

## 5. *Zerstreung von Röntgenstrahlen;* *von P. Debye.*

Die neuere Entwicklung unserer Ansichten über den inneren Aufbau der Atome hat uns gezwungen, Elektronenbewegungen als möglich anzuerkennen, die trotz sehr großer Beschleunigungen keine Energie ausstrahlen. So müssen wir z. B. im Innern eines Wasserstoffmoleküls zwei Elektronen annehmen, welche stets einander gegenüberliegend in einem Kreise von  $1,05 \cdot 10^{-8}$  cm Durchmesser mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 4,21 \cdot 10^{16}$  1/sec umlaufen.<sup>1)</sup> Würde man das von dieser Bewegung erzeugte Feld auf Grund der Maxwell-Lorentz'schen Gleichungen der Elektrodynamik berechnen, dann ergibt sich für die in einer Sekunde ausgestrahlte Energie der „enorm große“ Wert  $4,9 \cdot 10^{-3}$  erg/sec. Dem steht nämlich gegenüber, daß die kinetische Energie der beiden Elektronen sich nur auf  $4,1 \cdot 10^{-11}$  erg beläuft, so daß man auf Grund sonst anerkannter Prinzipien zu dem Schlusse käme, daß sich ein Wasserstoffmolekül in etwa  $10^{-8}$  sec durch seine eigene Strahlung zerstören müßte.<sup>2)</sup> Wir müssen also notgedrungen die Bewegung in der durch die *h*-Hypothese bestimmten Bahn in schroffem Widerspruch mit sonst anerkannten Prinzipien als strahlungslos ansehen.

Andererseits gelingt es, die gewöhnliche Dispersion auf Grund des obigen Modells vollständig zu beherrschen, ohne daß es nötig wird, die bekannten Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik zu verlassen. Schon hieraus folgt, daß Störungen der von der *h*-Hypothese geforderten Bahn sich in jeder Beziehung wieder vollständig regulär verhalten. Noch klarer tritt diese Tatsache hervor, wenn man die von einer auffallenden Welle zerstreute Energie selbst zum Gegenstand der Messung macht. So konnte bekanntlich J. J. Thomson

1) Die Konstitution des Wasserstoffmoleküls. Sitzber. d. Kgl. B. Akademie d. Wiss. Sitzung vom 9. Jan. 1915.

2) Diese Zeitdauer erscheint weniger auffallend, wenn man bedenkt, daß in  $10^{-8}$  sec immerhin  $7 \cdot 10^{-7}$  Umläufe stattfinden.

zeigen, daß die von einem Atom zerstreute Röntgenstrahlung nach den Gesetzen der Elektrodynamik berechnet werden konnte, und so eine Methode erhalten, um die Zahl der Elektronen pro Atom experimentell zu bestimmen.

Bei der Thomsonschen Rechnung wurde einfach die von einem Elektron zerstreute Energie ausgewertet und der Gesamteffekt erhalten durch Multiplikation mit der überhaupt vorhandenen Anzahl Elektronen. Solange man noch nichts Näheres und Zuverlässiges über die Anordnung der Elektronen im Atom wußte, war man gezwungen, sich mit diesem Verfahren zu begnügen. Inzwischen ist es aber immer klarer geworden, daß die Anordnung der Elektronen im Atom Regelmäßigkeiten zeigt, wie z. B. beim Wasserstoff, wo zwei Elektronen sich stets im konstanten Abstände von  $1,05 \cdot 10^{-8}$  cm befinden. Andererseits ist die Wellenlänge der Röntgenstrahlen, mit denen solche Zerstreuungsversuche gemacht werden, ebenfalls von der Größenordnung  $10^{-8}$  cm. Wenn also Atommodelle mit Elektronenringen zu denen der Wasserstoff als spezieller Fall gehört, überhaupt der Wirklichkeit entsprechen, dann wird man erwarten müssen, daß die Atome selber bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen eventuell Interferenzen zeigen müssen, die auch dann nicht verwischt werden können, wenn die Atome selbst ganz regellos im Raume orientiert sind.

Gerade diese Erscheinung ist aber schon bekannt. Sowohl die schon vielfach hervorgehobene, scheinbar unverständliche unsymmetrische Verteilung der zerstreuten Strahlung<sup>1)</sup>, wie auch letzten Endes die Friedrichschen Interferenzen<sup>2)</sup> sind offenbar in diesem Sinne zu deuten.

