# NOZIONE DI PARALLELISMO IN UNA VARIETÀ QUALUNQUE E CONSEGUENTE SPECIFICAZIONE GEOMETRICA DELLA CURVATURA RIEMANNIANA.

Memoria di **T. Levi-Civita** (Padova).

Adunanza del 24 dicembre 1916.

## Introduzione.

La teoria della gravitazione di Einstein (suffragata oramai dalla spiegazione della famosa disuguaglianza secolare, che l'osservazione rivela nel perielio di Mercurio, e non è prevista dalla legge di Newton) considera la struttura geometrica dello spazio ambiente come tenuissimamente, ma pur intimamente, dipendente dai fenomeni fisici che vi si svolgono; a differenza delle teorie classiche, che assumono tutte lo spazio fisico quale dato a priori. Lo svolgimento matematico della grandiosa concezione di Einstein (che trova nel calcolo differenziale assoluto del Ricci il suo naturale strumento algoritmico) fa intervenire come elemento essenziale la curvatura di una certa varietà a quattro dimensioni e i relativi simboli di Riemann. L'incontro, anzi il maneggio continuativo di tali simboli in questioni di così alto interesse generale mi ha condotto a ricercare se non sia possibile ridurre alquanto l'apparato formale che serve abitualmente ad introdurli e a stabilirne il comportamento covariante [1]).

Un perfezionamento in proposito è effettivamente possibile, e costituisce in sostanza i §§ 15 e 16 del presente scritto; il quale, sorto inizialmente con questo solo obbiettivo, venne via via ampliandosi per far debito posto anche all'interpretazione geometrica.

In sulle prime avevo creduto di trovarla senz'altro nei lavori originali di Riemann *« Über die Hypothesen welche Geometrie zu Grunde liegen »* e *« Commentatio mathematica ... »* [2]); ma ce n'è appena un embrione. Da un lato infatti, ravvicinando le fonti citate, si ricava l'impressione che Riemann avesse proprio in mente quella caratterizzazione della curvatura intrinseca e invariante, che sarà qui precisata (§§ 17-18).

---

[1]) Cfr. per es. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. I (Pisa, Spoerri, 1902), pp. 69-72.

[2]) B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke* (Leipzig, Teubner, 1876), pp. 261-263, 381-382.

D'altra parte però non c'è traccia, nè in RIEMANN, nè nel commento esplicativo dovuto a WEBER [3]), di quelle specificazioni (nozione di direzioni parallele in una varietà qualunque e considerazione di un quadrangolo geodetico infinitesimo con due lati paralleli), che riconosceremo indispensabili dal punto di vista geometrico. Inoltre non si riesce — io almeno non sono riescito — a giustificare il passaggio formale con cui, secondo RIEMANN, dalle premesse, che sono inappuntabili, si dovrebbe conseguire la altrettanto inappuntabile espressione finale della curvatura.

Presenterò al lettore questo mio dubbio, fornendogli i necessari elementi di giudizio, in una nota critica finale.

La prima e più estesa parte della memoria (§§ 1-14) è destinata a introdurre e ad illustrare la nozione di parallelismo in una $V_n$ a metrica qualsiasi.

Si comincia dal campo infinitesimale, cercando di caratterizzare il parallelismo di due direzioni $(\alpha)$, $(\alpha')$ uscenti da due punti vicinissimi $P$ e $P'$. All'uopo si ricorda che qualunque varietà $V_n$ si può risguardare immersa in uno spazio euclideo $S_N$ a un numero abbastanza elevato $N$ di dimensioni, e si rileva anzitutto che, immaginando spiccata da $P$ una generica direzione $(f)$ di $S_N$, il parallelismo ordinario in tale spazio richiederebbe

$$\text{angolo}\,\widehat{(f)(\alpha)} = \text{angolo}\,\widehat{(f)(\alpha')},$$

per qualunque $(f)$. Orbene, il parallelismo in $V_n$ si definisce, limitandosi ad esigere che la condizione sia soddisfatta *per tutte le* $(f)$ *appartenenti a* $V_n$ (ossia alla giacitura di $S_N$ tangente in $P$ a $V_n$).

A giustificazione di questa definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento elementare per le $V_n$ euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perchè in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di $V_n$, e non anche dall'ausiliario spazio ambiente $S_N$. Infatti la traduzione analitica della nostra definizione di parallelismo si concreta come segue: Riferita la $V_n$ a coordinate generali $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, siano $dx_i$ gli incrementi corrispondenti al passaggio da $P$ a $P'$; $\xi^{(i)}$ i parametri spettanti a una generica direzione $(\alpha)$ uscente da $P$; $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$ quelli spettanti ad una direzione infinitamente vicina $(\alpha')$, spiccata da $P'$. La condizione di parallelismo è espressa dalle $n$ equazioni

$$(A) \qquad d\xi^{(i)} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} dx_j \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

designando $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ i noti simboli di CHRISTOFFEL.

Una volta acquisita la legge con cui si passa da un punto a un punto infinitamente vicino, si è senz'altro in grado di eseguire il trasporto di direzioni parallele lungo una qualsiasi curva $C$. Se $x_i = x_i(s)$ ne costituiscono le equazioni parametriche,

---

3) loc. cit. [2]), pp. 384-389.

basta evidentemente risguardare, nelle $(A)$, le $x_i$ e subordinatamente le $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ come funzioni assegnate, le $\xi^{(i)}$ come funzioni da determinarsi del parametro $s$, e si ha il sistema lineare ordinario

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} \frac{dx_j}{ds} \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

riducibile ad una forma tipica (detta a determinante gobbo), che già si è presentata in altre ricerche e fu oggetto di studio sistematico da parte dei sig.ri EIESLAND [4]), LAURA [5]), DARBOUX [6]), VESSIOT [7]).

Ecco qualche conseguenza geometrica.

1° La direzione parallela in un punto generico $P$ ad una direzione $(\alpha)$ uscente da un altro punto qualsiasi $P_0$ dipende in generale dal cammino secondo cui si passa da $P_0$ a $P$. L'indipendenza dal cammino è proprietà esclusiva delle varietà euclidee.

2° Lungo una medesima geodetica, le direzioni delle tangenti sono parallele, ciò che generalizza un'ovvia caratteristica della retta negli spazi euclidei (quella appunto che EUCLIDE pone in testa agli elementi come intuizione primordiale della retta).

3° Il trasporto per parallelismo, lungo un cammino qualsiasi, di due direzioni concorrenti ne conserva l'angolo. Con ciò si vuol dire evidentemente che l'angolo formato da due generiche direzioni uscenti da un medesimo punto è anche l'angolo formato dalle loro parallele in un altro punto qualunque. Tenendo conto della rilevata proprietà delle geodetiche, si ricava il corollario che, lungo una geodetica, direzioni parallele sono sempre egualmente inclinate sulla geodetica stessa. Se si tratta in particolare di una $V_2$, questa condizione è anche sufficiente; sicchè, per le ordinarie superficie, parallelismo lungo una geodetica equivale ad isogonalità.

Non ho indicato con ordine il contenuto dei vari §§. Supplirà agevolmente uno sguardo al sommario riportato alla fine del lavoro.

## § 1.

## Preliminari.

Sia (coi soliti simboli)

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

---

[4]) J. EIESLAND, *On the Integration of a System of Differential Equations in Kinematics* [American Journal of Mathematics, vol. XXVIII (1906), pp. 17-42].

[5]) E. LAURA, *Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni differenziali lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di* RICCATI [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378].

[6]) G. DARBOUX, *Sur certains systèmes d'équations linéaires* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1er semestre 1909), pp. 16-22], e *Sur les systèmes d'équations différentielles homogènes* (Ibid., pp. 673-679 e pp. 745-754).

[7]) E. VESSIOT, *Sur l'intégration des systèmes linéaires à déterminant gauche* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1er semestre 1909), pp. 332-335].

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà qualsiasi $V_n$.

