ÜBER BESCHRÄNKTE QUADRATISCHE FORMEN, DEREN DIFFERENZ VOLLSTETIG IST.

Von **Hermann Weyl** (Göttingen).

Adunanza del 13 dicembre 1908.

§ 1.

Grundlegende Begriffe.

Aus einigen in meiner Dissertation enthaltenen Beispielen [1]) und aus dem Kapitel II der HILB'schen Arbeit *Über die Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen* [2]) schien mit einiger Wahrscheinlichkeit der Satz hervorzugehen, dass, wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots$ unendlichviele Variable und

$$K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q, \qquad K^*(x) = \sum_{(p,q)} k^*_{pq} x_p x_q$$

zwei beschränkte quadratische Formen der x_p sind, deren Differenz

$$K^*(x) - K(x) = k(x)$$

vollstetig ist, $K^*(x)$ dasselbe Streckenspektrum wie $K(x)$ besitzt. Aus dem Bemühen, zu entscheiden, ob dieser Satz, der auch für die Theorie der Integral- und Differentialgleichungen von grosser Wichtigkeit wäre, wirklich zutrifft, ist die vorliegende Untersuchung hervorgegangen.

Als Ausgangspunkt dieser Betrachtung hat naturgemäss der von HILBERT aufgestellte [3]) und durch Herrn HELLINGER wesentlich vervollständigte [4]) Hauptsatz aus der Theorie der orthogonalen Transformation beschränkter quadratischer Formen zu

[1]) *Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des* FOURIER'*schen Integraltheorems* (Göttingen 1908), S. 65, 69, 77, 80.

[2]) [Mathematische Annalen, Bd. LXVI (1908), S. 1-66], S. 32 ff.

[3]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 4. Mitteilung [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1906, S. 157-227], S. 198.

[4]) *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen* [Inauguraldissertation, Göttingen 1907], S. 60 f. Vielleicht darf hier auch auf die kurze Zusammenfassung seiner für uns in Betracht kommenden Resultate verwiesen werden, die ich in der Arbeit *Singuläre Integralgleichungen* [Mathematische Annalen, Bd. LXVI (1908), S. 273-324], S. 288 ff. gegeben habe.

dienen. Dieser Satz besagt, dass es durch eine orthogonale Transformation

$$\bar{x}_p = \sum_{(q)} l_{pq} x_q, \qquad \xi_p = \sum_{(q)} m_{pq} x_q$$

gelingt, $K(x)$ in die folgende Gestalt überzuführen:

$$K(x) = \sum_{(p)} \frac{\bar{x}_p^2}{\lambda_p} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{\mu}. \tag{1}$$

Dabei sind λ_p gewisse reelle Zahlen (unter denen auch ∞ endlich- oder unendlich-oft vorkommen kann), welche das *Punktspektrum* von $K(x)$ ausmachen, während $\sigma(\mu;\, \xi)$, die *Spektralform,* eine quadratische Form der ξ_p ist, deren Koefficienten derartige Funktionen von μ sind, dass $\sigma(\mu;\, \xi)$ für jedes feste Wertsystem der ξ_p eine nirgends abnehmende, stetige Funktion von μ ist. Dabei sind die Variablen, wie im folgenden stets, auf den Bereich

$$(x,\, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leqq 1$$

zu beschränken. Ist für alle solche Werte $|K(x)| \leqq M$, — wir drücken dies dadurch aus, dass wir sagen, die Zahl M sei eine Schranke der Form $K(x)$ —, so gehört keiner der λ_p dem Intervall $|\lambda| < \frac{1}{M}$ an, und in diesem Intervall ist notwendig $\sigma(\lambda;\, \xi)$ mit Bezug auf λ für jedes feste Wertsystem ξ_p konstant. Diejenigen Werte λ^*, um die sich kein Intervall abgrenzen lässt, innerhalb dessen $\sigma(\lambda;\, \xi)$ von λ unabhängig ist, bilden das *Streckenspektrum* von $K(x)$.

Es sei $\rho(\mu)$ eine stetige, nirgends abnehmende Funktion von μ, die in der Umgebung des Punktes $\mu = 0$ konstant ist, $\rho_p(\mu)$ $(p = 1,\, 2,\, \ldots)$ stetige Funktionen von der Art, dass im Sinne des HELLINGER'schen Integralbegriffs [5])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho_p\, d\rho_q}{d\rho} = \begin{cases} 0 & (p \neq q), \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

ist. Wir sagen dann, dass dieselben ein *vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis* $\rho(\mu)$ definieren falls für irgend zwei stetige Funktionen $f(\mu)$, $g(\mu)$, für welche $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(df)^2}{d\rho}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(dg)^2}{d\rho}$ existieren, die Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df\, dg}{d\rho} = \sum_{(p)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df\, d\rho_p}{d\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg\, d\rho_p}{d\rho}$$

besteht. Aus ihnen entspringt die beschränkte quadratische Form

$$K_0(x) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho_p\, d\rho_q}{\mu\, d\rho} x_p x_q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(d \sum_{(p)} \rho_p(\mu) x_p\right)^2}{\mu\, d\rho}$$

(« *Elementarform* »), deren Streckenspektrum aus all den Werten λ besteht, in deren Umgebung $\rho(\lambda)$ nicht konstant ist. Die von Herrn HELLINGER an der HILBERT'schen Darstellung (1) angebrachte Vervollständigung besteht nun darin [6]), dass es ihm gelang,

[5]) l. c. [4]), S. 25 ff.

[6]) l. c. [4]), S. 60.

den auf das Streckenspektrum bezüglichen Teil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{\mu}$$

durch eine abermalige orthogonale Transformation, welche die ξ_p in die neuen Variablen ξ_{ph} überführt, als Summe von endlich- oder unendlichvielen Formen derart darzustellen, dass allgemein die h-te der zu summierenden Formen eine Elementarform der durch den Index h ausgezeichneten Variablen ξ_{ph} $(p = 1, 2, \ldots)$ ist.

Dem Umstand, dass auch ∞ als Eigenwert fungieren kann, tragen wir dadurch Rechnung, dass wir die Achse der Spektrumsvariablen μ etwa durch stereographische Projektion auf einen Kreis abbilden. Es soll dann unter einer *stetigen Funktion* von μ eine auf diesem Kreise stetige Funktion verstanden werden, d. h. eine Funktion $u(\mu)$, die ausser der Stetigkeit im Endlichen noch die Bedingung erfüllt, dass

$$\underset{\mu=+\infty}{L}\, u(\mu) = u(+\infty) \quad \text{und} \quad \underset{\mu=-\infty}{L}\, u(\mu) = u(-\infty)$$

existieren und $u(+\infty) = u(-\infty)$ ist. Entsprechend nennen wir nicht nur die Gesamtheit der Werte μ, für welche $\lambda_0 \leqq \mu \leqq \lambda_1$ ist, sondern auch die Menge aller Werte μ, die eine der beiden Ungleichungen

$$\mu \leqq \lambda_0, \qquad \mu \geqq \lambda_1$$

befriedigen, ein *Intervall* der Variablen μ.

Jedes Wertsystem

$$(x) = x_1,\ x_2,\ \ldots$$

der unendlichvielen Variablen wird man als einen Punkt im unendlichdimensionalen Raum ansehen und z. B. die Bedingung $(x, x) = 1$ durch den geometrischen Ausdruck, « der Punkt (x) liege auf der Einheitskugel », wiedergeben. Eine unendliche Reihe von Punkten

$$\begin{aligned} (x') &= x'_1,\ x'_2,\ \ldots, \\ (x'') &= x''_1,\ x''_2,\ \ldots, \\ (x''') &= x'''_1,\ x'''_2,\ \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

konvergiert schwach gegen den Nullpunkt, falls für jedes p einzeln

$$\underset{i=\infty}{L}\, x_p^{(i)} = 0$$

ist. Gilt für jede dem Bereich $(x, x) \leqq 1$ angehörige, schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktreihe (x'), (x''), ...

$$\underset{i=\infty}{L}\, K(x^{(i)}) = 0,$$

so ist die beschränkte Form $K(x)$ *vollstetig* [7]).

