SUR LES INTÉGRALES RÉELLES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LES FORCES CENTRALES.

Par M. **Georges Rémoundos** (Athènes).

Adunanza del 28 luglio 1907.

1. Envisageons d'abord les équations différentielles du premier ordre ayant la forme

$$\frac{dy}{dx} = M(x, y), \tag{1}$$

$M(x, y)$ désignant une fonction multiforme des coordonnées x et y, c'est-à-dire une fonction ayant plusieurs valeurs à chaque point du plan (xy). Nous nous bornons dans le domaine réel. Le théorème fondamental de CAUCHY sur l'existence des intégrales ne nous donne pas, comme on sait, des renseignements sur l'allure d'une courbe intégrale dans son parcours total: on comprend donc l'intérêt de tout résultat obtenu dans cette direction.

Démontrer que les courbes intégrales ne sauraient jamais renfermer quelques points du plan ou bien qu'elles ne peuvent avoir tel ou tel trajet, c'est là des faits intéressants auxquels nous devons faire attention.

2. Si nous considérons une courbe intégrale, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ a une valeur unique et bien déterminée à chaque point de la courbe, sauf, peut-être, quelques points singuliers. Appelons *courbes de permutation de branches de la fonction* $M(x, y)$, les courbes fermées [1]) que le point (xy) doit décrire pour revenir à sa position initiale avec une nouvelle détermination. De telles courbes bien connues et d'un caractère général (valable pour un point de départ quelconque) existent dans le cas où la fonction $M(x, y)$ est harmonique multiforme. Soit par exemple

$$M(x, y) + iN(x, y) = f(z) \qquad (z = x + iy),$$

$N(x, y)$ étant une fonction conjuguée à $M(x, y)$ et $f(z)$ une fonction analytique de z; et plaçons-nous dans ce cas, pour fixer les idées.

Si nous appelons (E) l'ensemble des courbes de permutation des branches de la fonction $M(x, y)$, la remarque ci-dessus faite nous conduit au théorème suivant:

THÉORÈME. — *Aucune courbe intégrale ne saurait appartenir à l'ensemble* (E).

---

[1]) Ces courbes sont généralement supposées parfaitement régulières (dépourvues de points multiples, par exemple); mais nous n'avons pas ici besoin de cette restriction.

Nous savons, en effet, que chaque courbe de l'ensemble (E) permute les valeurs de la fonction $M(x, y)$ en chaque point, tandis que la dérivée ne saurait avoir plusieurs valeurs qu'aux points à plusieures tangentes; il faut même remarquer que ces points singuliers (à plusieures tangentes) n'existent pas ordinairement sur les courbes de permutation de branches, ce qui n'est pas indispensable pour notre théorème.

Prenons l'exemple suivant :

$$M(x, y) = p(x, y),$$

$p(x, y)$ désignant la partie réelle ou bien la partie imaginaire (le coefficient de i) de la fonction analytique $\sqrt{z - \alpha}$, α étant l'affixe d'un point du plan. D'après notre théorème, aucune courbe intégrale ne saurait renfermer le point $z = a$.

D'une façon plus générale, si $p(x, y)$ est la partie réelle ou imaginaire de la fonction

$$\sqrt{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)},$$

aucune courbe intégrale ne saurait renfermer un nombre impair de points:

$$z = \alpha, \quad z = \alpha_2, \quad \ldots, \quad z = \alpha_n.$$

Ces deux exemples permettent au lecteur de conprendre la nature et la portée des applications que l'on peut faire avec notre théorème si simple à démontrer.

3. Nous avons un théorème et des conséquences identiques pour les courbes intégrales d'une équation différentielle du deuxième ordre de la forme

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = M(x, y),$$

$M(x, y)$ désignant aussi une fonction multiforme des coordonnées x et y.

La seconde dérivée y'' a en effet aussi une valeur unique à chaque point d'une courbe, sauf quelques point singuliers (points multiples), tandis que une courbe de permutation de branches est même supposée parfaitement régulière [dépourvue, par exemple, de points multiples et de points d'inflexion [2])]. On se rend aisément compte de cette propriété de la dérivée y'' en se reportant à la formule

$$y'' = \frac{1}{\rho \cos^3 \varphi},$$

ρ désignant le rayon de courbure et φ l'angle de la tangente avec la partie positive de l'axe des x.

Nous avons évidemment des résultats analogues pour les courbes intégrales d'équations différentielles d'une forme plus générale

$$R(x, y, y', y'') = M(x, y),$$

le premier membre étant une fonction rationnelle [3]) des x, y et des dérivées y' et y'', et $M(x, y)$ désignant une fonction multiforme et, en particulier, une fonction harmonique multiforme.

---

[2]) Cela n'est pas indispensable pour notre théorème.

[3]) Ou plus généralement une fonction uniforme des variables x, y, y', y''.

Aucune courbe intégrale réelle ne saurait appartenir à l'ensemble (E) *des courbes de permutation des branches de la fonction* $M(x, y)$.