Come è ben noto, si può sempre risguardare la $V_n$ immersa in uno spazio euclideo $S_N$ a un numero di dimensioni $N$ abbastanza grande $\left(\text{non superiore a } \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Indichino $y_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) coordinate cartesiane di un tale spazio. In seno ad esso, gioverà considerare la $V_n$ definita mediante le espressioni parametriche

$$(1) \qquad y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

delle coordinate cartesiane in termini delle intrinseche, risultando in conformità

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_1^N {}_\nu \, dy_\nu^2 = \sum_1^n {}_{ik} \, a_{ik} \, dx_i \, dx_k .$$

Assumiamo in $V_n$ una curva $C$ a piacimento, e siano

$$(3) \qquad x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

le sue equazioni parametriche, $s$ designando l'arco (contato a partire da un'origine arbitraria). La $C$ appartiene naturalmente anche allo spazio ambiente $S_N$, e come tale rimane definita dalle espressioni parametriche $y_\nu(s)$ delle coordinate cartesiane dei suoi punti. Queste espressioni parametriche sono senz'altro offerte dalle (1), in cui si attribuiscano alle $x_i$ i valori (3). Derivandole rapporto ad $s$, e indicando con apici le derivate rapporto a questo argomento, si ha

$$(4) \qquad y'_\nu = \sum_1^n {}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} x'_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Riferiamoci ad un valore generico, ma ben determinato, di $s$, cioè ad un qualsiasi punto $P$ della curva $C$. Le $y'_\nu$ costituiscono manifestamente i coseni direttori di $C$ in $P$ rispetto agli assi coordinati dello spazio euclideo $S_N$; le $x'_i$ sono i *parametri di direzione* (della stessa $C$ e nello stesso punto $P$) rispetto a $V_n$

Ricordiamo ancora [8]) che, se si pone

$$(5) \qquad y''_\nu = c q_\nu ,$$

con $c \geqq 0$ e $\sum_1^N {}_\nu q_\nu^2 = 1$, rimane definita la curvatura $c$ di $C$ in $P$, e (escluso il caso limite $c = 0$), pel tramite dei coseni $q_\nu$, una direzione $(q)$, detta *normale principale assoluta* nel punto $P$. Proiettandola (ortogonalmente) sull'iperpiano tangente a $V_n$ in $P$, si individua una direzione $(q^*)$, pure normale alla curva, detta *normale principale relativa.*

Designeremo con $q_\nu^*$ i coseni direttori di $(q^*)$; con $\Phi$ l'angolo compreso fra $(q)$ e $(q^*)$; e infine con $\alpha_\nu$ i coseni direttori di una generica $(\alpha)$ uscente da $P$ e appar-

---

[8]) L. Bianchi, loc. cit. [1]), pp. 365-367.

tenente a $V_n$ (cioè al suo iperpiano tangente). Sarà manifestamente

$$\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu = \cos\Phi \sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu^*,$$

quindi, moltiplicando per $c$ e badando alle (5),

$$\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu y_\nu'' = c\cos\Phi \sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu^*.$$

Va rilevato che il secondo membro ha carattere intrinseco rispetto alla varietà $V_n$, si può cioè interpretare indipendentemente dallo spazio euclideo ambiente. Infatti

$$c\cos\Phi = \gamma$$

non è altro che la curvatura geodetica di $C$, e $\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu^*$ il coseno dell'angolo $\chi$ fra ($\alpha$) e la normale principale relativa ($q^*$), direzioni appartenenti entrambe a $V_n$. Sussiste dunque (in dipendenza dall'assunta curva $C$), per qualsiasi direzione ($\alpha$) di $V_n$, la relazione

(6) $$\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu y_\nu'' = \gamma\cos\chi.$$

§ 2.

## Direzioni parallele in $V_n$ lungo una curva prefissata.

Supponiamo che ad ogni punto $P$ di $C$ corrisponda una direzione ($\alpha$) appartenente a $V_n$. Saranno con ciò a risguardarsi funzioni di $s$ i parametri di direzione $\xi^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) che definiscono la ($\alpha$) entro $V_n$, nonchè i coseni direttori $\alpha_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) che la individuano nello spazio ambiente; e si avrà [come già per la direzione di $C$, a norma delle (4)]

(7) $$\alpha_\nu = \sum_1^n {}_l \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\xi^{(l)}$$

Immaginiamo di far variare $P$ lungo $C$. La condizione di parallelismo ordinario delle ($\alpha$) (rispetto allo spazio ambiente $S_N$) implica eguaglianza degli angoli che esse formano con una medesima direzione, scelta a piacere.

Per arrivare ad una nozione di parallelismo attinente unicamente a $V_n$, consideriamo il fenomeno elementare, cioè il passaggio da $P$ ad un punto infinitamente vicino.

Sia ($f$) una generica direzione *fissa* di $S_N$, $f_\nu$ i relativi coseni direttori. Quando $s$ si incrementa di $ds$, il coseno dell'angolo fra ($\alpha$) ed ($f$),

$$\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu f_\nu,$$

subisce l'incremento

$$ds\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu' f_\nu.$$

L'ordinario parallelismo richiederebbe l'annullarsi di tale incremento per tutte le direzioni $(f)$, e porterebbe quindi alla costanza delle $\alpha_\nu$

*Accontentiamoci di esigere che l'angolo fra* $(\alpha)$ *ed una* $(f)$ *si mantenga invariato per le direzioni* $(f)$ *appartenenti a* $V_n$, ossia che l'incremento $ds\sum_1^N{}_\nu \alpha'_\nu f_\nu$ si annulli [non per tutte le $(f)$, ma soltanto] per queste direzioni tangenziali.

Ove si osservi che tali direzioni sono tutte e sole quelle conciliabili coi vincoli (1), appare manifesto (sostituendo alle $f_\nu$ delle quantità proporzionali) che la condizione enunciata equivale alla seguente:

$$\sum_1^N{}_\nu \alpha'_\nu \delta y_\nu = 0 \tag{I}$$

*per tutti gli spostamenti* $\delta y_\nu$ *conciliabili coi vincoli* (1).

Avendosi, in base alle (1) stesse,

$$\delta y_\nu = \sum_1^n{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\delta x_k$$

colle $\delta x_k$ completamente arbitrarie, la (I) si scinde nelle $n$ equazioni

$$\sum_1^N{}_\nu \alpha'_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

che costituiscono una traduzione formale del parallelismo delle $(\alpha)$ lungo la $C$.

## § 3.

## Forma intrinseca delle condizioni di parallelismo.

Nelle (8) figurano le $\alpha_\nu$ e le $y_\nu$, che hanno relazione collo spazio ambiente. Si può liberarsene, facendo in definitiva intervenire solo elementi spettanti alla metrica della $V_n$.

All'uopo si comincia col sostituire ai coseni direttori $\alpha_\nu$ le loro espressioni (7) in funzione dei parametri di direzione $\xi^{(l)}$. Si ha, derivando rapporto all'arco $s$ di $C$,

$$\alpha'_\nu = \sum_1^n{}_l \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_1^n{}_{jl}\frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l} x'_j \xi^{(l)}.$$

D'altra parte, in virtù della (2),

$$a_{kl} = \sum_1^N{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

da cui segue, per i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie,

$$
\begin{aligned}
a_{jl,k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right)\right] \\
&= \sum_1^N{}_\nu \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \qquad (i, l, k = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Con ciò le (8) divengono

$$\sum_1^n{}_l\, a_{kl}\frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_1^n{}_{jl}\, a_{jl,k}\, x'_j \xi^{(l)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Da queste, moltiplicando per $a^{(ik)}$ 9), sommando rispetto a $k$ (da 1 ad $n$), e ricordando le definizioni

$$\left\{\begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix}\right\} = \sum_1^n{}_k\, a_{jl,k}\, a^{(ik)} \qquad (j, l, i = 1, 2, \ldots, n)$$

dei simboli di CHRISTOFFEL di $2^a$ specie, si traggono le equazioni equivalenti

$$(I_a) \qquad \frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_1^n{}_{jl}\left\{\begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix}\right\} x'_j \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*che definiscono il modo di variare dei parametri $\xi^{(i)}$ lungo $C$, in base alla condizione che le direzioni da essi parametri individuate si mantengano parallele.*

Dacchè $C$ si considera preventivamente assegnata (e con essa le espressioni delle $x$ e delle $x'$ in funzione di $s$), i coefficienti $\sum_1^n{}_j \left\{\begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix}\right\} x'_j$ d'ogni $\xi^{(l)}$ nelle $(I_a)$ vanno risguardati come funzioni conosciute della variabile indipendente $s$. Le $(I_a)$ stesse si presentano in conformità come $n$ equazioni differenziali ordinarie nelle altrettante quantità $\xi^{(i)}$. Ne consegue, in base ai noti teoremi di esistenza, che, spiccata a piacimento una direzione da un punto qualsiasi $P_0$ di $C$, rimangono determinate le direzioni parallele per ogni altro punto $P$ della curva.

## § 4.

## Confronto col comportamento euclideo. Sua proprietà caratteristica nei riguardi del parallelismo.

Per quanto s'è visto or ora, lungo la curva $C$, seguita a sussistere la proprietà elementare che da un punto $P$ esce una sola direzione parallela ad altra assegnata per

9) Con $a^{(ik)}$ si designano al solito i coefficienti della forma reciproca alla forma fondamentale $ds^2 = \sum_1^n{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$.

$P_0$. Va rilevato tuttavia che, mentre negli spazi euclidei la parallela per $P$ è unica in senso assoluto, nella nostra $V_n$ a metrica qualsiasi essa viene in generale a dipendere da $C$, ossia dal cammino lungo cui si passa da $P_0$ a $P$.