[7]) HILBERT, l. c. [3]), S. 200 und 204.

§ 2.

Die aus der Ableitung des Punktspektrums und dem Streckenspektrum gebildete Vereinigungsmenge.

Neben der Darstellung (1) haben wir vor allem die Identität

$$(x, x) = \sum_{(p)} \overline{x}_p^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\mu; \xi)$$

zu beachten. Ist Δ ein Intervall der Spektrumsvariablen μ und lassen wir in der rechts stehenden Summe p nur alle die Indices durchlaufen, für welche λ_p in Δ liegt, und erstrecken das Integral, statt über die ganze Achse (den ganzen Kreis), nur über das Intervall Δ, so erhalten wir an Stelle von (x, x) eine quadratische Form der x_p, die ich mit $\underset{\Delta}{E}(x)$ bezeichnen will. Ziehen wir neben $K(x)$ noch eine zweite quadratische Form $K^*(x)$ in Betracht:

$$K^*(x) = \sum_{(p)} \frac{\overline{x}_p^{*2}}{\lambda_p^*} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^*(\mu; \xi^*)}{\mu},$$

so bedeutet $\underset{\Delta}{E^*}(x)$ die in entsprechender Weise mittelst $K^*(x)$ gebildete Form [8]).

Es sei λ irgend ein Wert der Spektrumsvariablen μ (der auch ∞ sein kann); wir fragen nach den Bedingungen, denen eine schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge (x'), (x''), ... genügen muss, damit gleichmässig für alle Werte der Variablen y_p, falls diese durch $(y, y) \leqq 1$ eingeschränkt werden,

$$\underset{i=\infty}{L}\left[K(x^{(i)}, y) - \frac{1}{\lambda}\cdot(x^{(i)}, y)\right] = 0 \tag{2}$$

ist [9]). Dazu bemerken wir zunächst: Eine beschränkte Linearform [10])

$$l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots$$

der Variablen y_p erreicht im Gebiet $(y, y) \leqq 1$ ihren grössten Wert für

$$y_p = \frac{l_p}{\sqrt{(l, l)}},$$

und es ist also

$$\max_{(y,y)\leqq 1} |l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots| = \sqrt{(l, l)}.$$

[8]) Diese Festsetzung wird in § 4 wieder aufgenommen.

[9]) Es ist

$$K(x, y) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p y_q = K\left(\frac{x+y}{2}\right) - K\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

[10]) Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschränktheit der Linearform

$$l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots$$

besteht in der Konvergenz der Quadratsumme

$$(l, l) = l_1^2 + l_2^2 + \cdots$$

[Hilbert, l. c. [3]), S. 176].

In entsprechender Weise gilt, falls $\rho(\mu)$ eine stetige, nirgends abnehmende, $l(\mu)$ aber eine solche Funktion ist, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\,l)^2}{d\rho}$ existiert, und die variable Funktion $y(\mu)$ allein der Einschränkung $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\,y)^2}{d\rho} \leqq 1$ unterworfen wird,

$$\max. \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,l\,d\,y}{d\rho} \right| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\,l)^2}{d\rho}}.$$

Wenden wir diese Tatsachen auf den Ausdruck $K(x, y) - \frac{1}{\lambda}(x, y)$ an, nachdem wir auf ihn die von HILBERT und HELLINGER gelehrte Transformation ausgeübt haben, so erhalten wir bei festen Werten x_p

$$\max_{(y,y)\leqq 1}. \left(K(x, y) - \frac{1}{\lambda}(x, y)\right)^2 = \sum_{(p)} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \bar{x}_p^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 d\sigma(\mu; \xi).$$

Ist Δ das durch $\left|\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right| \geqq \delta$ bestimmte Intervall der Variablen μ, so ergibt sich hiernach

$$\delta^2 . \underset{\Delta}{E}(x) \leqq \max. \left(K(x, y) - \frac{1}{\lambda}(x, y)\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{|\lambda|}\right)^2 . \underset{\Delta}{E}(x) + \delta^2.$$

Somit folgt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Limesgleichung (2) in dem erörterten Sinne statthat, darin besteht, dass für jedes den Wert λ nicht enthaltende Intervall Δ

$$\underset{i=\infty}{L}\ \underset{\Delta}{E}(x^{(i)}) = 0 \tag{3}$$

sein muss.

Ist λ weder Häufungspunkt des Punktspektrums [11]) noch im Streckenspektrum gelegen, so kann man ein λ nicht enthaltendes Intervall Δ so bestimmen, dass in dem komplementären Intervall kein Punkt des Streckenspektrums und nur endlichviele zum Punktspektrum gehörige Werte, etwa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, angetroffen werden. Es ist dann

$$(x, x) = \underset{\Delta}{E}(x) + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \cdots + \bar{x}_r^2;$$

da die Linearformen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r$ vollstetig sind, ist die Bedingung (3) nur dann erfüllt, wenn

$$\underset{i=\infty}{L}\ (x^{(i)}, x^{(i)}) = 0$$

ist. Bedeutet λ hingegen einen Häufungspunkt des Punktspektrums, so wähle man die Indices $p_1, p_2, \ldots$ so, dass

$$\underset{i=\infty}{L} \left(\frac{1}{\lambda_{p_i}} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0$$

ist, und verstehe unter $(x^{(i)})$ dasjenige Wertsystem, für welches $\bar{x}_{p_i} = 1$, hingegen alle

[11]) Als Häufungspunkt des Punktspektrums wird natürlich auch jeder unendlich-vielfache Eigenwert gerechnet.

übrigen $\overline{x}_p$ sowie die $\xi_p = 0$ werden. Dann ist offenbar für jedes λ nicht enthaltende Intervall Δ die Limesgleichung (3) erfüllt. Um einen kurzen Ausdruck zu haben, nennen wir (x'), (x''), ... eine *zu dem Wert λ gehörige charakteristische Punktfolge,* falls jeder der Punkte $(x^{(i)})$ auf der Einheitskugel liegt, $(x^{(i)})$ mit wachsendem i schwach gegen 0 konvergiert und ausserdem gleichmässig für alle y_p, die der Bedingung $(y, y) \leqq 1$ genügen,

$$\underset{i=\infty}{L}\left[K(x^{(i)}, y) - \frac{1}{\lambda}(x^{(i)}, y)\right] = 0$$

ist. Die vorigen Überlegungen ergeben dann, wenn wir noch in ähnlicher Weise, wie soeben die Häufungspunkte des Punktspektrums, die Werte λ des Streckenspektrums in Betracht ziehen, den

Satz I. — *Dann und nur dann, wenn λ Häufungspunkt des Punktspektrums ist oder dem Streckenspektrum angehört, gibt es zu dem Wert λ gehörige charakteristische Punktfolgen.*

Es seien jetzt $K(x)$, $K^*(x)$ zwei beschränkte quadratische Formen, deren Differenz $k(x)$ vollstetig ist. Durch *Faltung* [12]) der Form $k(x)$ mit sich selbst entsteht die gleichfalls vollstetige Form $kk(x)$. $\mathfrak{H}_K$ bezeichne die von allen Häufungspunkten des Punktspektrums und den Punkten des Strekenspektrums der quadratischen Form $K(x)$ gebildete Punktmenge, und $\mathfrak{H}_{K^*}$ habe die analoge Bedeutung für $K^*(x)$. Ist dann λ ein Wert von $\mathfrak{H}_K$ und (x'), (x''), ... eine bei Zugrundelegung der Form $K(x)$ für λ charakteristische Punktfolge, so behält (x'), (x''), ... diese Eigenschaft, auch wenn wir an Stelle von $K(x)$ die Form $K^*(x)$ zu Grunde legen, wie sich aus der Ungleichung

$$\left|K^*(x^{(i)}, y) - \frac{1}{\lambda}(x^{(i)}, y)\right| \leqq \left|K(x^{(i)}, y) - \frac{1}{\lambda}(x^{(i)}, y)\right| + \sqrt{kk(x^{(i)})}$$

ergibt. Damit ist bewiesen, dass

$$\mathfrak{H}_K = \mathfrak{H}_{K^*},$$

also die aus dem Streckenspektrum und den Häufungspunkten des Punktspektrums gebildete Menge $\mathfrak{H}_K = \mathfrak{H}$ eine Invariante von $K(x)$ gegenüber der Addition beliebiger vollstetiger Formen ist.