Um einen Überblick über das ganze Erscheinungsgebiet zu gewinnen, habe ich im folgenden die zerstreute Energie und ihre räumliche Verteilung berechnet für eine regellos orientierte Ansammlung von Atomen, in denen je ein Elektronenring mit einer beliebigen Zahl von Elektronen vorkommt. Die Rechnung wurde vollständig auf Grund der bisher anerkannten Prinzipien ausgeführt. Sie zeigt, wie die gesamte zerstreute Strahlung bei langen Wellen proportional dem Quadrate der Elektronenzahl ist und die Raumverteilung

---

1) Literatur bei R. Pohl, Physik der Röntgenstrahlen. p 58 u. f. Viehweg 1912.

2) Physik. Zeitschr. 14. p. 317. 1913.

aufweist, welche einem Dipol entsprechen würde. Mit abnehmender Wellenlänge nähert sich die Gesamtstrahlung immer mehr einem Werte, der nur der ersten Potenz der Elektronenzahl proportional ist, ebenfalls aber der zum Dipol gehörigen Raumverteilung entspricht, bis auf die nähere Umgebung der Einfallsrichtung der primären Strahlung. In dieser Richtung selbst bleibt die Strahlung auf alle Fälle proportional dem Quadrate der Elektronenzahl, und zeigt in der weiteren Umgebung dieser Richtung Interferenzen, die als Ringe zu photographieren sind.

Gibt man die Wahrscheinlichkeit der folgenden Überlegungen zu, dann scheint mir der experimentellen Untersuchung der zerstreuten Strahlung, insbesondere bei leichten Atomen, ein erhöhtes Interesse zuzukommen, denn auf diesem Wege muß es dann gelingen, die besondere Anordnung der Elektronen im Atom experimentell festzustellen. Eine solche Untersuchung hat also die Bedeutung einer Ultramikroskopie des Atominnern.

#### § 1. Die von einem Haufen freier Elektronen zerstreute Energie.

Der Elektronenhaufen bestehe aus  $p$ -Individuen, die ohne äußere Störung in konstanten gegenseitigen Abständen verharren können, infolge der statischen und kinetischen Kräfte, welche im Innern des Modells wirksam sind.

Die Bewegungsgeschwindigkeiten innerhalb des Systems mögen so klein sein, daß die Lagenänderung irgendeines der Teilchen während der Zeit einer Schwingung der auffallenden Welle klein ist gegenüber der zugehörigen Wellenlänge. Außerdem sei die Frequenz jener Welle groß gegenüber der Eigenfrequenz einer Störung des Systems. Diese beiden Voraussetzungen sind wesentlich dafür, daß die folgende Rechnung so einfach angesetzt und durchgeführt werden kann, wie das im folgenden geschieht. Im übrigen sind sie bei den in der Praxis üblichen Röntgenstrahlen und bei den leichteren Atomen ohne weiteres erfüllt.

Mit Rücksicht auf jene Voraussetzungen können wir nun mit verschwindendem Fehler:

a) absehen von den Kräften, welche zwischen den Elektronen und zwischen Elektronen und Kernen wirksam sind, d. h. wir dürfen die Elektronen als vollständig frei betrachten.

Außerdem können wir

b) die Bewegung des Elektronenhaufens außer acht lassen und ihn als im Raume ruhend betrachten, sofern noch keine Störung durch die auffallende Welle stattfindet.

Die auffallende Röntgenstrahlung sei vorläufig als polarisierte ebene Welle von der Frequenz  $\omega$  angenommen und pflanze sich fort in Richtung der positiven  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinationssystems, in dem (durch Angabe der Einzelkoordinaten) die Ruhelage der  $p$  Elektronen bestimmt werden soll. Die elektrische Kraft jener Welle habe nur in der  $z$ -Richtung eine Komponente von der Amplitude  $E$ , dann gilt für die Komponenten der elektrischen Kraft der Welle der bekannte Ansatz:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = 0, \\ \mathfrak{E}_y = 0, \\ \mathfrak{E}_z = E e^{i\omega t} e^{-ikx} \end{cases} \quad \begin{aligned} k &= \frac{\omega}{c} \\ (c &= \text{Lichtgeschwindigkeit}). \end{aligned}$$

Eines der Elektronen mit dem Index  $n$  habe nun vor der Störung die Koordinaten  $x_n, y_n, z_n$ ; infolge der Einwirkung der auffallenden Welle werden diese Koordinaten sich nun um die Zeitfunktionen  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n$  ändern. Nach dem Obigen ist klar, daß  $\xi_n$ , sowie  $\eta_n$  Null sind, während  $\zeta_n$  sich aus der gewöhnlichen mechanischen Bewegungsgleichung

$$\mu \frac{d^2 \zeta_n}{dt^2} = -e E e^{-ikx_n} e^{i\omega t}$$

bestimmt zu

$$(2) \quad \zeta_n = \frac{e}{\mu \omega^2} E e^{-ikx_n} e^{i\omega t},$$

wobei  $-e$  und  $\mu$  Ladung bzw. Masse eines Elektrons bedeuten.