Si può anzi aggiungere che, *se* (per un punto qualsiasi $P$ di un certo campo) *la parallela* (ad una qualsiasi direzione spiccata da altro punto $P_0$ del campo) *è indipendente dal cammino, lo spazio $V_n$ è* (in quel campo) *necessariamente euclideo.*

Si osservi infatti che, dalle $(I_a)$, moltiplicando per $ds$ e ponendo per brevità

$$X_j^{(i)} = \sum_1^n {}_l \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(l)},$$

risulta

$$d\xi^{(i)} = - \sum_1^n {}_j X_j^{(i)} dx_j. \tag{9}$$

La voluta indipendenza dal cammino richiede che le $d\xi^{(i)}$, e con esse i secondi membri delle (9), siano differenziali esatti, ciò che, designando con $\delta x_j$ un secondo sistema di incrementi delle $x_j$, indipendenti dai $dx_j$ e tali che $d\delta x_j = \delta d x_j$, si traduce nelle $n$ identità

$$\delta \sum_1^n {}_j X_j^{(i)} dx_j = d \sum_1^n {}_j X_j^{(i)} \delta x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Esplicitando e notando che l'eguaglianza deve sussistere qualunque sieno i due sistemi di incrementi $dx_j$, $\delta x_j$, nonchè i valori (iniziali, e quindi anche generici) delle $\xi^{(l)}$, si è condotti automaticamente ad esprimere che si annullano tutti i simboli di RIEMANN [10]), ossia che si tratta di una varietà euclidea, C. D. D.

§ 5.

## Altra forma delle equazioni $(I_a)$ — Dipendenza da una sola funzione.

Nelle $(I_a)$ figurano come elementi determinativi delle direzioni parallele $(\alpha)$ i parametri di direzione $\xi^{(i)} \left( = \frac{dx_i}{ds}\right.$, rappresentando $ds$ la lunghezza di un elemento spiccato nella direzione $(\alpha)$, e $dx_i$ il corrispondente incremento della coordinata $\left. x_i \right)$. Questi $\xi^{(i)}$ costituiscono un sistema contravariante [11]) (rispetto a qualsivoglia trasformazione

---

[10]) Dal punto di vista metodologico, ove si ritenga effettivamente preferibile all'ordinaria trattazione dei simboli e della curvatura di RIEMANN quella che sarà esposta nei §§ 15-19, il teorema del testo dovrebbe figurare dopo quei paragrafi. Lo ho antecipato per comodo del lettore cui sono famigliari i simboli di RIEMANN.

[11]) Cfr. (in questo punto soltanto per le locuzioni) G. RICCI et T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Mathematische Annalen, Bd. LIV (1900), pp. 125-201].

delle coordinate generali $x_i$). Giova talora mettere in evidenza, invece del sistema contravariante $\xi^{(i)}$, il sistema covariante reciproco

$$\xi_i = \sum_1^n {}_k a_{ik} \xi^{(k)}, \tag{10}$$

cioè i cosidetti *momenti.*

Per trasformare in conformità le $(I_a)$, deriviamo materialmente le posizioni (10), introducendovi per le $\frac{d\xi^{(k)}}{ds}$ le espressioni fornite dalle $(I_a)$. Si ricava (dopo aver scambiato nell'ultimo termine l'indice di sommatoria $k$ in $l$)

$$\frac{d\xi_i}{ds} = -\sum_1^n {}_{kjl} a_{ik} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ k \end{matrix} \right\} x'_j \xi^{(l)} + \sum_1^n {}_l \frac{d a_{il}}{ds} \xi^{(l)}.$$

Siccome

$$\sum_1^n {}_k a_{ik} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ k \end{matrix} \right\} = a_{jl,i},$$

e

$$\frac{d a_{il}}{ds} = \sum_1^n {}_j \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} x'_j = \sum_1^n {}_j (a_{jl,i} + a_{ij,l}) x'_j,$$

così resta

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \sum_1^n {}_{jl} a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} \tag{11}$$

Anche nel secondo membro si devon far apparire, non le $\xi^{(l)}$, ma i momenti: cosa ben facile a norma delle (10), che risolute danno

$$\xi^{(l)} = \sum_1^n {}_k a^{(lk)} \xi_k .$$

Con ciò, attese le espressioni dei simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie già richiamate nel precedente §, risulta

$$\sum_1^n {}_{jl} a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} = \sum_1^n {}_{jk} \left\{ \begin{matrix} i\,j \\ k \end{matrix} \right\} x'_j \xi_k ,$$

e si hanno quindi (riponendo $l$ per $k$ come indice della sommatoria) le equazioni trasformate

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \sum_1^n {}_{jl} \left\{ \begin{matrix} i\,j \\ l \end{matrix} \right\} x'_j \xi_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{$I_b$}$$

Si osserverà che questo sistema $(I_b)$ è *l'aggiunto* del precedente $(I_a)$. Infatti il coefficiente di $\xi_l$ nella $i^{\text{esima}}$ equazione $(I_b)$ è eguale ed opposto al coefficiente di $\xi^{(i)}$ nella $l^{\text{esima}}$ equazione $(I_a)$.

Alle equazioni in questione si può anche attribuire un terzo aspetto che ricorda, pur essendo in verità meno espressivo, la classica forma lagrangiana delle equazioni della dinamica.

L'analogia risiede in ciò che si fa capo ad una sola funzione di $3n$ argomenti $x_i, x'_i, \xi^{(i)}$,

$$B = \sum_1^n {}_{ij} a_{ij} x'_i \xi^{(j)}, \tag{12}$$

bilineare nelle $\xi^{(j)}$ (che fungono da incognite) e nelle $x'_i$ (che sono, al pari delle $x_i$, funzioni assegnate di $s$).

Si ha dalle (10)

$$\xi_i = \frac{\partial B}{\partial x'_i},$$

e si constata immediatamente (con ovvi scambi di indici) che, per essere

$$a_{ij,l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right),$$

i secondi membri delle (11) possono essere scritti

$$\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x'_i} + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(j)}\right)$$

Con ciò, dalle (11) stesse, che sono sostanzialmente equivalenti tanto alle $(I_a)$ quanto alle $(I_b)$, si ha l'annunciata forma involgente la sola $B$:

$$(I_c) \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial B}{\partial x'_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(j)}\right).$$

## § 6.

## Integrale quadratico — Conservazione degli angoli. Composizione di soluzioni ortogonali.

Le equazioni lineari $(I_a)$ ammettono l'integrale quadratico

$$\sum_1^n{}_{ij} a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)} = \text{cost.}$$

Lo si riconosce nel modo più spiccio notando che, in virtù delle (10), il primo membro si scrive

$$\sum_1^n{}_i \xi^{(i)}\xi_i,$$

ed ha quindi per derivata

$$\sum_1^n{}_i\left(\frac{d\xi^{(i)}}{ds}\xi_i + \frac{d\xi_i}{ds}\xi^{(i)}\right),$$

che si annulla identicamente in forza della $(I_a)$ e delle equivalenti $(I_b)$.

Del resto, anche senza verifica diretta, si può affermare la costanza di $\sum_1^n{}_i \xi^{(i)}\xi_i$, in base ad una nota proprietà dei sistemi aggiunti, dacchè (§ precedente) $\xi^{(i)}$ e $\xi_i$ sono soluzioni di due sistemi siffatti.

Ovvio corollario dell'esistenza dell'integrale quadratico è che, se i valori iniziali delle $\xi^{(i)}$ sono effettivamente parametri di direzione, e, come tali, rendono

$$\sum_{1\,ij}^{n} a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)} = 1, \tag{13}$$

la stessa relazione rimane soddisfatta per qualunque $s$, cioè le soluzioni $\xi^{(i)}$ conservano lungo $C$ il carattere di parametri di direzione: circostanza implicita nella impostazione del problema, ma non a priori evidente nella sua formulazione analitica a mezzo delle $(I_a)$.

Altro corollario degno di nota è la conservazione, lungo $C$, dell'angolo $\vartheta$ di due direzioni che si trasportano per parallelismo. Sieno infatti $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ i parametri di queste due direzioni, $\xi_i$, $\eta_i$ i rispettivi momenti. Si ha

$$\cos\vartheta = \sum_{1\,ij}^{n} a_{ij}\xi^{(i)}\eta^{(j)} = \sum_{1\,i}^{n}\xi^{(i)}\eta_i = \sum_{1\,i}^{n}\xi_i\eta^{(i)}.$$

Riferiamoci per es. all'ultima espressione, e deriviamo sostituendo a $\frac{d\xi_i}{ds}$ i valori forniti dalle $(I_b)$, a $\frac{d\eta^{(i)}}{ds}$ quelli forniti dalle $(I_a)$ (previo mutamento di $\xi$ in $\eta$). Il risultato è anche qui identicamente nullo, C. D. D.

Dalla linearità delle equazioni di parallelismo — riferiamoci per es. alle $(I_a)$ — segue che, se $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sono soluzioni, lo è del pari una qualsiasi combinazione lineare a coefficienti costanti. Suppongasi in particolare che $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sieno parametri di due direzioni (oltrechè parallele) ortogonali fra loro, e si assuma

$$\zeta^{(i)} = \cos\vartheta\,\xi^{(i)} + \sin\vartheta\,\eta^{(i)}$$

con $\vartheta$ costante. Si ha ovviamente

$$\sum_{1\,ij}^{n} a_{ij}\zeta^{(i)}\zeta^{(j)} = 1; \quad \sum_{1\,i}^{n}\zeta^{(i)}\xi_i = \cos\vartheta, \quad \sum_{1\,i}^{n}\zeta^{(i)}\eta_i = \sin\vartheta,$$

sicchè le $\zeta^{(i)}$ costituiscono i parametri di una direzione che, mentre ottempera lungo $C$ alla condizione di parallelismo, appartiene alla giacitura individuata dalle prime due, formando con esse in ogni punto sempre gli stessi angoli $\vartheta$ e $\frac{\pi}{2} - \vartheta$.