Dieses Resultat gestattet eine in manchen Fällen nützliche Anwendung auf die Frage der Lösbarkeit unendlichvieler Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Die dabei zunächst vorauszusetzende Symmetrie der Koefficienten $(k_{pq} = k_{qp})$ lässt sich nachträglich leicht beseitigen, indem man nach einem Grundgedanken von Toeplitz [13]) die quadratische Form $A(x, \cdot)A(x, \cdot)$ an Stelle der beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ in Betracht zieht. Es gilt

[12]) Hilbert, l. c. [3]), S. 179.

[13]) *Die* Jacobi'*sche Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, S. 101-109].

SATZ II. — *Sind*

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q, \qquad A^*(x, y) = \sum_{(p,q)} a^*_{pq} x_p y_q$$

zwei beschränkte Bilinearformen, deren Differenz eine vollstetige Funktion der Variablen x_p, y_p *ist, und gestatten die linearen Gleichungen*

$$\sum_{(q)} a_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

für alle Werte y_p *des Bereichs* $(y, y) \leqq 1$ *eine Auflösung* x_p *von konvergenter Quadratsumme, so gilt das Nämliche von den linearen Gleichungen*

$$\sum_{(q)} a^*_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

es sei denn, dass die homogenen transponierten Gleichungen

$$\sum_{(q)} a^*_{qp} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

eine Lösung x_p *von der Quadratsumme* 1 *zulassen.*

Aus den in diesem Satz gemachten Voraussetzungen folgt die Existenz einer beschränkten Form $B(x, y)$, welche die Faltungsgleichung

$$A(x, \cdot)B(\cdot, y) = (x, y)$$

erfüllt. Da

$$A^*(x, \cdot)B(\cdot, y) = (x, y) + \bigl(A^*(x, \cdot) - A(x, \cdot)\bigr)B(\cdot, y)$$

wird, so ergibt sich durch Anwendung des Satzes X in HILBERT's 4. Mitteilung [14]) auf die vollstetige Bilinearform

$$\bigl(A^*(x, \cdot) - A(x, \cdot)\bigr)B(\cdot, y)$$

der

ZUSATZ. — *Tritt unter den Voraussetzungen des Satzes II. der Fall ein, dass die Gleichungen*

$$\sum_{(q)} a^*_{qp} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung x_p *von konvergenter Quadratsumme besitzen, so gestattet auch das System der (nicht-transponierten) homogenen Gleichungen*

$$\sum_{(q)} a^*_{pq} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

eine derartige Lösung.

Aus der Lösbarkeit der nicht-transponierten auf die der transponierten homogenen Gleichungen zu schliessen, ist jedoch bei den gemachten Annahmen nicht ohne weiteres zulässig.

§ 3.

Die zu λ gehörigen charakteristischen Punktfolgen.

Im vorigen Paragraphen haben wir es als ein Kennzeichen der in der Menge $\mathfrak{H}$ enthaltenen Werte λ kennen gelernt, dass zu ihnen charakteristische Punktfolgen gehören.

[14]) l. c. [3]), S. 219.

Es gilt jetzt, in die Struktur der Gesamtheit aller zu λ gehörigen charakteristischen Punktfolgen einen Einblick zu gewinnen und vor allem zu entscheiden, ob sich etwa die Häufungspunkte des Punktspektrums einerseits und die Punkte des Streckenspektrums andrerseits hinsichtlich der Struktur dieser Gesamtheit von einander unterscheiden.

SATZ III. — *Ist λ ein isolierter Punkt der Menge $\mathfrak{H}$, so gibt es eine orthogonale Transformation der x_p in die Variablen ξ_p, η_p derart, dass eine auf der Einheitskugel liegende, schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge (x'), (x''), ... dann und nur dann für λ charakteristisch ist, falls, in den neuen Variablen geschrieben,*

$$\underset{i=\infty}{L}(\eta^{(i)}, \eta^{(i)}) = 0$$

wird.

Existiert umgekehrt eine orthogonale Transformation der bezeichneten Art, so ist λ notwendig ein isolierter Punkt von $\mathfrak{H}$.

Beweis: Der erste Teil dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Normaldarstellung (1); nur die Umkehrung bedarf eines ausführlicheren Nachweises.

Durch die betreffende orthogonale Transformation, deren Existenz beim Beweis dieser Umkehrung vorauszusetzen ist, geht $\underset{\Delta}{E}(x)$ in eine quadratische Form der Variablen ξ_p, η_p über, die ich der Einfachheit halber wieder mit $\underset{\Delta}{E}(\xi\,\eta)$ bezeichnen will. Gemäss dem in § 2 abgeleiteten Kriterium und aus der Voraussetzung des Satzes folgt:

α) für jedes Intervall Δ, das λ nicht enthält, ist $\underset{\Delta}{E}(\xi\,0)$ eine vollstetige Form der Variablen ξ_p;

β) ist $(\eta^{(i)})$ eine schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge von der Art, dass für jedes λ nicht enthaltende Intervall Δ

$$\underset{i=\infty}{L}\,\underset{\Delta}{E}(0\,\eta^{(i)}) = 0$$

gilt, so ist notwendig $\underset{i=\infty}{L}(\eta^{(i)}, \eta^{(i)}) = 0$.

Aus β) beweise ich zunächst, dass es ein bestimmtes Intervall Δ_0 gibt, welches λ nicht enthält und so beschaffen ist, dass aus dem Bestehen der einen Limesgleichung

$$\underset{i=\infty}{L}\,\underset{\Delta_0}{E}(0\,\eta^{(i)}) = 0$$

[für eine schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge $(\eta^{(i)})$] bereits $\underset{i=\infty}{L}(\eta^{(i)}, \eta^{(i)}) = 0$ mit Notwendigkeit folgt. In der Tat: existierte ein solches Δ_0 nicht, so gäbe es zu jedem Intervall Δ, welches λ nicht enthält, eine auf der Einheitskugel gelegene, schwach gegen 0 konvergierende Punktfolge im η-Raum $\eta^{\Delta,i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ derart, dass

$$\underset{i=\infty}{L}\,\underset{\Delta}{E}(0\,\eta^{\Delta,i}) = 0$$

ist. Das Intervall Δ der Variablen μ sei durch die Ungleichung $\left|\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right| \geqq \delta$ gegeben; wir können dann $i = i(\Delta)$ so bestimmen, dass die $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ ersten Koordinaten von

$\eta^{(\Delta)} = \eta^{\Delta, i(\Delta)}$ unterhalb δ liegen und ausserdem

$$\underset{\Delta}{E}(o\,\eta^{(\Delta)}) \leqq \delta$$

ist. Da dann für jedes Δ

$$(\eta^{(\Delta)}, \eta^{(\Delta)}) = 1$$

wird, kann man aus den $\eta^{(\Delta)}$ eine einfache Folge $\eta^{(\Delta')}, \eta^{(\Delta'')}, \ldots$ herausgreifen, die zu der Tatsache β) in Widerspruch steht.