Die in diesem Paragraphen zu beantwortende Frage kann demnach folgendermaßen formuliert werden. Gegeben ein Elektronenhaufen von  $p$  Elektronen. Jedes der Elektronen führt um seine Ruhelage mit den Koordinaten  $x_n, y_n, z_n$  Schwingungen aus, charakterisiert durch die Verschiebungen

$$\begin{cases} \xi_n = 0, \\ \eta_n = 0, \\ \zeta_n = \frac{e}{\mu \omega^2} E e^{-ikx_n} e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Wie groß ist die Intensität der Welle, welche man in großem Abstände  $R$  von dem System beobachten kann, in einer beliebig gewählten Richtung mit den Richtungsos.  $\alpha, \beta, \gamma$ ?

Diese Frage deckt sich für das Einzelelektron mit der vielfach in der Literatur (zum ersten Male wohl von H. Hertz) behandelten Frage nach der Strahlung eines schwingenden Dipols. Die auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen erhaltene Antwort lautet:

Definiere den Vektor  $\mathfrak{A}$  durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_x &= 0, \\ \mathfrak{A}_y &= 0, \\ \mathfrak{A}_z &= -\varepsilon \zeta_n \frac{e^{-ikr}}{r},\end{aligned}$$

wobei  $r$  der Abstand von der Ruhelage des  $n^{\text{ten}}$  Elektrons bis zum Aufpunkt bedeutet. Dann sind elektrische und magnetische Feldstärke der zerstreuten Welle aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= -k^2 \mathfrak{A} - \text{grad div } \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{H} &= -ik \text{rot } \mathfrak{A},\end{aligned}$$

zu berechnen.

Ist  $r$  so groß, daß  $kr \gg 1$  ist, dann ergibt diese Vorschrift z. B. für die drei Komponenten der elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}$  der zerstreuten Welle in bekannter Weise das Resultat:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= -\alpha \gamma k^2 \varepsilon \zeta_n \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \mathfrak{E}_y &= -\beta \gamma k^2 \varepsilon \zeta_n \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \mathfrak{E}_z &= (1-\gamma^2) k^2 \varepsilon \zeta_n \frac{e^{-ikr}}{r}.\end{aligned}$$

Schließlich kann man noch mit Rücksicht darauf, daß die Beobachtung in sehr großem Abstände geschieht, an Stelle von  $kr$  den Ausdruck

$$kr = kR - k(\alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n)$$

substituieren, wobei  $R$  der Abstand zwischen Aufpunkt und Nullpunkt des Koordinatensystems bedeutet. Für das  $n^{\text{te}}$  Elektron hat man also unter Hinzuziehung von (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\alpha \gamma \frac{\varepsilon^2}{\mu c^2} \frac{E}{R} e^{i(\omega t - kR)} e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]}, \\ \mathfrak{E}_y = -\beta \gamma \frac{\varepsilon^2}{\mu c^2} \frac{E}{R} e^{i(\omega t - kR)} e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]}, \\ \mathfrak{E}_z = (1-\gamma^2) \frac{\varepsilon^2}{\mu c^2} \frac{E}{R} e^{i(\omega t - kR)} e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]}, \end{cases}$$

während die zerstreute Welle von dem ganzen System zusammengenommen in großem Abstände charakterisiert wird durch die Feldstärken:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\alpha \gamma \frac{s^2}{\mu c^2} E \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} \sum_1^p e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]}, \\ \mathfrak{E}_y = -\beta \gamma \frac{s^2}{\mu c^2} E \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} \sum_1^p e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]}, \\ \mathfrak{E}_z = (1-\gamma^2) \frac{s^2}{\mu c^2} E \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} \sum_1^p e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]}, \end{cases}$$

wobei die Summen von 1 bis  $p$ , d. h. über alle Elektronen des Systems zu erstrecken sind.

Für den Energietransport, d. h. für die Intensität ist das Quadrat der elektrischen Amplitude maßgebend, welches sich als Summe der Quadrate der absoluten Beträge von  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$  und  $\mathfrak{E}_z$  berechnen läßt; in Formel

$$|\mathfrak{E}|^2 = |\mathfrak{E}_x|^2 + |\mathfrak{E}_y|^2 + |\mathfrak{E}_z|^2.$$

Setzt man nach (4) die absoluten Beträge der Komponenten ein, dann erhält man zunächst

$$|\mathfrak{E}|^2 = \frac{s^4 E^2}{\mu^2 c^4 R^2} \{ \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2 + (1-\gamma^2)^2 \} \left| \sum_1^p e^{ik[(\alpha-1)x_n + \beta y_n + \gamma z_n]} \right|^2.$$