L'osservazione si estende agevolmente a quante si vogliono soluzioni mutuamente ortogonali, e dà luogo al seguente enunciato espressivo: *Ogni direzione che, spostandosi lungo $C$, si mantiene rigidamente collegata con direzioni parallele soddisfa essa stessa alla condizione di parallelismo.*

## § 7.

## Geodetiche — Loro proprietà caratteristica nei riguardi della direzione.

Le equazioni delle geodetiche di $V_n$ sono notoriamente

$$x_i'' + \sum_{1\,jl}^{n}\left\{ {jl \atop i} \right\} x_j' x_l' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Da esse segue che, se $C$ è geodetica, le $(I_a)$ ammettono la soluzione $\xi^{(i)} = x'_i$, e reciprocamente. Si ha pertanto: *La direzione di una geodetica in un suo punto qualsiasi è sempre parallela alla direzione iniziale; reciprocamente ogni curva che gode di questa proprietà è geodetica.*

Risulta così estesa alle geodetiche di una varietà qualunque una discriminante delle rette negli spazi euclidei. E in pari tempo rimane acquisito che sono necessariamente concomitanti la conservazione della direzione e (l'altra discriminante delle geodetiche, cioè) la proprietà integrale di minimizzare la distanza.

## § 8.

## Inclinazione sulla curva di trasporto.

Giova rilevare una espressiva combinazione lineare delle $(I_a)$. Per evitare gli sviluppi materiali, risaliremo alla formula $(I)$, che è la genesi delle equazioni differenziali e sostanzialmente equivale ad esse. Detta formula deve sussistere per ogni spostamento $\delta y_\nu$, e quindi per ogni direzione, appartenente a $V_n$. Consideriamo in particolare la direzione tangente a $C$, ponendo nella (I) $y'_\nu$ al posto di $\delta y_\nu$. Risulta

$$\sum_1^N {}_\nu \alpha'_\nu y'_\nu = 0,$$

che si può scrivere

$$\frac{d}{ds} \sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu y'_\nu = \sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu y''_\nu .$$

Chiamando $\psi$ l'angolo che la direzione $(\alpha)$ (del cui parallelismo si tratta) fa con $C$ e badando alla (6), si ha la relazione che volevamo stabilire

$$\frac{d}{ds} \cos \psi = \gamma \cos \chi. \tag{14}$$

Ricordiamo (§ 1) che $\gamma$ rappresenta la curvatura geodetica di $C$, e $\chi$ l'angolo compreso fra $(\alpha)$ e la normale principale di $C$ (relativa a $V_n$). La (14) fornisce quindi la legge con cui varia, lungo la curva di trasporto $C$, l'inclinazione $\psi$ (sulla stessa $C$) di un fascio di direzioni parallele.

Se $C$ è geodetica, $\gamma = 0$, e quindi $\cos \psi = \text{cost.}$, ossia: *direzioni parallele lungo una geodetica formano sempre il medesimo angolo colla geodetica stessa.* Questo è del resto un caso particolare della conservazione degli angoli rilevata a § 6: basta tener presente (§ precedente) che le direzioni di una geodetica sono tutte parallele tra loro.

Se $C$ è qualunque, ma si tratta di uno spazio euclideo, la (14) si identifica col primo gruppo delle formule di FRENET.

## § 9.

## Caso delle ordinarie superficie.

Per $n = 2$, le varie direzioni uscenti da un medesimo punto di $C$ rimangono univocamente determinate dall'angolo $\psi$, purchè vi si associ un dato qualitativo: il verso in cui, a partire dalla direzione positiva di $C$, deve contarsi $\psi$. Ne consegue che (con opportuna specificazione qualitativa) basta la (14) a definire univocamente le direzioni parallele lungo una generica curva della superficie. Si può specificare come segue: Detta $(q^*)$ la normale principale relativa (proiezione sul piano tangente alla superficie della normale principale di $C$), immaginiamo di contare $\psi$ verso $(q^*)$ [si intende, a partire dalla direzione positiva di $C$, attraverso l'angolo retto, che questa forma con $(q^*)$]. L'angolo $\psi$, inteso a questo modo, può non essere il minimo angolo fra $C$ ed $(\alpha)$, cui si riferisce la (14) (ma quello concavo che completa il giro); comunque il suo coseno coincide in ogni caso col $\cos\psi$ della (14), avendosi ulteriormente (per l'attuale $\psi$) $\sin\psi = \cos\chi$.

La (14) assume così la forma semplificata

$$\frac{d\psi}{ds} = -\gamma. \tag{15}$$

Già ci siamo occupati nel precedente § del caso $\gamma = 0$ per $n$ qualunque. Per le superficie, si può aggiungere che l'ordinaria nozione di parallelismo geodetico rientra nella nostra nozione generale di parallelismo. Infatti, curve geodeticamente parallele hanno per traiettorie ortogonali curve geodetiche; esse possono quindi dirsi parallele) nel senso da noi attribuito a tale qualifica) rispetto a ognuna di queste geodetiche, essendo, per entrambe le curve, $\psi = \frac{\pi}{2}$, ovvero $\psi = \frac{3\pi}{2}$

Lasciamo il caso di $C$ geodetica e prendiamo un esempio particolare. Supponiamo che si tratti di una superficie sferica, e che $C$ ne sia un parallelo. La direzione $(q^*)$ in un punto generico è quella del meridiano, verso il polo di $C$. Se $\lambda$ è la latitudine (relativa all'emisfero che contiene il polo di $C$) e $R$ il raggio della sfera,

$$\gamma = \frac{1}{R\cos\lambda}$$

D'altra parte, ove si immagini di percorrere il parallelo nel senso in cui cresce la longitudine $\varphi$,

$$ds = R\cos\lambda\, d\varphi,$$

talchè la (15) si riduce a

$$d\psi = -d\varphi.$$

L'angolo $\psi$ varia dunque uniformemente colla longitudine, e decresce di $2\pi$ in un giro completo. La direzione parallela ad una iniziale prefissata risulta così funzione *uniforme* dei punti di un parallelo.

Una tale uniformità non sussiste tuttavia necessariamente per altre curve chiuse: ad es., percorrendo il perimetro di un triangolo geodetico, $\psi$ subisce l'incremento $2\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon$ eccesso sferico). Lo si riconosce immediatamente pensando che $\psi$ resta costante lungo i lati e subisce nei vertici incrementi bruschi rappresentati dai supplementi degli angoli.

## § 10.

## Spazi a curvatura costante — Osservazione sul parallelismo di CLIFFORD.

Vogliamo mostrare che, per gli spazi a curvatura costante [12]) (di quante si vogliono dimensioni) le equazioni di parallelismo *lungo una geodetica* si integrano a vista, proprio come nel caso esaminato or ora di varietà qualunque, ma a due sole dimensioni.

Riferiamoci, per fissare le idee, ad una $V_n$ di curvatura costante $= 1$, ciò che è lecito senza pregiudizio della generalità, ogniqualvolta (come nella questione analitica di cui intendiamo occuparci) non è necessario distinguere il reale dall'immaginario. La nostra $V_n$ si può in conformità risguardare come una ipersfera di uno spazio euclideo a $n+1$ dimensioni, rappresentato in coordinate cartesiane dalla equazione

$$\sum_{1}^{n+1}{}_\nu\, y_\nu^2 = 1. \tag{16}$$

Nel caso presente è forse vantaggioso non ricorrere a coordinate intrinseche della $V_n$, immaginandone sia i punti che le direzioni definiti per mezzo dei loro elementi determinativi nello spazio euclideo ambiente: i punti per mezzo delle loro coordinate cartesiane $y_\nu$ vincolate dalla (16); le direzioni ($\alpha$), per mezzo dei loro coseni direttori $\alpha_\nu$, legati, oltre che da

$$\sum_{1}^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu^2 = 1, \tag{17}$$

anche dalla condizione

$$\sum_{1}^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu = 0 \tag{18}$$

di appartenenza a $V_n$ (cioè all'iperpiano tangente).

Data in $V_n$ una linea geodetica $C$, esaminiamo come devono variare le $\alpha_\nu(s)$ lungo $C$ perchè ne rimangano individuate direzioni parallele (in $V_n$). Riprendiamo perciò la ($I$) del § 2 e notiamo che i vincoli (1) sono ora rappresentati dalla sola equazione (16). Il classico procedimento di LAGRANGE consente senz'altro di sostituire alla ($I$) le equazioni esplicite

$$\alpha'_\nu = \mu y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{19}$$

in cui $\mu$ designa un moltiplicatore a priori indeterminato.