Nunmehr behaupte ich, dass alle von λ verschiedenen Punkte der Menge $\mathfrak{H}$ notwendig dem Intervall Δ_0 angehören. Wäre nämlich $\lambda' \neq \lambda$ ein nicht in Δ_0 enthaltener Punkt von $\mathfrak{H}$ und demgemäss $\xi'\eta', \xi''\eta'', \ldots$ eine für λ' charakteristische Punktfolge, so wäre

$$\underset{i=\infty}{L}\ \underset{\Delta'}{E}(\xi^{(i)}\eta^{(i)}) = 0 \tag{4}$$

für jedes Intervall Δ', das λ' nicht enthält, also insbesondere

$$\underset{i=\infty}{L}\ \underset{\Delta_0}{E}(\xi^{(i)}\eta^{(i)}) = 0. \tag{5}$$

Wenden wir α) speciell für $\Delta = \Delta_0$ und ferner die Ungleichung

$$|\underset{\Delta_0}{E}(\xi\eta) - \underset{\Delta_0}{E}(o\,\eta)| \leqq \underset{\Delta_0}{E}(\xi\, o) + 2\sqrt{\underset{\Delta_0}{E}(\xi\, o)\cdot \underset{\Delta_0}{E}(o\,\eta)}$$

an, so ergibt (5)

$$\underset{i=\infty}{L}\ \underset{\Delta_0}{E}(o\,\eta^{(i)}) = 0$$

und folglich gemäss der Bestimmungsweise von Δ_0:

$$\underset{i=\infty}{L}(\eta^{(i)}, \eta^{(i)}) = 0. \tag{6}$$

Nachdem dies festgestellt ist, lehrt (4), dass für jedes λ' nicht enthaltende Intervall Δ'

$$\underset{i=\infty}{L}\ \underset{\Delta'}{E}(\xi^{(i)} o) = 0$$

ist, und da dieselbe Limesgleichung auch für jedes λ nicht enthaltende Intervall Δ gilt, so muss offenbar

$$\underset{i=\infty}{L}(\xi^{(i)}, \xi^{(i)}) = 0 \tag{7}$$

sein. Die Gleichungen (6), (7) zeigen, dass λ' kein der Menge $\mathfrak{H}$ angehöriger Punkt sein kann, und damit ist die Isoliertheit von λ bewiesen.

SATZ IV. — *Ist λ ein nicht-isolierter Punkt der Menge $\mathfrak{H}$, so gibt es eine orthogonale Transformation, welche an Stelle der x_p unendlichviele Reihen neuer Variablen einführt:*

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & x_{31}, & \ldots \\ x_{12}, & x_{22}, & x_{32}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

der Art, dass auf jede dieser Reihen unendlichviele Individuen entfallen und eine auf $(x, x) = 1$ gelegene, schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge $(x'), (x''), \ldots$ dann und nur dann für λ charakteristisch ist, falls, in den neuen Variablen geschrieben, *für jedes n*

$$\underset{i=\infty}{L}\left[\sum_{p=1}^{\infty}(x_{pn}^{(i)})^2\right] = 0$$

wird.

Hat umgekehrt die Gesamtheit der zu λ gehörigen charakteristischen Punktfolgen die angegebene Struktur, so ist λ ein nicht-isolierter Punkt von $\mathfrak{H}$.

Beweis: Dass ein nicht-isolierter Häufungspunkt des Punktspektrums, der dem Streckenspektrum nicht angehört, die in dem Satz erwähnte Eigenschaft hat, ist wiederum ohne weiteres klar. Um zu zeigen, dass sie auch den Punkten des Streckenspektrums zukommt, setze ich der Einfachheit halber $K(x)$ als eine Elementarform voraus:

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(d\sum_{(p)} \rho_p(\mu)\, x_p\right)^2}{\mu\, d\rho(\mu)}.$$

st λ ein Punkt, in dessen Umgebung $\rho(\mu)$ nicht konstant ist, so wähle ich eine unendliche Reihe von Intervallen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) jedes der Intervalle Δ_h liegt ganz im Innern des folgenden;

2) der Punkt λ, aber auch nur dieser, liegt ausserhalb der sämtlichen Δ_h;

3) jeder der Bereiche $\Delta_1, \Delta_2 - \Delta_1, \Delta_3 - \Delta_2, \ldots$ enthält unendlichviele Punkte des Streckenspektrums.

Ich kann die Funktionen $\rho^{(h)}(\mu)$ durch die folgende leicht verständliche Festsetzung:

$$d\rho^{(h)}(\mu) = d\rho(\mu), \quad \text{falls } \mu \text{ in } \Delta_h - \Delta_{h-1} \text{ liegt [15]},$$
$$d\rho^{(h)}(\mu) = 0, \quad \text{falls } \mu \text{ nicht in } \Delta_h - \Delta_{h-1} \text{ liegt},$$

(jede bis auf eine willkürliche additive Konstante) bestimmen und zu jedem h unendlichviele Funktionen $\sigma_{ph}(\mu)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ finden, die ein vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis $\rho^{(h)}(\mu)$ definieren. Alsdann definieren die $\sigma_{ph}(\mu)$ insgesamt $(p, h = 1, 2, \ldots)$, wie leicht zu sehen, ein vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis $\rho(\mu)$, und durch die orthogonale Transformation mit den Koefficienten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{ph}\, d\rho_q}{d\rho}$$

geht $K(x)$ in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(d\sum_{(p,h)} \sigma_{ph}(\mu)\, x_{ph}\right)^2}{\mu\, d\rho(\mu)}$$

über. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die auf der Einheitskugel gelegene, schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge $x^{(i)}$ für λ charakteristisch ist, besteht nach den beim Beweis von Satz I angestellten Überlegungen darin, dass für alle n

$$\underset{i=\infty}{L} \int_{(\Delta_n)} \frac{\left(d\sum_{(p,h)} \sigma_{ph}(\mu)\, x_{ph}^{(i)}\right)^2}{d\rho} = 0$$

[15]) Für $h = 1$ ist $\Delta_h - \Delta_{h-1}$ durch Δ_1 zu ersetzen.

ist, und dies stimmt wegen der Gleichung

$$\int_{(\Delta_n)} \frac{(d \sum_{(p,h)} \sigma_{ph}(\mu)\, x_{ph})^2}{d\rho} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{p=1}^{\infty} x_{ph}^2$$

mit der Behauptung unseres Satzes überein.

Wir haben weiter zu zeigen, dass, wenn es eine orthogonale Substitution von der im Satz beschriebenen Art gibt, λ kein isolierter Wert von $\mathfrak{H}$ sein kann. In der Tat: wäre λ isoliert, so gäbe es eine zwischen den Variablen x_{ph} einerseits und den Variablen ξ_p, η_p andrerseits vermittelnde orthogonale Transformation

$$x_{ph} = \sum_{(q)} s_{pq}^{(h)} \xi_q + \sum_{(q)} t_{pq}^{(h)} \eta_q$$

von der Beschaffenheit, dass für schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolgen (x'), (x''), ... die Bedingung

$$\underset{i=\infty}{L} (\eta^{(i)}, \eta^{(i)}) = 0$$

mit den unendlichvielen

$$\underset{i=\infty}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (x_{ph}^{(i)})^2 = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

