Frage kann der Ausdruck für die Entropie und für die Nullpunktsenergie, falls sie existiert, verschieden ausfallen. Es lag mir aber daran, den Inhalt dieses Aufsatzes, die Untersuchung der physikalischen Struktur des Phasenraumes, von einer derartigen Hypothese ganz unabhängig zu halten.

Es mag sein, und ich halte es für sehr wahrscheinlich, daß die hier dargelegte Theorie in der Form noch manche Verbesserung erfahren wird, aber ihre Grundlagen halte ich für dauerhaft und tragfähig.

Über weitergehende Folgerungen hoffe ich in nächster Zeit einiges berichten zu können.

(**Eingegangen 13. April 1916.**)