Se ne deve far sistema colla (18), risultandone così definite tanto le $\alpha$ quanto la

[12]) Anche a questo proposito si intenderà ripetuta l'avvertenza della nota [10]).

$\mu$. La (17) è poi effettivamente compatibile colle (18), (19), poichè da queste segue

$$\frac{d}{ds}\sum_{1}^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu^2 = 2\sum_{1}^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu \alpha'_\nu = 2\mu\sum_{1}^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu y_\nu = 0.$$

Ciò posto, teniamo presente che, $\psi$ essendo l'angolo fra $(\alpha)$ e $C$,

$$\cos\psi = \sum_{1}^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu y'_\nu,$$

e che (§ 8) quest'angolo si conserva costante (al variare di $s$) in virtù dell'ipotesi che $C$ sia geodetica.

Ora la (18), derivando e badando alle (19) e (16), dà

$$\mu + \cos\psi = 0,$$

sicchè le (19) assumono la forma

$$\alpha'_\nu = -\cos\psi . y_\nu,$$

e la determinazione dei coseni $\alpha_\nu$ appare ridotta a quadrature. In realtà non ce n'è neppur bisogno. Basta osservare in primo luogo che, per $\cos\psi = 0$, cioè *per le direzioni ortogonali a* $C$, risulta $\alpha'_\nu = 0$, sicchè *il parallelismo in* $V_n$ *è caratterizzato dalla costanza delle* $\alpha_\nu$ *e coincide quindi col parallelismo ordinario nello spazio ambiente. Quanto alle direzioni non ortogonali a* $C$, si può ricorrere all'enunciato finale del § 6 desumendone che *la condizione di parallelismo (entro* $V_n$*) consiste nel formare gli stessi angoli sia con C che con* $n - 1$ *direzioni fisse (indipendenti) ortogonali a* $C$, *nonchè, ben si intende, tangenti all'ipersfera* (16).

Consideriamo in particolare una $V_3$. Il comportamento or ora rilevato di direzioni parallele, uscenti ortogonalmente dai punti di una stessa geodetica $C$, rende manifesto che non c'è rapporto col cosidetto parallelismo di CLIFFORD. Infatti, se si considerano $\infty^1$ geodetiche, parallele secondo CLIFFORD, spiccate dai punti di una geodetica $C$, queste risultano bensì normali alla $C$, ma le loro tangenti *non* sono parallele nello spazio ambiente [13]).

## § 11.

## Riduzione delle equazioni di parallelismo al tipo emisimmetrico.

Il sistema differenziale $(I_a)$ ammette (§ 6) un integrale quadratico. Ciò consente

[13]) Per giustificare questa affermazione, si può ragionare come segue.

Si ricorda anzitutto [L. BIANCHI, loc. cit. [1]), pag. 446] che le geodetiche costituenti una congruenza di CLIFFORD sono rappresentate parametricamente da formule del tipo

$$(1) \qquad y_\nu = a_\nu \cos s + \sin s \sum_{1}^{4}{}_\rho c_{\nu\rho} a_\rho \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

dove il parametro $s$ si identifica coll'arco, i coefficienti costanti $c_{\nu\rho}$, caratteristici della congruenza, soddi affermare [14]) che è possibile, con una conveniente trasformazione lineare delle incognite, ridurre il sistema stesso alla forma emisimmetrica

$$(II)\qquad \frac{d\zeta_h}{ds} = \sum_1^n {}_k\, p_{hk}\zeta_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

caratterizzata dalle relazioni

$$(20)\qquad p_{hk} + p_{kh} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

fra i coefficienti (i quali del resto si suppongono funzioni qualunque di $s$). All'uopo basta che la trasformazione lineare fra le $\xi^{(i)}$ e le $\zeta_h$ attribuisca all'integrale quadratico la forma canonica

$$\sum_1^n {}_h\, \zeta_h^2 = \text{cost.}$$

Per raggiungere concretamente l'intento, illustrando nel tempo stesso la trasformazione sotto l'aspetto geometrico, conviene procedere come segue.

Da ogni punto $P$ della $C$, immaginiamo spiccate (con criterio arbitrario) $n - 1$ direzioni che, assieme a quella di $C$, costituiscano un'ennupla ortogonale $\Omega$. Facendo corrispondere queste direzioni ai numeri $1, 2, \ldots, n-1$, indichiamo, per l'$h^{\text{esima}}$, con $\lambda_h^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i parametri, cioè il sistema coordinato contravariante, e con $\lambda_{h/i}$

---

disfanno alla duplice condizione di emisimmetria ($c_{\nu\rho} + c_{\rho\nu} = 0$) e di ortogonalità; le $a_\nu$ (valori iniziali delle $y_\nu$) sono legate dalla (16), variando del resto (in tutti i modi possibili) dall'una all'altra delle varie geodetiche della congruenza.

Moltiplichiamo le (1) per $c_{\mu\nu}$, e sommiamo rispetto all'indice $\nu$ da 1 a 4. Attese le identità

$$\sum_1^4 {}_\nu\, c_{\mu\nu}c_{\nu\rho} = -\sum_1^4 {}_\nu\, c_{\mu\nu}c_{\rho\nu} = -\varepsilon_{\mu\rho} \qquad (\mu, \rho = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon_{\mu\rho} = 0 \text{ per } \mu \neq \rho \text{ ed } = 1 \text{ per } \mu = \rho),$$

si ha subito (cambiando a calcolo eseguito $\mu$ in $\nu$ e $\nu$ in $\rho$)

$$(2)\qquad \sum_1^4 {}_\rho\, c_{\nu\rho}y_\rho = \cos s \sum_1^4 {}_\rho\, c_{\nu\rho}a_\rho - a_\nu \sin s \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

I coseni direttori di una qualunque delle curve (1) (in un suo punto generico) sono evidentemente rappresentati dalle derivate delle $y_\nu$ rapporto all'arco:

$$y'_\nu = -a_\nu \sin s + \cos s \sum_1^4 {}_\rho\, c_{\nu\rho}a_\rho,$$

le quali, in virtù delle (2), possono esprimersi in funzione delle coordinate $y_\nu$ (del punto da cui si immagina spiccata la geodetica della congruenza) sotto la forma

$$y'_\nu = \sum_1^4 {}_\rho\, c_{\nu\rho}y_\rho \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Siccome il determinante delle $c_{\nu\rho}$ non si annulla (il suo valore assoluto è 1), così a due punti diversi non possono *mai* corrispondere gli stessi coseni. È dunque escluso che vi sia una $C$, da tutti i punti della quale escano geodetiche di una congruenza di CLIFFORD sotto eguale direzione. C. D. D.

[14]) Cfr. per es. DARBOUX, loc. cit. [6]).

i momenti (sistema coordinato covariante). Per uniformità di notazione, attribuiremo l'indice $n$ alla direzione di $C$ che completa l'ennupla, e porremo in conformità

$$x'_i = \lambda_n^{(i)}, \qquad \sum_1^n {}_j a_{ij} x'_j = \lambda_{n/i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Varranno perciò le relazioni caratteristiche delle ennuple ortogonali

$$\sum_1^n {}_i \lambda_{h/i} \lambda_k^{(i)} = \varepsilon_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

col solito significato delle $\varepsilon_{hk}$ (0 per $h \neq k$, 1 per $h = k$).

La $\Omega$, e per essa le varie $\lambda$, vanno naturalmente considerate (al pari delle $x_i$, $x'_i$) funzioni note di $s$.

Ciò premesso, ecco come si esplicita la voluta trasformazione lineare. Si assumono come elementi determinativi delle direzioni parallele, al posto dei parametri $\xi^{(i)}$ (o degli elementi reciproci $\xi_i$) i coseni $\zeta_h$ degli angoli che vengono a formarsi in ogni punto colle direzioni dell'ennupla. L'identità geometrica

$$\sum_1^n {}_h \zeta_h^2 = 1$$

assicura senz'altro che si arriverà ad un sistema trasformato emisimmetrico. Sviluppiamo anche il calcolo onde procurarci l'espressione esplicita dei coefficienti $p_{hk}$.