äquivalent wäre. Daraus folgt zunächst, dass

$$\sum_{(p)} (\sum_{(q)} s_{pq}^{(h)} \xi_q)^2$$

eine vollstetige Form der ξ_p ist. Führen wir für ξ_p das folgende spezielle Wertsystem

$$\xi_1 = s_{r1}^{(h)}, \qquad \xi_2 = s_{r2}^{(h)}, \ldots$$

ein, das der Bedingung $(\xi, \xi) \leqq 1$ genügt, so schliesst man aus dieser Vollstetigkeit:

$$\underset{r=\infty}{L} \sum_{(p)} (\sum_{(q)} s_{pq}^{(h)} s_{rq}^{(h)})^2 = 0,$$

und da die unter dem Limeszeichen stehende Summe grösser ist als

$$[\sum_{(q)} (s_{rq}^{(h)})^2]^2,$$

so ergibt sich a fortiori

$$\underset{p=\infty}{L} \sum_{(q)} (s_{pq}^{(h)})^2 = 0.$$

Demnach lässt sich jedem $h = 1, 2, \ldots$ ein Index p_h so zuordnen, dass

$$\sum_{(q)} (s_{p_h q}^{(h)})^2 < \tfrac{1}{2} \text{ und folglich } \sum_{(q)} (t_{p_h q}^{(h)})^2 > \tfrac{1}{2}$$

ist. Setzen wir dann

$$\xi_q^{(i)} = s_{p_i q}^{(i)}, \qquad \eta_q^{(i)} = t_{p_i q}^{(i)},$$

so konvergiert $(\eta^{(i)}, \eta^{(i)})$ mit wachsendem i nicht gegen 0, obwohl die dieser Punktfolge $\xi^{(i)} \eta^{(i)}$ im x-Raum entsprechenden Punkte $x^{(i)}$ für jedes $i > h$ der Bedingung

$$\sum_{(p)} (x_{ph}^{(i)})^2 = 0$$

genügen. Durch den sich auf diese Weise ergebenden Widerspruch ist der Beweis des Satzes IV vollendet und damit die am Eingang dieses § aufgeworfene Frage vollständig beantwortet.

§ 4.

Ein Kriterium für die Vollstetigkeit der Differenz zweier quadratischer Formen.

Eine Erweiterung der in § 2 angestellten Untersuchung führt zu dem folgenden

SATZ V. — *Sind $K(x)$, $K^*(x)$ zwei beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, Δ, Δ' irgend zwei Intervalle der Spektrumsvariablen, von denen Δ ganz im Innern von Δ' liegt, ferner (x'), (x''), ... eine schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge, für die*

(I) $$\underset{i=\infty}{L}\, E_{\Delta'}(x^{(i)}) = 0$$

gilt, so ist stets

(II) $$\underset{i=\infty}{L}\, E^*_{\Delta}(x^{(i)}) = 0.$$

Und umgekehrt: sind zwei beschränkte quadratische Formen $K(x)$, $K^*(x)$ von der Beschaffenheit, dass für jede schwach gegen 0 *konvergierende Punktfolge, die* (I) *erfüllt, auch* (II) *gilt, falls nur Δ ganz im Innern von Δ' liegt, so ist $K^*(x) - K(x)$ vollstetig.*

Beweis: Ich beweise zunächst den ersten Teil. M sei eine gemeinsame Schranke der Formen $K(x)$, $K^*(x)$, deren vollstetige Differenz $K^*(x) - K(x)$ ich wiederum mit $k(x)$ bezeichne. Ist λ ein reeller oder komplexer, aber endlicher Wert, der weder dem Spektrum [16] von $K(x)$ noch von $K^*(x)$ angehört, so ist für diesen Wert die « *Resolvente* »

$$\mathbf{K}(\lambda;\, x) = \sum_{(p)} \frac{\overline{x}_p^2}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}}$$

und ebenso die zu $K^*(x)$ gehörige Resolvente $\mathbf{K}^*(\lambda;\, x)$ eine beschränkte quadratische Form. Es gelten die Beziehungen

$$\mathbf{K}(\lambda;\, x) - \lambda K(x, \cdot)\mathbf{K}(\lambda;\, \cdot, x) = (x, x),$$
$$\mathbf{K}^*(\lambda;\, x) - \lambda K^*(x, \cdot)\mathbf{K}^*(\lambda;\, \cdot, x) = (x, x).$$

Durch eine leichte Rechnung ergibt sich daraus, dass

$$\mathbf{K}^*(\lambda;\, x) - \mathbf{K}(\lambda;\, x) = \lambda \mathbf{K}(\lambda;\, x, .)\mathbf{K}^*(\lambda;\, ., \cdot)k(\cdot, x)$$

und folglich die Differenz $\mathbf{K}^*(\lambda;\, x) - \mathbf{K}(\lambda;\, x)$ vollstetig ist.

Es sei jetzt $u(\mu)$ irgend eine stetige Funktion der Spektrumsvariablen μ [17] und

[16]) Das « *Spektrum* » besteht aus dem Punktspektrum, dessen Häufungsstellen und dem Streckenspektrum.

[17]) Zum Begriff der stetigen Funktion von μ ist die in § 1 gemachte Bemerkung zu beachten.

a das absolute Maximum von $u(\mu)$. Wir bilden die quadratische Form

$$U(x) = \sum_{(p)} u(\lambda_p)\overline{x}_p^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mu)\, d\sigma(\mu;\ \xi)$$

und die entsprechende Form $U^*(x)$ unter Benutzung von $K^*(x)$ an Stelle von $K(x)$. Ich behaupte dann, dass $U^*(x) - U(x)$ vollstetig ist.

Um dies nachzuweisen, setze ich im Intervall $-M \leqq \zeta \leqq +M$

$$f(\zeta) = u\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

und bestimme nach dem bekannten Satz von WEIERSTRASS ein Polynom $\mathfrak{P}'(\zeta)$ so, dass für $|\zeta| \leqq M$

$$(8) \qquad \left|f(\zeta)\cdot e^{-\int_0^\zeta f(\zeta)d\zeta} - \mathfrak{P}'(\zeta)\right| < \varepsilon$$

ist, wo ε eine beliebige positive Zahl $\leqq \frac{1}{2M} e^{-aM}$ bedeutet. Durch Integration gewinnt man hieraus, wenn

$$1 + \int_0^\zeta \mathfrak{P}'(\zeta)\, d\zeta = \mathfrak{P}(\zeta)$$

genommen wird,

$$(9) \qquad \left|e^{-\int_0^\zeta f(\zeta)d\zeta} - \mathfrak{P}(\zeta)\right| \leqq \varepsilon M.$$

Diese Ungleichung ergibt zunächst, dass in dem in Rede stehenden Intervall

$$|\mathfrak{P}(\zeta)| \geqq \tfrac{1}{2} e^{-aM}$$

ist. Jede Nullstelle von $\mathfrak{P}(\zeta)$ ist daher entweder imaginär oder ihrem absoluten Betrage nach grösser als M, und die reziproken Werte λ'_j dieser Nullstellen sind darum endlich und genügen, falls sie reell sind, der Bedingung $|\lambda'_j| < \frac{1}{M}$; sie gehören daher sicher weder dem Spektrum von $K(x)$ noch von $K^*(x)$ an. Aus

$$\mathfrak{P}(\zeta) = C.\prod_{(j)} (1 - \lambda'_j \zeta)$$

gestatten (8) und (9) durch eine leichte Abschätzung den Schluss zu ziehen, dass

$$\left| f(\zeta) + \sum_{(j)} \frac{\lambda'_j}{1 - \lambda'_j \zeta} \right| \leqq 2\varepsilon(1 + aM)e^{aM},$$

und falls wir ζ durch $\frac{1}{\mu}$ ersetzen,

$$\left| u(\mu) + \sum_{(j)} \frac{\lambda'_j}{1 - \frac{\lambda'_j}{\mu}} \right| \leqq 2\varepsilon . e^{2aM} \quad \text{für} \quad |\mu| \geqq \frac{1}{M}$$

wird.

