INTORNO ALL'EQUAZIONE

$x^7 + y^7 + z^7 = 0$

NOTA

DEL PROFESSORE

ANGELO GENOCCHI

Si può abbreviare la dimostrazione del Signor Lamé e nel medesimo tempo ampliare alquanto il teorema di Fermat intorno all'impossibilità della proposta equazione.

Siano x, y, z le radici dell'equazione $v^3 - pv^2 + qv - r = 0$, onde

$(v-x)(v-y)(v-z) = v^3 - pv^2 + qv - r$. fatto $v = p = x + y + z$,

avremo
$$(y+z)(x+z)(x+y) = pq - r,$$

e quindi cambiato r in $pq - r$, sarà

$$(1) \qquad r = (x+y)(x+z)(y+z)$$

e x, y, z saranno radici dell'equazione

$$(2) \qquad v^3 - pv^2 + qv - (pq - r) = 0,$$

da cui mediante le note formole neutoniane dedurremo

$$x^7 + y^7 + z^7 = p^7 - 7r(p^4 - p^2q + q^2) + 7pr^2$$

e però

$$(3) \qquad p^7 - 7r(p^4 - p^2q + q^2) + 7pr^2 = 0$$

a motivo della proposta

$$(4) \qquad x^7 + y^7 + z^7 = 0.$$

Se supponiamo $r = 0$ abbiamo dalla (3) $p = 0$, e per la (2) sarà nulla una delle quantità x, y, z. Se supponiamo $p = 0$, e r diverso da zero, la (3) darà $q = 0$, e avremo dalla (2) $v^3 = -r$: quindi x, y, z saranno proporzionali alle radici cubiche dell'unità. Esclusi questi casi particolari, intenderemo che non debba essere nulla la somma delle quantità x, y, z, e che i coefficienti della equazione (2) che la determina siano razionali. Sarà p diverso da zero, e potremo cambiare q in $p^2 q$, e r in $p^3 r$, onde la (3) diverrà

$$7r^2 - 7r(1 - q + q^2) = -1,$$

e q ed r dovranno essere numeri razionali. Se ne deduce

$$r = \frac{1 - q + q^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - q + q^2)^2}{4} - \frac{1}{7}},$$

e non potendo essere $\frac{1 - q + q^2}{2} = \sqrt{\frac{1}{7}}$ se q è razionale, dovrà la quantità $\frac{(1 - q + q^2)^2}{4} - \frac{1}{7}$ essere un quadrato. Essendo $1 - q + q^2 = \frac{(2q - 1)^2 + 3}{4}$, faremo $2q - 1 = \frac{s}{t}$ frazione irreducibile, e dovremo rendere un quadrato la quantità

$$\left(\frac{s^2 + 3t^2}{8t^2}\right)^2 - \frac{1}{7} = \frac{1}{64t^4}\left(s^4 + 6s^2t^2 - \frac{1}{7}t^4\right),$$

ovvero, moltiplicando per $7^2 . 64t^4$ l'altra $7^2(s^4 + 6s^2t^2) - 7t^4$ che è un numero intero divisibile per 7: talchè potremo rappresentare con $(7u)^2$ un tale quadrato, e dovremo risolvere con valori interi di s, t, u l' equazione

$$(5) \qquad s^4 + 6s^2t^2 - \frac{1}{7}t^4 = u^2.$$

Così la questione è ridotta immediatamente all' equazione (5), ed essendo già dimostrata l' impossibilità di questa, concluderemo che l' equazione (4) è impossibile non solo per valori razionali di x, y, z ma eziandio per valori irrazionali che siano *radici d'un'equazione di terzo grado* (2) *a coefficienti razionali,* purchè non siano proporzionali alle radici cubiche dell' unità e niuna di esse sia nulla come annunziai nel *Cimento* di Torino, vol. VI, fasc. VIII, 1855.