Le nuove incognite $\zeta_h$ sono, per loro definizione, legate alle $\xi^{(i)}$, o rispettivamente alle $\xi_i$, dalle equazioni

$$\zeta_h = \sum_1^n {}_i \xi^{(i)} \lambda_{h/i}, \tag{$23_a$}$$

$$\zeta_h = \sum_1^n {}_i \xi_i \lambda_h^{(i)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{$23_b$}$$

In base alle (22), queste possono essere risolute sotto le forme rispettive

$$\xi^{(i)} = \sum_1^n {}_k \zeta_k \lambda_k^{(i)}, \tag{$24_a$}$$

$$\xi_i = \sum_1^n {}_k \zeta_k \lambda_{k/i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{$24_b$}$$

Deriviamo le ($23_a$) rapporto ad $s$, badando alle ($I_a$) [in cui, a norma delle (21), si scriva $\lambda_n^{(j)}$ per $x'_j$], e sostituendo nei secondi membri (a derivazione eseguita), in luogo delle $\xi^{(i)}$ (o $\xi^{(l)}$), i valori ($24_a$). Ove per brevità si ponga

$$p_{hk} = \sum_1^n {}_i \frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} - \sum_1^n {}_{ijl} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \lambda_k^{(l)} \lambda_{h/i} \qquad (h, k = 1\ 2, \ldots, n), \tag{$25_a$}$$

si è evidentemente condotti alle ($II$). Però i valori ($25_a$) dei coefficienti non mettono in diretta evidenza il carattere emisimmetrico di cui, per le precedenti osservazioni, devono essere necessariamente dotati. Si potrebbe farlo scaturire con trasformazioni materiali, tenendo conto delle (22) e della struttura dei simboli di CHRISTOFFEL. Ma la verificazione si fa più comodamente, notando che le stesse equazioni differenziali nelle $z_h$, cui siamo testè pervenuti, si devono pur ricavare operando collo stesso criterio, anzichè sulle $(23_a)$, $(24_a)$, $(I_a)$, sulle equivalenti $(23_b)$, $(24_b)$, $(I_b)$. Il calcolo fatto a questo modo porge per i coefficienti $p_{hk}$ le nuove espressioni

$$(25_b) \qquad p_{hk} = \sum_1^n {}_i \frac{d\lambda_h^{(i)}}{ds} \lambda_{k/i} + \sum_1^n {}_{ijl} \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \lambda_{k/l} \lambda_h^{(i)} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dal confronto delle $(25_a)$ colle $(25_b)$ scende l'annunciata riprova formale.

Infatti, sommando l'espressione di $p_{hk}$ data dalle $(25_a)$ con quella di $p_{kh}$ data dalle $(25_b)$, i due $\sum_{ijl}$ si elidono identicamente (come si constata, scambiando in uno di essi gli indici $i$ ed $l$), e rimane

$$p_{hk} + p_{kh} = \sum_1^n {}_i \left( \frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} + \frac{d\lambda_k^{(i)}}{ds} \lambda_{h/i} \right),$$

che va pure a zero, in virtù delle (22).

Il sistema lineare (*II*) a determinante gobbo costituisce un'evidente generalizzazione di quello che si incontra nella cinematica dei corpi rigidi per determinare il moto degli assi solidali, quando è assegnata la velocità angolare. Circa la teoria di questi sistemi differenziali rimandiamo ai lavori già citati nell'introduzione [note [4]) a [7])]. Vogliamo tuttavia rilevare qualche proprietà elementare:

1° Eseguendo sulle incognite $z_h$ una sostituzione ortogonale arbitraria (a coefficienti dipendenti comunque da $s$), il sistema trasformato è dello stesso tipo. La dimostrazione scende subito dall'osservare che l'integrale quadratico $\sum_1^n {}_h z_h^2 = \text{cost.}$ [la cui esistenza è caratteristica pei sistemi emisimmetrici (*II*)] conserva inalterata la sua forma quando si sottopongono le $z_h$ a trasformazioni ortogonali.

2° Se la $C$ è geodetica, le equazioni di parallelismo $(I_a)$ sono soddisfatte (cfr. § 7) da $\xi^{(i)} = x'_i = \lambda_n^{(i)}$, e per conseguenza [a tenore delle (22) e $(23_a)$] le (*II*) da

$$(26) \qquad z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad z_n = 1.$$

Ciò esige

$$(27) \qquad p_{hn} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1),$$

per qualunque valore di $s$. Reciprocamente, se sussistono le (27), le equazioni (*II*) ammettono la soluzione (26), e la $C$ è geodetica.

3° Sempre nell'ipotesi di $C$ geodetica, la riduzione del sistema (*II*) in base alla conoscenza della soluzione particolare (26) è, per così dire, automatica. Infatti, in virtù delle (27), le prime $n-1$ equazioni (*II*) sono esenti da $z_n$, e l'$n^{\text{esima}}$ si riduce a $\frac{dz_n}{ds} = 0$.

4° Qualunque sia $C$, se si conoscono $m$ direzioni parallele indipendenti, cioè $m$ soluzioni indipendenti delle originarie equazioni $(I_a)$, si sa dalla teoria generale dei sistemi lineari che è possibile una riduzione di $m$ unità. Vogliamo far vedere che la riduzione effettiva si raggiunge qui ancora in modo semplicissimo. Ed ecco come.

Si comincia (sfruttando l'osservazione finale del § 6) col normalizzare le $m$ soluzioni conosciute, deducendone altrettante mutuamente ortogonali (il che si fa con operazioni razionali). Si immagina poi di sostituire all'originaria ennupla di direzioni $\Omega$ associata ad ogni punto di $C$ (che comprende la direzione di $C$ e altre $n-1$ ad essa ortogonali) una nuova ennupla ortogonale $\Omega^*$, in cui figurino le nostre $m$ direzioni provenienti per ortogonalizzazione dalle soluzioni conosciute.

I coseni direttori $\zeta_h^*$ (di una direzione qualsiasi) rispetto ad $\Omega^*$ risultano legati ai coseni direttori $\zeta_h$, che si riferiscono alla $\Omega$, da una sostituzione ortogonale. Il sistema $(II)$, trasformato nelle $\zeta_h^*$ (che conserva il tipo emisimmetrico), viene così ad ammettere, per costruzione, $m$ soluzioni distinte del tipo: $n-1$ delle $\zeta^*$ nulle e l'$n^{\text{esima}}$ eguale all'unità. Supposto che questa sia, per le $m$ soluzioni di cui si tratta, rispettivamente $\zeta_n^*, \zeta_{n-1}^*, \ldots, \zeta_{n-m+1}^*$, si riconosce subito che deve annullarsi ogni $p_{hk}$ per

$$h = 1, 2, \ldots, n-m, \quad k = n-m+1, \quad n-m+2, \ldots, n,$$

sicchè le prime $n-m$ equazioni trasformate costituiscono un sistema ridotto (sempre di tipo emisimmetrico) comprendente soltanto le incognite $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \ldots, \zeta_{n-m}^*$, C. D. D.

## § 12.

## Spazi a tre dimensioni.

Per $n=3$, il sistema $(II)$ è propriamete quello da cui dipende la teoria del triedro mobile [15]): non c'è che da mettere in luce la diversa interpretazione dei risultati, con riguardo al parallelismo in una $V_3$, lungo una assegnata curva $C$. Limitiamoci al caso più semplice, in cui la $C$ è geodetica. Per l'osservazione 3ª del § precedente, il sistema differenziale $(II)$ in $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ si riduce in questo caso (a $\zeta_3 = \text{cost.}$, associato) al sistema binario

$$\frac{d\zeta_1}{ds} = p_{12}\zeta_2, \qquad \frac{d\zeta_2}{ds} = p_{21}\zeta_1.$$

Attesa la relazione $p_{12}+p_{21}=0$, si ha l'integrale $\zeta_1^2+\zeta_2^2 = \text{cost.}$; designando la costante con $r^2$, potremo porre in conformità $\zeta_1 = r\cos\vartheta$, $\zeta_2 = r\sin\vartheta$, con che si ottiene una sola equazione in $\vartheta$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = p \qquad (p = -p_{12} = p_{21}).$$

15) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2ᵉ édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), Chap. II, pp. 27-41.

Come si vede, siamo ricondotti ad una semplice quadratura.

## § 13.

## Legame delle $p_{hk}$ coi coefficienti di rotazione di Ricci.

Supponiamo che la $C$ faccia parte di una congruenza (assegnata, ma qualunque) di curve in $V_n$. In tale ipotesi le $\lambda_n^{(i)}$ e così le $\lambda_{n/i}$ possono risguardarsi come funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le quali, lungo $C$, si riducono, pel tramite delle (3), alle funzioni di $s$ precedentemente considerate (§ 11).

A questa congruenza, di cui fa parte la $C$, immaginiamo di associarne altre $n-1$ in modo da costituire un'ennupla ortogonale, coll'unica condizione di identificarsi con $\Omega$ nei punti di $C$; e sieno $\lambda_h^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\lambda_{h/i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i rispettivi sistemi coordinati contravariante e covariante.

Si avrà così, lungo $C$,

$$\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} x'_j = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)},$$

e la ($25_a$) (scambiando nel secondo termine i due indici di sommatoria $i$ ed $l$) potrà essere scritta

$$p_{hk} = \sum_1^n {}_{ij} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)} \left[ \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} - \sum_1^n {}_l \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_{h/l} \right].$$

Nella quantità in parentesi riconosciamo la derivata covariante [16]) $\lambda_{h/ij}$, talchè, ricordando le formule di definizione *dei coefficienti di rotazione,*

$$\gamma_{hkn} = \sum_1^n \lambda_{h/ij} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)},$$

si è condotti alla conclusione

$$p_{hk} = \gamma_{hkn} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ora si sa che $\gamma_{hkn}\, ds$ ammette, in quanto coefficiente di rotazione, l'interpretazione seguente: Quando l'origine dell'ennupla $\Omega$ si sposta di $ds$ lungo $C$, passando da un punto generico $P$ ad un punto vicinissimo $P'$, la direzione $h$ [17]) in $P'$ non rimane in generale ortogonale alla direzione $k$ corrispondente al punto $P$, ma forma con essa l'angolo $\frac{\pi}{2} - \gamma_{hkn}\, ds$.