Diese Ungleichung liefert

$$\left|U(x) + \sum_{(j)} \lambda'_j \boldsymbol{K}(\lambda'_j;\ x)\right| \leqq 2\varepsilon . e^{2aM}(x,\ x).$$

Bezeichnet (x'), (x''), ... eine schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge, so folgt aus dieser und der entsprechenden Ungleichung für $K^*(x)$

$$\limsup_{i=\infty} |U^*(x^{(i)}) - U(x^{(i)})| \leqq 4\varepsilon . e^{2aM},$$

und da hier ε eine beliebige positive Zahl ist, muss notwendig

$$(10) \qquad \underset{i=\infty}{L} \left(U^*(x^{(i)}) - U(x^{(i)})\right) = 0$$

sein [18]).

Erklären wir $u(\mu)$ speciell durch die Bedingungen

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} u(\mu) = 0 & \text{ausserhalb } \Delta', \\ u(\mu) = 1 & \text{im Intervall } \Delta, \end{cases}$$

und in den beiden Intervallen, durch deren Hinzufügung Δ' aus Δ entsteht, $u(\mu)$ je als eine solche stetige, nicht-negative Funktion von μ, dass in den vier Endpunkten jener Intervalle der stetige Anschluss an die sub (III) definierten Werte erreicht wird, so erhalten wir aus (10) die erste Behauptung des Satzes V.

Um die Umkehrung des gewonnenen Resultates zu beweisen, sei $u(\mu)$ wieder eine stetige Funktion auf dem Kreise μ. Wir teilen den Kreis in eine endliche Anzahl von Intervallen Δ_h und bestimmen zu jedem dieser Intervalle Δ_h ein anderes Δ'_h, in dessen Innerem Δ_h ganz enthalten ist, doch so, dass die Intervalle Δ'_h die Kreisperipherie höchstens zweifach überdecken. Ist ε eine beliebige positive Zahl, so können wir diese Konstruktion so einrichten, dass die Differenz des Maximums und des Minimums der Funktion $u(\mu)$ im Intervall Δ'_h für alle Indices h unterhalb ε liegt. Der Einfachheit halber wollen wir ferner die Voraussetzung machen, dass die Formen $K(x)$, $K^*(x)$ kein Streckenspektrum besitzen. Wir können dann annehmen, dass $K(x)$ die folgende Form hat:

$$K(x) = \sum_{(\mu)} \frac{x_\mu^2}{\mu},$$

wo der Summationsbuchstabe μ die sämtlichen Eigenwerte $\mu = \lambda_p$ der Form $K(x)$, einschliesslich ∞, jeden in seiner Vielfachheit genommen, durchläuft. Es wird ferner

$$K^*(x) = \sum_{(\lambda)} \frac{\xi_\lambda^2}{\lambda}$$

sein, wo λ die Eigenwerte von $K^*(x)$ durchläuft und die ξ_λ durch eine orthogonale Substitution aus den Variablen x_μ hervorgehen:

$$(11) \qquad \xi_\lambda = \sum_{(\mu)} o_{\lambda\mu} x_\mu .$$

Es ist dann

$$\underset{\Delta}{E}(x) = \sum_{(\Delta)} x_\mu^2 \quad \text{und} \quad \underset{\Delta}{E^*}(x) = \sum_{(\Delta)} \xi_\lambda^2,$$

18) Ein analoger Übergang von $\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$ zu einer beliebigen stetigen Funktion $u(\mu)$ wird auch von Hilbert [l. c. 3), S. 196] vollzogen. Es ist aber zu beachten, dass in unserm Fall, anders als bei Hilbert, Unstetigkeiten der Funktion $u(\mu)$ unzulässig sind. [Vergl. Hellinger, l. c. 4), S. 15].

wenn $\sum\limits_{(\Delta)}$ eine Summation über alle Eigenwerte von $K(x)$, bezw. $K^*(x)$ bedeutet, die dem Intervall Δ angehören.

Die Voraussetzung, dass jede schwach gegen den Nullpunkt konvergierende Punktfolge $x^{(i)}$, für die

$$\underset{i=\infty}{L}\, \underset{\Delta'}{E}(x^{(i)}) = 0$$

ist, auch die Bedingung

$$\underset{i=\infty}{L}\, \underset{\Delta}{E^*}(x^{(i)}) = 0$$

erfüllt, falls Δ ganz im Innern von Δ' liegt, liefert, auf $\Delta = \Delta_h$, $\Delta' = \Delta'_h$ angewendet, insbesondere das Resultat, dass

$$\sum_{(\Delta_h)} \Big(\sum_{(\mu)}{}^{*} o_{\lambda\mu} x_\mu\Big)^2 = S_h(x)$$

eine vollstetige quadratische Form der Variablen x_μ ist, sobald die innere (mit einem * versehene) Summation übėr alle Eigenwerte μ von $K(x)$, die *nicht* dem Intervall Δ'_h angehören, die äussere hingegen über alle Eigenwerte λ von $K^*(x)$, die im Intervall Δ_h liegen, erstreckt wird. Beziehen wir andererseits in

$$\sum_{(\Delta_h)} \Big(\sum_{(\Delta'_h)} o_{\lambda\mu} x_\mu\Big)^2$$

die innere Summation auf diejenigen Eigenwerte μ von $K(x)$, die Δ'_h angehören, die äussere auf die zu Δ_h gehörigen Eigenwerte λ von $K^*(x)$, so möge die hervorgehende quadratische Form mit $T_h(x)$ bezeichnet werden. Es ist

$$\Big|\sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda^2 - T_h(x)\Big| \leqq S_h(x) + 2\sqrt{S_h(x)\,.\,T_h(x)}.$$

Da $S_h(x)$ vollstetig und

$$0 \leqq T_h(x) \leqq 1$$

ist, ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda^2 = R_h(x) + T_h(x), \tag{12}$$

in der $R_h(x)$ eine gewisse vollstetige quadratische Form der x_μ bedeutet. Ordnen wir jeder der Variablen x_μ eine weitere unabhängige Variable y_μ zu und setzen analog zu (11)

$$\eta_\lambda = \sum_{(\mu)} o_{\lambda\mu} y_\mu,$$

so folgt aus (12)

$$\sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda \eta_\lambda = R_h(x, y) + T_h(x, y). \tag{13}$$

Da die symmetrische Bilinearform $T_h(x, y)$ die Zahl 1 zur Schranke hat, aber nur von denjenigen Variablen x_μ, y_μ abhängt, deren Index μ dem Intervall Δ'_h angehört, ist

$$\big(T_h(x, y)\big)^2 \leqq \sum_{(\Delta'_h)} x_\mu^2 \cdot \sum_{(\Delta'_h)} y_\mu^2 \,. \tag{14}$$

Wir wählen nunmehr in (13) speciell

$$y_\mu = u(\mu) x_\mu;$$

dann wird, falls $\bar{\lambda}_h$ den Mittelpunkt des Intervalls Δ_h bedeutet und

$$\bar{y}_\mu = \left(u(\mu) - u(\bar{\lambda}_h)\right) x_\mu$$

gesetzt wird,

$$T_h(x, y) = u(\bar{\lambda}_h)\, T_h(x) + T_h(x, \bar{y}) = u(\bar{\lambda}_h) \cdot \sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda^2 - u(\bar{\lambda}_h) R_h(x) + T_h(x, \bar{y}).$$

Da aus (14)

$$|T_h(x, \bar{y})| \leqq \varepsilon \cdot \sum_{(\Delta'_h)} x_\mu^2$$

hervorgeht und

$$\left|\sum_{(\Delta_h)} u(\lambda) \xi_\lambda^2 - u(\bar{\lambda}_h) \sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda^2\right| \leqq \varepsilon \cdot \sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda^2$$

ist, verwandelt sich (13) in

$$\left|\sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda \eta_\lambda - \sum_{(\Delta_h)} u(\lambda) \xi_\lambda^2 + u(\bar{\lambda}_h) R_h(x) - R_h(x, u x)\right| \leqq \varepsilon \left[\sum_{(\Delta'_h)} x_\mu^2 + \sum_{(\Delta_h)} \xi_\lambda^2\right].$$