Dafür kann aber mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

und unter Umformung des Quadrates der Summe in eine Doppelsumme auch geschrieben werden:

$$(5) \quad |\mathfrak{E}|^2 = \frac{s^4 E^2}{\mu^2 c^4 R^2} (1-\gamma^2) \sum_1^p \sum_1^p e^{ik[(\alpha-1)(x_n - x_m) + \beta(y_n - y_m) + \gamma(z_n - z_m)]}.$$

Der Ausdruck (5) bezieht sich, wie am Anfang des Paragraphen hervorgehoben wurde, auf den Fall, daß die einfallende Welle senkrecht zur  $z$ -Achse polarisiert ist. Hätten wir eine Polarisation senkrecht zur  $y$ -Achse angenommen, dann wäre einfach an Stelle des Faktors  $(1-\gamma^2)$  der Faktor  $(1-\beta^2)$  aufgetreten. Für den wirklich vorkommenden Fall, daß die einfallende Welle unpolarisiert ist, erhält man, wie man sich leicht überzeugt, für  $|\mathfrak{E}|^2$  den Mittelwert jener beiden Resultate. Da nun

$$\frac{(1 - \gamma^2) + (1 - \beta^2)}{2} = \frac{1 + \alpha^2}{2}$$

ist, bekommt man für eine unpolarisierte einfallende Welle das Resultat

$$(6) |\mathcal{E}|^2 = \frac{\epsilon^4}{\mu^2 c^4} \frac{E^2}{R^2} \frac{1 + \alpha^2}{2} \sum \sum e^{ik[(\alpha-1)(x_n - x_m) + \beta(y_n - y_m) + \gamma(z_n - z_m)]}.$$

Bedenkt man nun, daß  $E^2$  das Quadrat der Amplitude der einfallenden Welle ist, dann kann das Schlußresultat folgendermaßen ausgesprochen werden.

Fällt auf das betrachtete Elektronensystem eine unpolarisierte Welle, dann kann das Verhältnis  $v$  der in großem Abstände  $R$  mit den Richtungscos.  $\alpha, \beta, \gamma$  beobachtbaren Intensität zur auffallenden Intensität aus der Formel

$$(7) v = \frac{\epsilon^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \alpha^2}{2} \frac{1}{R^2} \sum \sum e^{ik[(\alpha-1)(x_n - x_m) + \beta(y_n - y_m) + \gamma(z_n - z_m)]}$$

berechnet werden.

## § 2. Zerstreuung durch sehr viele Moleküle mit Elektronenringen.

Hat man einen amorphen Körper, dann werden in demselben alle Orientierungen der Atome (Moleküle) gleich wahrscheinlich sein. Bestrahlt man in demselben ein Stück, das im ganzen  $N$  Atome enthält, dann wird man also die in einer beliebigen Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  beobachtbare Intensität bekommen, indem man für ein Atom erst den Mittelwert der von demselben zerstreuten Intensität bestimmt, mit Rücksicht auf alle möglichen Orientierungen gebildet und dann nachträglich mit  $N$  multipliziert.

Es soll nun zunächst ohne genauere Angabe der Anordnung das in (7) zugrunde gelegte System ein Atom bilden, dann haben wir (7) zu mitteln über alle möglichen Orientierungen des Elektronenhaufens, denn mit dem Verhältnis  $v$  können wir gleich gut rechnen wie mit der Intensität selbst.

Am einfachsten geschieht diese Mittelung, indem man zunächst ein Einzelglied der Doppelsumme betrachtet und dann mit Rücksicht auf den Bau des Exponenten der Exponentialfunktion vorübergehend zwei Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  einführt, so daß  $\mathfrak{A}$  die rechtwinkeligen Komponenten  $(\alpha - 1), \beta, \gamma$  und  $\mathfrak{B}$  die Komponenten  $(x_n - x_m), (y_n - y_m), (z_n - z_m)$  hat. Der Exponent ist dann das skalare Produkt  $(\mathfrak{A} \mathfrak{B})$  dieser beiden Vektoren. Orientiert man nun das Atom nach allen möglichen Richtungen, dann wird jeder mit dem Atom fest-

verbundene Pfeil alle Richtungen im Raume gleich oft annehmen. Als solch einen Pfeil kann man nun z. B. den Vektor  $\mathfrak{B}$  nehmen. Der Vektor  $\mathfrak{A}$  dagegen, der durch Einfall- und Beobachtungsrichtung charakterisiert ist, bleibt fest in Richtung und Größe. Schreibt man nun

