SUR QUELQUES CONFIGURATIONS FORMÉES PAR UN ENSEMBLE DE POINTS DU PLAN.

Par M. **Georges Rémoundos** (Athènes).

Adunanza del 10 novembre 1907.

1. Nous allons traiter un problème que nous avons rencontré dans quelques recherches géométriques. Envisageons un ensemble de points M_1, M_2, M_3, ..., M_n du plan et posons-nous le problème suivant:

Combien de configurations de droites parallèles pouvons-nous former en joignant ces points de façon que chacun de ces points appartienne à une des droites parallèles de chaque configuration et à une seule?

Pour nous rendre bien compte du sens de ces configurations de droites parallèles ci-dessus définies citons quelques exemples: Les sommets d'un parallélogramme forment deux configurations évidentes de droites parallèles, que constituent les deux couples de côtés parallèles du parallélogramme; il est clair qu'une autre configuration de droites parallèles formée par les mêmes points est impossible. Nous avons les mêmes configurations de droites parallèles si nous adjoignons aux sommets du parallélogramme d'autres points situés sur ses côtés et tels que les droites qui les joignent deux à deux soient parallèles à deux côtés parallèles du parallélogramme. Le nombre des points ainsi considérés est pair.

On constate aussi aisément que l'ensemble des sommets d'un polygone canonique (régulier) ayant un nombre pair de côtés donne lieu à un nombre de configurations de droites parallèles égal à la moitié du nombre des côtés, qui sont deux à deux les *directrices* des configurations, c'est-à-dire les droites, auxquelles sont parallèles celles des configurations.

Supposons encore que nous ayons une série de n points M_1, M_2, ..., M_n situés tous sur une droite (d) et une autre série de n points correspondants N_1, N_2, ..., N_n situés (cette série ayant le même sens que la première) sur une autre droite (d') et que les points de chaque série soient équidistants de la façon indiquée par les égalités:

$$M_1 M_2 = M_2 M_3 = \cdots = M_{n-1} M_n,$$
$$N_1 N_2 = N_2 N_3 = \cdots = N_{n-1} N_n.$$

Ces points, dont le nombre est $2n$, forment deux configurations évidentes de droites parallèles, dont la première est composée des deux droites (d) et (d'), que nous supposons parallèles, et la seconde est composée des n droites M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, ..., M_nN_n, qui sont visiblement parallèles. Il est facile de prouver que ces points ne sauraient donner lieu à une autre configuration de droites parallèles, parce que, si nous joignons le point M_1 de la droite (d) avec le point N_2, par exemple, le point N_1 ne saurait être joint avec les autres points M_2, M_3, ..., M_n par des droites parallèles à la droite M_1N_2; il est, en effet, clair que le point N_1 ne se trouve pas du même côté de la droite M_1N_2 que les points M_2, M_3, ..., M_n de la droite (d).

2. Après les exemples particuliers exposés dans le numéro précédent nous allons faire une étude générale des configurations de droites parallèles, auxquelles donne lieu un ensemble (E) de points donnés du plan.

Supposons que cet ensemble donne lieu aux deux configurations (C_1) et (C_2) constituées de droites parallèles respectivement aux droites (δ_1) et (δ_2) et soit M_0 un point de l'ensemble (E); d'après l'hypothèse, il y a deux droites M_0M_1 et M_0M_2 parallèles aux droites (δ_1) et (δ_2) passant par le point M_0, les points M_1 et M_2 appartenant aussi à l'ensemble (E); il y aura aussi une droite M_1M_3 parallèle à la droite (δ_2), le point M_3 appartenant à l'ensemble (E); de même, il y aura une droite M_3M_4 parallèle à la droite (δ_1) (de la première configuration C_1), le point M_4 appartenant aussi à l'ensemble (E) et ainsi de suite. Nous voyons, donc, qu'il se forme ainsi une *ligne rectiligne brisée* constituée de droites, qui sont alternativement parallèles aux droites (δ_1) et (δ_2). Cette ligne, ou bien s'étendra à l'infini ou bien elle sera fermée; il est, en effet, clair qu'il est impossible d'avoir un dernier côté de notre ligne rectiligne brisée, puisque tout côté sera suivi par un autre. Si, donc, notre ensemble (E) est fini, il est impossible d'avoir des lignes brisées infinies [parce que leurs sommets appartiennent tous à l'ensemble (E)]. Nous n'aurons, donc, que des lignes rectilignes *fermées,* c'est-à-dire des polygones rectilignes, dont les côtés sont alternativement parallèles aux droites (δ_1) et (δ_2) et appartiennent alternativement aux configurations (C_1) et (C_2) de droites parallèles. Nous avons, donc, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un ensemble (E) fini de points donne lieu à deux (au moins) configurations (C_1) et (C_2) de droites parallèles, l'ensemble (E) coïncide avec l'ensemble des sommets d'un certain nombre de polygones rectilignes à côtés alternativement parallèles aux deux directions (δ_1) et (δ_2) des configurations (C_1) et (C_2).*

Si l'ensemble (E) donne lieu à une troisième configuration (C_3) nous aurons évidemment trois groupes de polygones rectilignes correspondant respectivement aux trois combinaisons des trois configurations deux à deux.

Si l'ensemble (E) donne lieu à m configurations (C_1), (C_2), (C_3), ..., (C_m) de droites parallèles, les points de (E) sont les sommets communs de certains groupes de polygones rectilignes, dont le nombre est égal au nombre des combinaisons des m configurations deux à deux, c'est-à-dire égal à $\frac{m(m-1)}{1.2}$; chaque groupe de polygones est caractérisé par deux directions, auxquelles sont parallèles alternativement ces côtés des polygones.

Nombre des configurations de droites parallèles.

3. Il est intéressant de connaître le nombre des configurations de droites parallèles, auxquelles donne lieu un ensemble (E) donné de points. Si le nombre des points est égal à n, il est clair que ce nombre des configurations possibles ne dépasse jamais le nombre $n - 1$, parce que par chaque point doit passer une droite de chaque configuration et, par conséquent, leur nombre ne dépasse pas le nombre des droites passant par deux, au moins, points de l'ensemble (E) dont l'un est fixe, par exemple le point M_0. Or, la limite $n - 1$ est très grande et nous allons donner une autre limite plus petite. Si nous considérons une configuration de droites parallèles formée avec les points de l'ensemble (E), parmi ces droites il y en a deux jouissant de la propriété suivante: Tous les points de l'ensemble (E) se trouvent, ou bien du même côté de chacune de ces droites, ou bien sur elles mêmes. Appelons (D) l'ensemble des droites, que nous obtenons en joignant deux à deux les points de l'ensemble (E) et *droites-frontières* de l'ensemble (D) celles qui possèdent la propriété ci-dessus indiquée, c'est-à-dire la propriété d'avoir tous les autres points de l'ensemble (E) situés du même côté. Remarquons maintenant que à chaque configuration de droites parallèles correspondent deux *droites-frontières* et, par conséquent, le nombre des configurations possibles est égal à la moitié du nombre de ces droites-frontières et, par conséquent, il est inférieur à la moitié du nombre total des droites-frontières.

4. Les polygones, que nous avons cités dans le n° 2 comme correspondants à une combinaison de deux configurations de droites parallèles, ne sont pas évidemment des polygones simples, parce que leurs côtés ne sont parallèles qu'à deux droites seulement; ce sont des polygones au sens large du mot, qui ne suppose qu'une succession continue de droites qui se ferme par le retour au point de départ.

Athènes, le 4 octobre 1907.

GEORGES RÉMOUNDOS.