Zählen wir jetzt die so für die einzelnen Intervalle Δ_h erhaltenen Ungleichungen zusammen [19]) und setzen

$$\sum_{(h)} \left[u(\bar{\lambda}_h) R_h(x) - R_h(x, u x)\right] = R(x)$$

so folgt, da

$$\sum_{(\lambda)} \xi_\lambda \eta_\lambda = \sum_{(\mu)} x_\mu y_\mu = \sum_{(\mu)} u(\mu) x_\mu^2$$

ist und die Δ'_h die Kreisperipherie höchstens zweifach überdecken,

$$\left|\sum_{(\mu)} u(\mu) x_\mu^2 - \sum_{(\lambda)} u(\lambda) \xi_\lambda^2 + R(x)\right| \leqq 3\varepsilon.$$

Da $R(x)$ vollstetig ist, liefert eine bereits oben angewendete Schlussweise das Ergebnis, dass auch

$$\sum_{(\mu)} u(\mu) x_\mu^2 - \sum_{(\lambda)} u(\lambda) \xi_\lambda^2$$

vollstetig sein muss. Verstehen wir unter $u(\mu)$ für $|\mu| \geqq \frac{1}{M}$ insbesondere die Funktion $\frac{1}{\mu}$, so ist damit die Vollstetigkeit von $K^*(x) - K(x)$ bewiesen.

Das hiermit gewonnene notwendige und hinreichende Kriterium für die Vollstetigkeit von $K^*(x) - K(x)$ lässt sich in dem soeben betrachteten Falle, dass K^*, K ohne Streckenspektrum sind, so aussprechen, dass für jedes $\delta > 0$ die Bilinearform

$$O_\delta(x, y) = \sum{}' o_{\lambda\mu} x_\lambda y_\mu,$$

in der rechts über alle Eigenwerte λ von $K^*(x)$ und alle Eigenwerte μ von $K(x)$ zu summieren ist, welche den Ungleichungen

$$|\lambda| \leqq \frac{1}{\delta}, \qquad |\mu| \leqq \frac{1}{\delta}, \qquad |\lambda - \mu| \geqq \delta$$

[19]) Da wir die Endpunkte jedes der Intervalle Δ_h mit zu Δ_h rechnen, müssen wir dabei noch annehmen, dass keiner dieser Endpunkte unter den Eigenwerten λ von $K^*(x)$ enthalten ist.

genügen, eine vollstetige Funktion der Variablen x_λ, y_μ sein muss. Diese, wie mir scheint, ziemlich anschauliche Formulierung unseres Kriteriums lässt sich ebenso wie der geführte Beweis auf Formen mit Streckenspektrum ausdehnen.

§ 5.

Verhalten des Streckenspektrums bei Addition einer vollstetigen Form.

Das im vorigen Paragraphen gewonnene Kriterium lässt es bereits als sehr unwahrscheinlich erkennen, dass das Streckenspektrum einer beschränkten quadratischen Form gegenüber Addition jeder vollstetigen Form invariant ist. Um dafür nun tatsächlich den Beweis zu erbringen, benutze ich in modifizierter Form ein gewisses von Herrn HAAR ersonnenes Orthogonalsystem von Funktionen.

Es sei $t(z)$ eine im Intervall $0 \leqq z \leqq 2\pi$ erklärte, stetige, nirgends abnehmende Funktion von z, die von 0 bis 1 variiert. Durch Auflösung der Gleichung $t = t(z)$ erhalten wir z als eine gleichfalls monotone Funktion $z(t)$ von t, deren Stetigkeit jedoch an endlich- oder abzählbar-unendlichvielen Stellen unterbrochen sein kann. $\mathfrak{A}$ sei eine das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ überall dicht bedeckende abzählbare Punktmenge, in der die sämtlichen Unstetigkeitsstellen der Funktion $z(t)$ und die Zahl 1 enthalten sind, während 0 nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört. Ein Satz der Punktmengenlehre [20]) besagt, dass, wenn r die sämtlichen abbrechenden Dualbrüche bedeutet, welche dem Gebiet $0 < t \leqq 1$ angehören, jedem r ein Punkt $a(r)$ der Menge $\mathfrak{A}$ zugeordnet werden kann, sodass unter den $a(r)$ die sämtlichen Punkte von $\mathfrak{A}$ vertreten sind und ausserdem die natürliche Anordnung der r erhalten bleibt, d. h. dass für irgend zwei verschiedene r, etwa $r^* < r^{**}$, stets auch $a(r^*) < a(r^{**})$ ist. — Mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ bezeichne ich die auf folgende Weise in eine einfache Reihe geordneten Brüche r:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8};\ \ldots$$

Ist r ein abbrechender Dualbruch, also von der Form $\frac{g}{2^n}$, wo g eine ganze, ungerade Zahl ist, so setze ich allgemein $r' = \frac{g-1}{2^n}$, $r'' = \frac{g+1}{2^n}$.

Jetzt definiere ich nach dem Vorgange von Herrn HAAR [21]) für jeden der Dual-

[20]) G. CANTOR, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, I. Artikel [Mathematische Annalen, Bd. XLVI (1895), S. 481-512], S. 504-506.

[21]) Herr HAAR wird binnen kurzem über das von ihm gefundene Orthogonalsystem eine Note in den Göttinger Nachrichten veröffentlichen. Bei ihm vereinfacht sich diese Überlegung dadurch, dass er speciell $a(r) = r$ genommen hat; die Komplikation rührt hier daher, dass wir die Unstetigkeitsstellen von $z(t)$ gebührend berücksichtigen müssen.

brüche r die Funktion $\varphi_r(t)$ durch die Bedingungen

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi_r(t) = \sqrt{\dfrac{a(r'') - a(r)}{\big(a(r) - a(r')\big)\big((a(r'') - a(r')\big)}} & \text{für} \quad a(r') \leqq t < a(r), \\ \quad = -\sqrt{\dfrac{a(r) - a(r')}{\big(a(r'') - a(r)\big)\big(a(r'') - a(r')\big)}} & \text{für} \quad a(r) \leqq t < a(r''), \\ \quad = 0 \quad \text{für alle übrigen Werte von } t. \end{cases}$$

Da $\int_{a(r')}^{a(r'')} \varphi_r(t)\,dt = 0$ ist und alle Funktionen $\varphi(t)$, welche einen in der Reihe $r_1, r_2, \ldots$ dem Werte r vorhergehenden Index haben, in dem Gebiet $a(r') < t < a(r'')$ konstant sind, folgt, dass die Funktionen $\varphi_r(t)$ ein Orthogonalsystem [22]) für das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ bilden. Dasselbe ist vollständig [22]); denn für eine stetige Funktion $h(t)$ sagen die 2^n Gleichungen

$$(16)\qquad \int_0^1 \varphi_r(t)\,dh(t) = 0 \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{2^n})$$

aus, dass $\int dh(t) = 0$ ist, falls das Integral über irgend eines der Intervalle erstreckt wird, in welche $0 \ldots 1$ durch die Punkte $a(r_1), a(r_2), \ldots, a(r_{2^n})$ zerlegt ist. Gilt (16) für alle Brüche $r = r_1, r_2, \ldots$ in inf., so ist also

$$h\big(a(r)\big) - h(1) = 0 \qquad (\text{für } r = r_1, r_2, \ldots),$$

und da $h(t)$ stetig, die Zahlen $a(r)$ aber das Intervall $0 \ldots 1$ überall dicht bedecken, folgt

$$h(t) = h(1) = \text{const.} \qquad (\text{für } 0 \leqq t \leqq 1).$$

Damit ist die Vollständigkeit bewiesen.