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = A B \cos \Theta,$$

indem man die Längen  $A$  und  $B$  der Vektoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und den Winkel  $\Theta$  zwischen beiden einführt, dann läuft die Mitteilung darauf hinaus, daß man den Ausdruck

$$e^{i k A B \cos \Theta}$$

mit dem Element  $d\Omega$  des räumlichen Winkels multipliziert, über alle Lagen von  $d\Omega$  summiert und schließlich durch  $4\pi$  dividiert. Diese Rechnung liefert das Resultat

$$(8) \quad \frac{1}{4\pi} \int d\Omega e^{i k A B \cos \Theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{i k A B \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta = \frac{\sin(k A B)}{k A B}.$$

Nun ist

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(1 - \alpha) = 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

wenn man den Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und Einfallrichtung  $\vartheta$  nennt, so daß  $\alpha = \cos \vartheta$  wird. Für  $A$  folgt also

$$(9) \quad A = 2 \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Andererseits ist  $B$  nach Definition die Länge der Verbindungslinie von dem  $n^{\text{ten}}$  mit dem  $m^{\text{ten}}$  Elektron. Nennen wir dieselbe  $s_{nm}$ , dann geht also nach Ausführung der oben besprochenen Mittelung der Ausdruck (7) über in

$$(10) \quad \bar{v} = \frac{\epsilon^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \frac{1}{R^2} \sum_n \sum_m \frac{\sin \left[ 2 k s_{nm} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}{\left[ 2 k s_{nm} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}.$$

In einer Richtung, welche mit der Einfallrichtung der primären Strahlen einen Winkel  $\vartheta$  bildet, beobachtet man also im Abstände  $R$  vom Körper den Bruchteil

$$(11) \quad \mathcal{V} = \frac{N \epsilon^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \frac{1}{R^2} \sum_n \sum_m \frac{\sin \left[ 2 k s_{nm} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}{\left[ 2 k s_{nm} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}$$



der auffallenden Intensität, wenn im ganzen  $N$  Atome (Moleküle) bestrahlt werden.

Gleichung (11) zeigt schon, wie trotz der Regellosigkeit der Orientierung der Atome dennoch Interferenzen zu erwarten sind infolge der Regelmäßigkeit der Elektronenanordnung im Innern der Atome.

Will man von (11) aus weiter kommen, dann muß man über die Anordnung der Elektronen im Innern des Atoms (Moleküls) Annahmen machen. Hier soll die Rechnung weiterhin durchgeführt werden für den Fall, daß die  $p$ -Elektronen in gleichen Abständen auf einem Ringe vom Radius  $a$  verteilt sind. Für das Wasserstoffmolekül können wir wohl mit Sicherheit behaupten, daß jenes Bild mit  $p=2$  richtig ist; auch bei schwererem Atom und Molekül kann aber eine entsprechende Anordnung mit größeren Werten von  $p$  ebenfalls als sehr wahrscheinlich betrachtet werden. Eben deshalb wird die obige spezielle Annahme gemacht.

Denkt man sich nunmehr vom Mittelpunkt des Ringes aus nach jedem der Elektronen einen Radius gezogen, dann ist der Winkel zwischen dem  $n^{\text{ten}}$  und dem  $m^{\text{ten}}$  Radius gleich

$$(n - m) \frac{2\pi}{p};$$

der Abstand zwischen dem  $n^{\text{ten}}$  und dem  $m^{\text{ten}}$  Elektron wird demnach

$$s_{nm} = 2a \sin \left| n - m \right| \frac{\pi}{p},$$

wenn  $|n - m|$  der absolute Betrag der Differenz  $n - m$  bedeutet.

Setzt man nun diesen Wert für  $s_{nm}$  in die Doppelsumme der Gleichung (11) ein, dann wird dieselbe

$$\sum_n \sum_m \frac{\sin \left[ 4ka \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \left| n - m \right| \frac{\pi}{p} \right]}{\left[ 4ka \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \left| n - m \right| \frac{\pi}{p} \right]},$$

aber dafür läßt sich, wie leicht ersichtlich, auch die einfache Summe

$$p \sum_{n=0}^{n=p-1} \frac{\sin \left[ 4ka \sin \frac{n\pi}{p} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}{\left[ 4ka \sin \frac{n\pi}{p} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}$$

substituieren, so daß man schließlich für das gesuchte Intensitätsverhältnis  $V$  die Darstellung

$$(12) \quad V = \frac{Np}{R^2} \frac{s^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\sin \left[ 4ka \sin \frac{n\pi}{p} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}{\sin \left[ 4ka \sin \frac{n\pi}{p} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]}$$

erhält, an der die folgende Diskussion anzuknüpfen hat.

### §3. Diskussion der räumlichen Intensitätsverteilung der zerstreuten Strahlung. Zusammenhang mit den Friedrichschen Interferenzen.

Nach (12) ist die Intensitätsverteilung eine Funktion des Winkels zwischen Beobachtungs- und Einfallrichtung, die, je nach der auffallenden Wellenlänge, sehr verschieden ausfällt. Betrachten wir zunächst zwei Grenzfälle.