Identica interpretazione compete pertanto a $p_{hk}\, ds$, e così, anche sotto questo aspetto

---

[16]) Cfr. Ricci et Levi-Civita, loc. cit. [11]).

[17]) Si vuol dire la direzione definita dai parametri $\lambda_h^{(i)}$ (o dai momenti $\lambda_{h/i}$).

geometrico, si ravvisa nei sistemi $(II)$ la generalizzazione della teoria elementare del triedro mobile.

## § 14.

## Varietà con una congruenza di curve parallele rispetto a qualsivoglia trasversale.

Sia $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il sistema coordinato covariante di una congruenza di curve in $V_n$. Vogliamo provarci a supporre che le curve di questa congruenza siano incondizionatamente parallele, ossia che soddisfino alle condizioni di parallelismo lungo qualsiasi linea $C$. Scegliendo in particolare per $C$ una linea della congruenza, appare intanto che questa deve essere costituita da geodetiche (§ 7). In generale, tutto si riduce ad esprimere che le equazioni di parallelismo (in una qualunque delle forme loro attribuite), per es. le $(I_b)$, sono verificate in ogni punto di $V_n$ [18]) e per qualsiasi direzione $x'_j$. Dacchè, esplicitando le $\frac{d\xi_i}{ds}$, le $(I_b)$ si scrivono

$$\sum_1^n {}_j\, x'_j \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_1^n {}_l \begin{Bmatrix} ij \\ l \end{Bmatrix} \xi_l\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le $\xi_i$ dovranno verificare le $n^2$ equazioni

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_1^n {}_l \begin{Bmatrix} ij \\ l \end{Bmatrix} \xi_l = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

le quali stanno ad esprimere che si annulla identicamente il sistema covariante $\xi_{ij}$ primo derivato del sistema $\xi_i$.

Dalle (28) segue in particolare

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i},$$

donde apparisce che le $\xi_i$ sono le derivate di una medesima funzione $F$. Perciò la (13), o, se si vuole, la equivalente

$$\sum_1^n {}_{ij}\, a^{(ij)} \xi_i \xi_j = 1,$$

diviene

$$\Delta F = 1 \qquad (\Delta \text{ parametro differenziale di } 1^\circ \text{ ordine}),$$

mostrandoci che le ipersuperficie $F = \text{cost.}$ (di cui le curve della nostra congruenza costituiscono le traiettorie ortogonali) sono geodeticamente parallele.

---

[18]) Si intende, al solito, di quel campo di $V_n$ che si considera, entro cui si suppongono soddisfatte debite limitazioni qualitative.

Assumiamo per semplicità la funzione $F$ come coordinata $x_n$, associandole, come coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $n - 1$ integrali indipendenti della equazione

$$\nabla(x_n, \Theta) = 0 \qquad (\nabla \text{ parametro differenziale misto}),$$

con che le ipersuperficie coordinate $x_h = \text{cost.}$ $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ sono ortogonali alle $x_n = \text{cost.}$ Potremo in conformità ritenere

$$(29) \qquad a^{(nj)} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad a^{(nn)} = 1,$$

nonchè

$$\xi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \xi_n = 1;$$

e le (28) si ridurranno a

$$\begin{Bmatrix} ij \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

o addirittura, badando alle identità

$$\begin{Bmatrix} ij \\ n \end{Bmatrix} = \sum_1^n {}_h a^{(hn)} a_{ij,h}$$

e alle (29), alle seguenti:

$$a_{ij,n} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ove si noti che le (29) equivalgono alle analoghe relative agli elementi reciproci:

$$(29') \qquad a_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \quad a_{nn} = 1,$$

e si tenga presente che

$$a_{ij,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{nj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}\right),$$

risulta in definitiva

$$(28') \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Le (29′) e (28′) mettono in evidenza che *il $ds^2$ assume la forma*

$$(30) \qquad dx_n^2 + d\sigma^2,$$

designando $d\sigma^2$ il quadrato di un arbitrario elemento lineare nelle $n - 1$ variabili $x_1$, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ (a coefficienti indipendenti da $x_n$).

Siccome [19]) la forma (30) è caratteristica per le varietà che posseggono una semplice infinità di *superficie geodetiche* [20]), così riconosciamo che *sono in ogni caso conco-*

[19]) Cfr. J. HADAMARD, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions* [Bulletin des Sciences Mathématiques, t. XXV (1901), pp. 37-40].

[20]) Si dicono superficie geodetiche quelle (eventuali) varietà a $n-1$ dimensioni immerse in una $V_n$, le quali contengono tutta intera la geodetica di $V_n$, che congiunge due loro punti qualisivogliano.

*mitanti per una varietà $V_n$ le due proprietà di ammettere $\infty^1$ superficie geodetiche e di contenere una congruenza a parallelismo completo.*

§ 15.

## Differenziali di 2° ordine — Determinazioni invariantive — Lemma di Ricci.

In una data ricerca, sieno fissate le variabili indipendenti, per es. $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Come si sa dal calcolo, è sempre lecito risguardarne nulli i differenziali secondi $d^2 x_1$, $d^2 x_2, \ldots, d^2 x_n$. Una tale convenzione non ha però carattere invariantivo di fronte ai cambiamenti di variabili. Infatti, se si sostituiscono alle $x_i$ $n$ loro combinazioni indipendenti $\mathfrak{x}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, i differenziali secondi

$$d^2\mathfrak{x}_i = \sum_{1}^{n}{}_{jl} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_i}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l$$

(calcolati in base alla ipotesi $d^2 x_i = 0$) risultano in generale diversi da zero.

Se si associa alle variabili una forma differenziale quadratica, riferendosi per es. alla metrica di una $V_n$ (colle notazioni dei §§ precedenti), diviene agevole una caratterizzazione invariantiva. Basta assumere i $d^2 x_i$ (non nulli, ma) definiti come segue:

$$d^2 x_i + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} dx_j dx_l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dalle equazioni delle geodetiche (§ 7), moltiplicate per $ds^2$, apparisce che tali $d^2 x_i$ sono quelli che spettano alle variabili lungo la geodetica spiccata dal punto generico $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nella direzione pure generica $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$. Questa interpretazione geometrica assicura a priori che la convenzione suaccennata possiede il voluto carattere invariantivo, senza rendere necessaria una verifica materiale, che si potrebbe del resto effettuare in modo ovvio.

Analogamente per la sovrapposizione di due sistemi indipendenti di incrementi $dx_i$ e $\delta x_i$. Si potrebbe porre $d\delta x_i = \delta d x_i = 0$, ma, mentre l'invertibilità degli incrementi $d$ e $\delta$ possiede, come facilmente si riconosce, carattere invariantivo, lo stesso non è delle posizioni $d\delta x_i = 0$. Noi le sostituiremo con

(31) $$d\delta x_i + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} dx_l \delta x_j = 0,$$

le quali implicano

(31') $$d\delta x_i = \delta d x_i,$$

e contengono come caso particolare, per $d = \delta$, le precedenti espressioni dei $d^2 x_i$.

L'invarianza delle (31), di fronte ai cambiamenti di variabili, può qui ancora essere desunta dalla interpretazione geometrica. Basta osservare che, ponendo materialmente $\delta x_i = \varepsilon \xi^{(i)}$ (con $\varepsilon$ costante infinitesima) le (31) si identificano colle $(I_a)$, talchè esprimono come devono alterarsi le $\delta x_i$, per effetto dello spostamento $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, onde definire direzioni parallele fra loro. Questa proprietà invariantiva, oltre che con una verificazione diretta, si potrebbe controllare con un elegante artificio formale accennato da RIEMANN [21]) e reso esplicito da WEBER [22]).

Dalle (31), tenuto presente che

$$d a_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} d x_j = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_j (a_{ij,k} + a_{jk,i}) d x_j = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left[ a_{lk} \begin{Bmatrix} i j \\ l \end{Bmatrix} + a_{li} \begin{Bmatrix} j k \\ l \end{Bmatrix} \right] d x_j ,$$

scende identicamente

$$(32) \qquad d \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} \delta x \ \ \delta x_k = 0,$$

come pure

$$d \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} d x_h \delta x_k = 0.$$

Queste relazioni equivalgono al risultato ben noto di calcolo differenziale assoluto che si annulla identicamente il sistema derivato covariante dei coefficienti $a_{ik}$ della forma fondamentale (lemma di RICCI).

## § 16.

## Differenziali d'ordine superiore. Invariante, che compendia i simboli di RIEMANN, fornendone nel modo più diretto l'espressione esplicita.

Mercè applicazione ripetuta delle (31), rimangono senz'altro definiti (in funzione dei differenziali primi, dei simboli di CHRISTOFFEL, e loro derivate) anche differenziali superiori del tipo $d' \delta d x_i$, $\delta d' d x_i$, il simbolo $d'$ dovendo naturalmente trattarsi alla stessa stregua di $d$ e $\delta$.