Die durch Integration gebildeten stetigen Funktionen

$$\sigma_r(z) = \int_0^{t(z)} \varphi_r(t)\,dt$$

von z definieren ein vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis $t(z)$ von besonderer Art. Es sei nämlich s_r die Sprunghöhe der Funktion $z(t)$ an der Stelle $t = a(r)$. Die Funktion

$$\bar{z}(t) = z(t - 0) - \sum_{a(r) < t} s_r$$

ist stetig in t. Bezeichnet daher ε eine beliebige positive Zahl, so kann man zunächst einen Index n so bestimmen, dass die Differenz zwischen dem grössten und kleinsten Wert von $\bar{z}(t)$ in jedem Intervall, dessen Länge $\leqq \frac{1}{2^n}$ ist, unterhalb $\frac{\varepsilon}{2}$ liegt. Dieser Index kann ausserdem so gewählt werden, dass die Summe $\sum_{(i > 2^n)} s_{r_i}$ gleichfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist.

[22]) Vergl. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 5. Mitteilung [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1906, S. 439-480], S. 442.

Für irgend zwei Werte $a(r)$, etwa $a(r^*) < a(r^{**})$, die keine der Zahlen $a(r_1)$, $a(r_2), \ldots, a(r_{2^n})$ zwischen sich enthalten (während sie selbst sehr wohl mit einer von ihnen übereinstimmen können), gilt dann

$$0 < \chi\big(a(r^{**}) - 0\big) - \chi\big(a(r^*) + 0\big) < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass ausserhalb eines gewissen Intervalls i_r, dessen Länge, ausser für die endlichvielen Indices $r = r_1, r_2, \ldots, r_{2^n}$, kleiner als ε ist, identisch $d\sigma_r(\chi) = 0$ wird.

Aendern wir schliesslich diese Konstruktion noch so ab, dass wir die ersten 2^m der Funktionen $\varphi_{r_1}(t), \varphi_{r_2}(t), \ldots$, statt wie in (15), durch

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{\sqrt{a(r) - a\left(r - \frac{1}{2^m}\right)}} \quad \text{für} \quad a\left(r - \frac{1}{2^m}\right) < t \leqq a(r),$$

$$= 0 \quad \text{für alle andern Werte von } t$$

definieren (während wir für die übrigen die bisherige Erklärung beibehalten), so erhalten wir den

Hülfssatz: Ist $t(\chi)$ eine für $0 \leqq \chi \leqq 2\pi$ erklärte, stetige, nirgends abnehmende Funktion, δ eine positive Zahl, so kann man solche stetige Funktionen $\sigma_r(\chi)$ bestimmen, die ein vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis $t(\chi)$ definieren, dass ausserhalb eines gewissen Intervalls i_r identisch $d\sigma_r(\chi) = 0$ ist und

1) die Länge der sämtlichen i_r unterhalb δ liegt,

2) die Länge aller i_r mit Ausnahme einer endlichen (von ε abhängigen) Anzahl unterhalb ε liegt, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt sein mag.

Kehren wir jetzt zu den quadratischen Formen zurück, so möge

$$K_h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(d \sum_{(p)} \rho_{ph}(\mu) x_{ph}\right)^2}{\mu \, d\rho^{(h)}(\mu)} \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

eine endliche oder abzählbar-unendliche Anzahl von Elementarformen mit getrennten Variablen x_{ph} sein. Die Basisfunktion $\rho^{(h)}(\mu)$ gehe bei der stereographischen Projektion, welche die μ-Achse in den χ-Kreis verwandelt, in $t^{(h)}(\chi)$ über:

$$t^{(h)}(\chi) = \rho^{(h)}\left(-2\cot\frac{\chi}{2}\right).$$

Wählen wir in dem eben bewiesenen Hülfssatz $t(\chi) = t^{(h)}(\chi)$ [23]), $\delta = \frac{1}{h}$, so erhalten wir Funktionen $\sigma_r(\chi)$, die durch rückwärtige Projektion des Kreises auf die μ-Achse in $\sigma_{\lambda h}(\mu)$ übergehen mögen. Dabei bezeichnet λ denjenigen Punkt der μ-Achse, welcher

$$\chi = \frac{\chi\big(a(r) + 0\big) + \chi\big(a(r) - 0\big)}{2}$$

[23]) Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass jede der Funktionen $\rho^{(h)}(\mu)$ nur zwischen den Grenzen 0 und 1 variiert. [Vergl. HELLINGER, l. c. [4]), S. 51 ff].

entspricht, sodass also der Index λ eine abzählbare, im Bereich des Streckenspektrums von $K_h(x)$ überall dicht liegende Punktmenge durchläuft. Durch eine gewisse orthogonale Transformation, welche die Variablen x_{ph} durch die neuen $\xi_{\lambda h}$ ersetzt, wird $K_h(x)$ in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(d \sum\limits_{(\lambda)} \sigma_{\lambda h}(\mu)\xi_{\lambda h}\right)^2}{\mu . d\rho^{(h)}(\mu)}$$

verwandelt. Aus der Beschaffenheit der $\sigma_{\lambda h}(\mu)$ und dem Kriterium in § 4 schliessen wir jetzt, dass nicht nur

$$K_h(x) - \sum_{(\lambda)} \frac{\xi_{\lambda h}^2}{\lambda},$$

sondern wegen der Annahme $\delta = \frac{1}{h}$ auch die über $h = 1, 2, \ldots$ erstreckte Summe aller dieser Differenzen eine vollstetige Form der x_{ph} vorstellt. Auf diese Weise ergibt sich der

SATZ VI. — *Ist $K(x)$ irgend eine beschränkte quadratische Form, so gibt es stets eine vollstetige Form $k(x)$ von der Art, dass $K(x) + k(x)$ kein Streckenspektrum besitzt.*

Dieser Satz belehrt uns darüber, wie subtil in Wahrheit der Unterschied zwischen den Punkten des Strekenspektrums und den Häufungspunkten des Punktspektrums ist. Die dargelegte Methode gestattet übrigens eine Reihe analoger Tatsachen zu beweisen, z. B. die, dass es durch Addition einer vollstetigen Form möglich ist, eine in Gestalt einer Summe von endlich- oder abzählbar-unendlichvielen Elementarformen mit getrennten Variablen vorliegende beschränkte quadratische Form in eine einzige Elementarform zu verwandeln.

Die Verwandlung der Häufungspunkte des Punktspektrums in ein Streckenspektrum ist natürlich im allgemeinen nicht vollständig ausführbar. Nenne ich einen Punkt der in den vorigen §§ benutzten Menge $\mathfrak{H}$ *semi-isoliert,* falls ich um ihn ein Intervall abgrenzen kann, das höchstens abzählbar-viele Punkte von $\mathfrak{H}$ enthält, so stellt sich nämlich heraus, dass *die semi-isolierten Punkte von $\mathfrak{H}$ und deren Häufungspunkte notwendigerweise Verdichtungsstellen des Punktspektrums* von $K(x)$ und also auch von $K(x)+k(x)$ *sind,* wenn $k(x)$ eine beliebige vollstetige Form bedeutet. *Alle übrigen Verdichtungsstellen des Punktspektrums aber können durch Addition einer geeigneten vollstetigen Form $k(x)$ in Punkte des Streckenspektrums übergeführt werden.* Um dies einzusehen, haben wir von den beiden folgenden Sätzen Gebrauch zu machen:

1) diejenigen Punkte einer beliebigen abgeschlossenen Menge $\mathfrak{H}$, welche nicht semi-isoliert sind, bilden eine perfekte Menge $\mathfrak{H}^{\Omega}$ [24]);

2) zu jeder perfekten Menge $\mathfrak{H}^{\Omega}$ gibt es eine stetige, monotone Funktion, die in einem Intervall Δ der unabhängigen Variablen dann und nur dann konstant ist, falls Δ keinen Punkt von $\mathfrak{H}^{\Omega}$ im Innern enthält.

Göttingen, den 11. November 1908.

HERMANN WEYL.

[24]) LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration* (Paris, 1904), Note, pag. 136.