Nennen wir  $\lambda$  die Wellenlänge der auffallenden und zerstreuten Strahlung, dann ist nach Definition

$$ka = 2\pi \frac{a}{\lambda}.$$

a) Ist nun erstens  $\lambda$  groß im Vergleich zu dem Radius des Elektronenringes, der beiläufig bei  $H_2$  gleich  $0,72 \cdot 10^{-8}$  cm ist, dann ist  $ka \ll 1$  und die Einzelglieder der Summe in (12) werden alle gleich 1 in derselben Weise, wie  $\sin x/x$  sich dem Werte 1 nähert, für  $x=0$ . Die ganze Summe wird also einfach gleich  $p$  und damit

$$(13) \quad V = \frac{N}{R^2} \frac{s^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} p^2.$$

Die in irgendeiner Richtung zerstreute Energie verhält sich also genau so, als ob sie von einem einzigen Dipol ausgestrahlt wäre, in ihrer Abhängigkeit von der Beobachtungsrichtung, d. h. u. a. die senkrecht zur Einfallrichtung zerstreute Intensität ist nur halb so groß wie die in oder entgegengesetzt der Beobachtungsrichtung zerstreute, wenigstens so lange die primäre Strahlung unpolarisiert auffällt. Das ist einfach die bekannte Tatsache, daß ein Elektron in der Beschleunigungsrichtung nicht strahlt. Außerdem ist die Streuung proportional  $p^2$ , d. h. proportional dem Quadrate der im Atom (Molekül) vorhandenen Elektronenzahl.

b) Ist umgekehrt  $ka \gg 1$ , d. h.  $\lambda \ll a$ , dann haben die Einzelglieder der Summe von  $n=1$  bis  $n=p-1$  nur

innerhalb eines kleinen Winkelbereiches in der Umgebung von  $\vartheta=0$  einen in Betracht kommenden Wert. Die Diskussion dieses besonders interessanten Gebietes folgt nachher. Ist  $\vartheta$  genügend groß, dann verschwinden alle Glieder der Reihe von  $n=1$  bis  $n=p-1$  infolge des stetig weiter wachsenden Nenners. Nur das erste Glied der Reihe für  $n=0$  ist dauernd gleich 1. Die Summe ist also in einem erheblichen Teil des  $\vartheta$ -Intervalls gleich 1, so daß dort

$$(13') \quad V = \frac{N}{R^2} \frac{s^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{p} p$$

wird, ein Ausdruck, der sich von dem im früheren Grenzfall erhaltenen nur dadurch unterscheidet, daß an Stelle von  $p^2$  nunmehr  $p$  getreten ist. Jetzt ist also die Streuung *der ersten Potenz* der Elektronenzahl proportional. Betrachtet man die Gesamtstrahlung, die von den  $N$ - bestrahlten Atomen ausgeht, dann ist dieselbe im ersten Falle ( $\lambda \gg a$ )

$$\int V R^2 d\Omega = \frac{8\pi}{3} \frac{N s^4}{\mu^2 c^4} p^2$$

und im zweiten Falle  $\lambda \ll a$ )

$$\int V R^2 d\Omega = \frac{8\pi}{3} \frac{N s^4}{\mu^2 c^4} p.$$

Letztere Formel wurde von J. J. Thomson benutzt, um aus Beobachtungen über die zerstreute Strahlung die Anzahl  $p$  der Elektronen zu bestimmen. Mit ihrer Hilfe kam man bekanntlich zum Resultat, daß die Zahl der Elektronen im Atom ungefähr dem halben Atomgewicht gleichkommt. Man sieht, wie es bei dieser Bestimmung wesentlich auf die Wahl der Wellenlänge der Primärstrahlung ankommt, je nach Umständen kann man  $p$  oder  $p^2$  messen, was übrigens auch leicht ohne viel Rechnung verständlich ist.

Man könnte natürlich durch Integration der allgemeinen Formel (12) die Formel für die Gesamtstrahlung ableiten, welche die obigen beiden Grenzfälle ineinander überführt. Ich verzichte darauf, weil man bei der praktischen Ausführung kaum die Gesamtstrahlung auf einmal wirklich messen wird.