La démonstration est la même que dans les cas particuliers précédents; elle tient à ce que le premier membre n'a qu'une valeur unique à chaque point d'une courbe intégrale, sauf quelques points singuliers (points multiples, points anguleux et, en général, points à plusieurs tangentes ou à plusieurs rayons de courbure).

Il s'agit, bien entendu, toujours de courbes de permutation qui permutent les branches de $M(x, y)$ quel que soit le point de départ.

Telles sont les courbes de permutation des branches des fonctions analytiques de $z = x + iy$, ou bien des fonctions harmoniques des deux coordonnées x et y que nous connaissons par la théorie des fonctions.

4. Il est clair que l'équation différentielle peut bien être d'ordre quelconque, pourvu qu'elle soit toujours de la même forme :

$$R[x, y, y', y'', \ldots y^{(\nu)}] = M(x, y),$$

où $R[x, y, y', \ldots y^{(\nu)}]$ désigne une fonction uniforme des coordonnées x, y et des dérivées y', y'', $\ldots$ $y^{(\nu)}$.

Nous devons remarquer que, lorsque l'équation différentielle est d'ordre supérieur à deux, il peut y avoir des points exceptionnels, pour lesquels le premier membre $R[x, y, y', \ldots y^{(\nu)}]$ de l'équation n'ait pas une valeur unique, et qui soient des points réguliers de la courbe intégrale; ces points seront singuliers (points de rebroussement) d'une au moins des différentes développées de la courbe intégrale, les rayons de courbure d'ordre supérieur pouvant avoir plusieurs valeurs en ces points. Nous savons, par exemple, qu'aux sommets d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole correspondent des points de rebroussement sur leurs développées, tandis que les sommets des courbes coniques sont des points réguliers pour ces courbes.

Mais il est clair que l'existence de tels points ne nous empêche pas d'arriver à la même conclusion que dans le cas du premier ou du second ordre, puisque il existe toujours des points où le premier membre

$$R[x, y, y', \ldots y^{(\nu)}]$$

n'a qu'une valeur unique.

5. Dans les paragraphes précédents nous avons envisagé l'ensemble (E) des courbes de permutation des branches de la fonction $M(x, y)$; il faut bien se rendre compte de l'exclusion des courbes sur lesquelles la fonction $M(x, y)$ ne change de valeur que pour *certains points de départ* (*d'un ensemble fini ou dénombrable*); pour ces courbes notre théorème n'est pas en général applicable à une courbe intégrale, pouvant bien coïncider avec une telle courbe; il peut arriver, en effet, que les points singuliers d'une courbe intégrale coïncident bien avec les points où la fonction $M(x, y)$ n'a pas une seule valeur, mais une telle courbe ne saurait plus être appelée *courbe de permutation de branches de la fonction* $M(x, y)$: une courbe de permutation se caractérise par le fait que, en tous ses points, la fonction possède plusieurs valeurs qui se permutent lorsque nous revenons au point de départ après avoir tourné sur la courbe.

Ces remarques servent à éclaircir le sens et l'intelligence de notre théorème.

Il est clair que notre théorème fournit des applications utiles dans les problèmes de Mécanique où les trajectoires satisfont à des équations différentielles de la forme examinée dans ce travail.

Tels sont les problèmes où nous recherchons les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales, fonctions multiformes de la position du mobile, ou bien encore fonctions uniformes de la position du mobile.

Nous avons en effet, pour les forces centrales, les formules:

$$d\left(\frac{1}{2} m V^2\right) = F\,dr, \qquad V^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad \left(u = \frac{1}{r}\right)$$

$$F = -m\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right],$$

V désignant la vitesse, F la force, $u = \frac{1}{r}$, r le rayon polaire, c la constante des aires. Les dérivées $\frac{du}{d\theta}$ et $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ étant, dans des cas étendus, égales à des fonctions multiformes de la position du mobile, nous avons dans des cas généraux les conditions nécessaires pour l'application de notre théorème; il est en effet facile de voir que les dérivées

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{r\,\mathrm{tg}\,\omega}, \qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}$$

ont une valeur unique à chaque point d'une courbe, sauf quelques points singuliers, s'il en existe; ω désigne l'angle formé par la tangente et le rayon polaire. En général tout ce que nous avons dit pour les dérivées des coordonnées rectangulaires peut se répéter aussi pour les dérivées des coordonnées polaires. Nous terminerons ce travail avec la remarque suivante: Dans le cas où il existe sur la courbe intégrale des singularités telles que les points de rebroussement, il arrive que, après avoir tourné sur la courbe formée une ou plusieurs fois, la continuité nous ramène au point de départ avec une nouvelle valeur de l'angle φ de la tangente avec le demi-axe positif des x ou bien de l'angle ω de la tangente avec le rayon polaire; mais comme la différence des deux valeurs est égale à π (à deux angles droits) la $\mathrm{tg}\,\varphi$ ou bien $\mathrm{tg}\,\omega$ ne changeront pas de valeur.

Par conséquent, ces singularités n'influent pas sur l'uniformité des dérivées $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dr}{d\theta}$ aux autres points (réguliers) de la courbe.

Athènes, 14 juillet 1907.

GEORGES RÉMOUNDOS.