Dagegen soll nun der wirkliche Verlauf der Intensität als Funktion von  $\vartheta$  und  $\lambda$  durch eine Figur erläutert werden. Zu diesem Zwecke entwerfen wir zunächst eine Hilfsfigur. Wir setzen abkürzend

$$(14) \quad \rho = 4 k a \sin \frac{\vartheta}{2}$$

und tragen in der Hilfsfigur den  $p^{\text{ten}}$  Teil der Summe als Funktion  $\Phi$  von  $\rho$  auf. Wir setzen also

$$(15) \quad \Phi_p(\rho) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{n=p-1} \frac{\sin \left[ \rho \sin \frac{n \pi}{p} \right]}{\left[ \rho \sin \frac{n \pi}{p} \right]}.$$

Für Wasserstoff hätte man z. B. als maßgebende Größe

$$\Phi_2(\rho) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin \rho}{\rho} \right\},$$

für ein Atom mit 3 Elektronen in einem Ringe (Li?) hätte man

$$\Phi_3(\rho) = \frac{1}{3} \left\{ 1 + 2 \frac{\sin \frac{\rho}{2} \sqrt{3}}{\frac{\rho}{2} \sqrt{3}} \right\}$$

usw. für mehr Elektronen. Diese verschiedenen Funktionen  $\Phi_2(\rho)$ ,  $\Phi_3(\rho)$ , . . . . finden sich in Fig. 1.

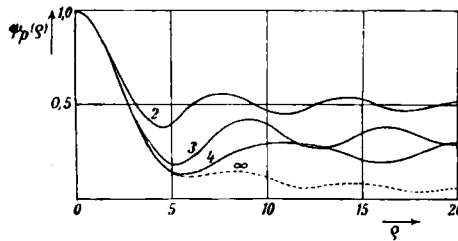


Fig. 1.

Sie fangen alle bei  $\rho=0$  mit dem Werte 1 an und nähern sich unter Aufweisung von rasch abnehmenden Pendelungen dem Werte  $1/p$  für  $\rho=\infty$ .

Als letzte gestrichelte Kurve ist in Fig. 1 die Grenzfunktion  $\Phi_\infty(\rho)$  aufgetragen, sie läßt sich mittels Besselscher Funktionen darstellen und mit Hilfe der Tabellen in Jahnke-Emde leicht berechnen.<sup>1)</sup>

1) Ist nämlich  $p \gg 1$ , dann ist  $\pi/p$  eine kleine Zahl. Setzt man nun nach (15)

$$\Phi_p(\rho) = \frac{1}{\pi} \sum_0^{p-1} \frac{\sin \left[ \rho \sin \frac{n \pi}{p} \right]}{\left[ \rho \sin \frac{n \pi}{p} \right]} \pi,$$

Hat man einmal die Fig. 1 zur Verfügung, dann ist es ein leichtes, sich nunmehr ein Bild zu machen von der Art, wie die Zerstreuung der Intensität auf die verschiedenen Winkelrichtungen  $\vartheta$  sich mit abnehmender Wellenlänge der Primärstrahlung ändert.

Für (12) kann man mit der Abkürzung (15) schreiben:

$$(16) \quad V = \frac{N}{R^2} \frac{s^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} p^2 \Phi_p \left( 4 k a \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Ist die Wellenlänge gegeben und sieht man den Radius der Elektronenbahn als bekannt an, dann ist  $4ka = 8\pi a/\lambda$  bekannt, man kann für jeden Wert von  $\vartheta$  die Größe

$$\varrho = 4 k a \sin \frac{\vartheta}{2}$$

bestimmen und den zugehörigen Wert von  $\Phi_p(\varrho)$  aus Fig. 1

dann kann im Lim.  $p = \infty$  die Größe  $n\pi/p$  als stetige Variable  $u$  angesehen und für  $\pi/p$  das Differential  $du$  substituiert werden. So erhält man

$$\Phi_\infty(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin[\varrho \sin u]}{[\varrho \sin u]} du.$$

Nun ist aber andererseits

$$\frac{\sin[\varrho \sin u]}{\sin u} = \int_0^\varrho \cos[\varrho \sin u] d\varrho,$$

so daß man auch setzen kann

$$\Phi_\infty(\varrho) = \frac{1}{\pi \varrho} \int_0^\varrho d\varrho \int_0^\pi \cos[\varrho \sin u] du,$$

oder nach der bekannten Definitionsformel für die Besselsche Funktion nullter Ordnung  $J_0(\varrho)$ :

$$\Phi_\infty(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho J_0(\varrho) d\varrho.$$

Schließlich kann das letztgenannte Integral in eine Reihe von Besselschen Funktionen entwickelt werden, die dann für die numerische Rechnung ohne weiteres geeignet ist. Die Endformel lautet:

$$\Phi_\infty(\varrho) = \frac{2}{\varrho} \sum_{n=0}^{n=\infty} J_{2n+1}(\varrho)$$

und kann mittels der Tabellen in Jahnke-Emde, S. 149f., bequem berechnet werden.

entnehmen. Somit kann man nach (16) auch  $V$  sofort berechnen.

In Fig. 2 ist der Intensitätsverlauf als Funktion von  $\vartheta$  für Wasserstoff entworfen unter Annahme der Werte

I:  $4ka=0$ ; II:  $4ka=2,5$ ; III:  $4ka=10$ ; IV:  $4ka=40$ .

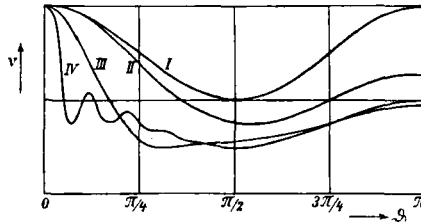


Fig. 2.

Zunächst ist für  $4ka=0$  die zerstreute Intensität proportional  $1 + \cos^2 \vartheta / 2$ , wird dann mit abnehmender Wellenlänge bei  $\vartheta=\pi$  immer weiter auf die Hälfte des Wertes für  $\lambda=\infty$  zurückgedrängt, und zeigt schon bei verhältnismäßig großen Werten von  $\lambda$  ganz wesentliche Abweichungen von der Strahlung eines Dipols. Diese Unsymmetrie der Zerstreuung, deren Existenz in der Einleitung hervorgehoben wurde, bildet also das erste Anzeichen einer im Atom vorhandenen Interferenz. Schließlich nähert sich bei noch kleinerem  $\lambda$  die Strahlung wieder dem regulären Verlauf, allerdings nur mit halber Amplitude. In der Umgebung der Einfallrichtung aber zeigen sich bei genügend kleinen Werten von  $\lambda$  ausgesprochene Interferenzen, die sich bei einer photographischen Aufnahme als Ringe von rasch abnehmender Intensität zeigen müssen. Hier liegt es nun nahe, diese Ringe mit den bekannten Beobachtungen von W. Friedrich in Zusammenhang zu bringen und die betreffenden Photographien als augenfälligste Demonstration der regelmäßigen (Ring-) Anordnung der Elektronen im Innern der Atome zu betrachten. Tatsächlich wird nicht allein die von Friedrich hervorgehobene Empfindlichkeit der Erscheinung auf Härteänderungen der Röhre durch Fig. 2 schon demonstriert. Auch zahlenmäßig wird es verständlich, wie es kommen konnte, daß Wachs und Paraffin z. B. Ringe erzeugten, während bei Kohlenstoff nur eine gleichmäßig verlaufende Schwärzung entstand. Diejenigen Körper, welche Ringe er-

zeugten, enthalten nämlich viel chemisch gebundenen Wasserstoff, von dem nunmehr bekannt ist, daß die Elektronenbahn einen verhältnismäßig großen Radius hat. Würde man den gebundenen Wasserstoff so behandeln dürfen wie das freie Wasserstoffmolekül, dann wäre  $2a = 1,05 \cdot 10^{-8}$  zu setzen und der erste Ring wäre (unter Zugrundelegung von Fig. 1) zu erwarten in einem Winkelabstand  $\vartheta = 26^\circ$ , wenn die Wellenlänge der auffallenden Strahlung zu  $0,40 \cdot 10^{-8}$  cm angenommen wird. Nimmt man andererseits im Innern des C-Atoms einen Ring von 6 Elektronen an, die um einen Kern von der Ladung  $6e$  jedes mit dem Impulsmoment  $h/2\pi$  kreisen, dann berechnet sich  $2a$  zu  $2,5 \cdot 10^{-9}$  cm. Der erste Ring würde dann für dieselbe Wellenlänge wie oben ( $0,40 \cdot 10^{-8}$  cm) erst auftreten in einem Winkelabstand  $\vartheta = 134^\circ$ , d. h. er würde die Platte gar nicht mehr treffen.

Natürlich sind die zuletzt angegebenen Überlegungen nur ein roher Überschlag, aber es ist doch meines Erachtens sehr wahrscheinlich, daß die Elektronenringe den richtigen Schlüssel zu der Friedrichschen Interferenzerscheinung liefern. Ob man nun experimentell wirklich Ringe photographiert oder nur eine mehr stetige zu längeren auffallenden Wellen gehörige Abweichung vom Zerstreuungsgesetz des strahlenden Dipols, z. B. durch elektrometrische Messung feststellt, das ist für die Verwendung der Messungen schließlich mehr nebensächlich. Die Hauptsache scheint mir darin zu liegen, daß wir, wenn unser Standpunkt übernommen wird, wirklich mittels Beobachtungen über die zerstreute Strahlung instande sein dürften, die Elektronenanordnungen im Innern der Atome nach Zentimetern auszumessen. Die besten Objekte für diese Messungen dürften wenigstens vorläufig die Anfangselemente des periodischen Systems bilden.

Göttingen, 25. Februar 1915.

(Eingegangen 27. Februar 1915.)

---