Non si può affermare che $d' \delta d x_i$ coincida con $\delta d' d x_i$, anzi il calcolo effettivo mostra che ciò non è. Le differenze

$$(33) \qquad u^{(i)} = d' \delta d x_i - \delta d' d x_i$$

posseggono tuttavia la notevole proprietà di costituire un sistema contravariante.

Per dimostrarlo, prendiamo in considerazione un sistema covariante ausiliario $p_i$, costituito da $n$ funzioni delle $x$ (senza intervento di differenziali), e partiamoci dall'osservare che (in quanto il sistema $p_i$ si suppone covariante)

$$\sum_{1}^{n} p_i d x_i$$

---

[21]) l. c. [2]), p. 381.

[22]) l. c. [2]), p. 388.

è un invariante. Lo è quindi (per essere del pari invarianti gli operatori $d'$ e $\delta$) anche la differenza

$$G = d'\delta\sum_1^n{}_i p_i\, dx_i - \delta d'\sum_1^n{}_i p_i\, dx_i = d'\sum_1^n{}_i(\delta p_i\, dx_i + p_i\,\delta dx_i) - \delta\sum_1^n{}_i(d'p_i\, dx_i + p_i\, d'dx_i).$$

Sviluppando materialmente, e tenendo presente che, per le (31'),

$$d'\delta p_i = \delta d' p_i,$$

si ha

$$G = \sum_1^n{}_i p_i(d'\delta dx_i - \delta d' dx_i) = \sum_1^n{}_i p_i u^{(i)},$$

donde apparisce che anche $\sum_1^n{}_i p_i u^{(i)}$ è un invariante. Da questa invarianza e dall'arbitrarietà delle $p_i$ (che sono funzioni delle $x$, vincolate soltanto a trasformarsi con legge covariante quando si eseguisce un cambiamento di variabili) segue la contravarianza del sistema $u^{(i)}$ definito dalle (33). C. D. D.

Risulta quindi invariante

$$I = \sum_1^n{}_{ik} a_{ik} u^{(i)} \delta' x_k, \tag{34}$$

rappresentando $\delta' x_k$ un arbitrario sistema di incrementi delle variabili.

Dacchè le (31) porgono

$$d'\delta dx_i = -d'\sum_1^n{}_{jl}\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_j\,\delta x_l$$

$$= -\sum_1^n{}_{jlh}\frac{\partial\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} d'x_h\, dx_j\,\delta x_l - \sum_1^n{}_{jl}\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}(d'dx_j\,\delta x_l + dx_j\, d'\delta x_l),$$

$$\delta d' dx_i = -\delta\sum_1^n{}_{jl}\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_j\, d'x_l$$

$$= -\sum_1^n{}_{jlh}\frac{\partial\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h}\delta x_h\, dx_j\, d'x_l - \sum_1^n{}_{jl}\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}(\delta dx_j\, d'x_l + dx_j\,\delta d'x_l),$$

per sottrazione (dopo aver scambiato $h$ ed $l$ nella prima sommatoria) si ricava

$$u^{(i)} = d'\delta dx_i - \delta d' dx_i$$

$$= \sum_1^n{}_{jlh}\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial\begin{Bmatrix} jh \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_l}\right] dx_j\, d'x_l\,\delta x_h - \sum_1^n{}_{jl}\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}(d'dx_j\,\delta x_l - \delta dx_j\, d'x_l).$$

Dalle (31) si ha ancora

$$d'dx_j = -\sum_1^n{}_{ht}\begin{Bmatrix} ht \\ j \end{Bmatrix} dx_h\, d'x_t, \qquad \delta dx_j = -\sum_1^n{}_{ht}\begin{Bmatrix} ht \\ j \end{Bmatrix} dx_h\,\delta x_t,$$

talchè, scambiando gli indici in modo da poter raccogliere a fattor comune $dx_j\, d'x_l\,\delta x_h$, emerge

$$-\sum_{jl}^{n}\left\{ {jl \atop i} \right\}(d'dx_j\delta x_l-\delta dx_j d'x_l)=\sum_{jlh}^{n} dx_j d'x_l \delta x_h \sum_t^{n}\left[\left\{ {th \atop i} \right\}\left\{ {jl \atop t} \right\}-\left\{ {tl \atop i} \right\}\left\{ {jh \atop t} \right\}\right],$$

e si ottiene infine

$$u^{(i)}=\sum_{jlh}^{n} dx_j d'x_l \delta x_h \{ji,\ lh\}, \tag{35}$$

designandosi con

$$\{ji,\ lh\}=\frac{\partial\left\{ {jl \atop i} \right\}}{\partial x_h}-\frac{\partial\left\{ {jh \atop i} \right\}}{\partial x_l}+\sum_t^{n}\left[\left\{ {jl \atop t} \right\}\left\{ {th \atop i} \right\}-\left\{ {jh \atop t} \right\}\left\{ {tl \atop i} \right\}\right] \tag{36}$$

i simboli di RIEMANN di 2ª specie.

Ove si passi a quelli di 1ª specie col porre

$$a_{jk,lh}=\sum_i^{n} a_{ik}\{ji,\ lh\}, \tag{37}$$

la espressione (34) di $I$, in base alle (35), diviene

$$I=\sum_{jlhk}^{n} a_{jk,lh}\, dx_j d'x_l \delta x_h \delta' x_k \tag{34'}$$

e mette direttamente in evidenza il carattere covariante dei simboli (37). Se non erro, è questo il modo più rapido per arrivarvi. Quanto alle proprietà dei simboli stessi, compendiabili nelle formule

$$a_{jk,lh}=-a_{jk,hl},$$
$$a_{jk,lh}=a_{lh,jk},$$

non resta che riportarsi alla trattazione ordinaria, desumendole (la prima immediatamente, la seconda con qualche trasformazione) dalle formule di definizione.

Dobbiamo invece rivolgere la nostra attenzione alla interpretazione geometrica dell'invariante $I$ nel caso particolarmente importante in cui i differenziali indipendenti si riducono a due, coincidendo $d'$ con $d$ e $\delta'$ con $\delta$.

## § 17.

## Parallelogrammoidi — Base e soprabase. Sviluppo delle coordinate dei vertici a partire dalla base.

Sia $PQ$ un generico arco di geodetica nella nostra $V_n$. Dai punti $P$ e $Q$ immaginiamo spiccate due altre geodetiche in direzioni parallele. Esse formeranno (§ 8) con $PQ$ uno stesso angolo $\psi$. Si assumano su queste geodetiche due archi eguali

$$PP'=QQ'=ds,$$

e si congiungano anche $P'$ e $Q'$ con un arco di geodetica. Si ottiene così un quadrangolo geodetico che chiameremo *parallelogrammoide* designandone i due lati opposti $PQ$ e $P'Q'$ come *base* e *soprabase.*

Indicheremo con $x_i^{(P)}$, $x_i^{(Q)}$, $x_i^{(P')}$, $x_i^{(Q')}$ le coordinate dei quattro vertici $P$, $Q$, $P'$, $Q'$; con $\xi_P^{(i)}$, $\xi_Q^{(i)}$ i parametri di direzione delle due geodetiche parallele nei loro punti di origine; con $\left\{ \begin{smallmatrix} j\,l \\ i \end{smallmatrix} \right\}_P$, $\left\{ \begin{smallmatrix} j\,l \\ i \end{smallmatrix} \right\}_Q$ i valori dei simboli di Christoffel in questi stessi punti.

Dalle equazioni delle geodetiche, a meno di termini d'ordine superiore al secondo in $ds$, si ha

$$(38)\qquad \begin{cases} x_i^{(P')} = x_i^{(P)} + ds\,\xi_P^{(i)} - \dfrac{1}{2} ds^2 \displaystyle\sum_1^n{}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\}_P \xi_P^{(j)} \xi_P^{(l)}, \\ x_i^{(Q')} = x_i^{(Q)} + ds\,\xi_Q^{(i)} - \dfrac{1}{2} ds^2 \displaystyle\sum_1^n{}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\}_Q \xi_Q^{(j)} \xi_Q^{(l)} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Designiamo con $\delta x_i$ le differenze $x_i^{(Q)} - x_i^{(P)}$, e in generale con $\delta f$ il divario fra le determinazioni di un qualsiasi elemento (numerico o geometrico) $f$, passando da $P$ a $Q$. Avremo per sottrazione dalle (38)

$$x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + ds\,\delta \xi^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2\, \delta \sum_1^n{}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(j)} \xi^{(l)}.$$

Siccome, per costruzione, $ds$ non si altera nel passaggio da $P$ a $Q$, così, ritenendolo infinitesimo, ponendo per brevità

$$dx_i = \xi_P^{(i)} ds,$$

e badando alla (31) per $\delta = d$, potremo anche scrivere

$$(39)\qquad Dx_i = x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + \delta d x_i + \frac{1}{2} \delta d^2 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Di qui appare che le differenze $Dx_i$ delle coordinate omologhe dei punti $P'$ e $Q'$ sono (colla convenuta approssimazione rispetto a $ds$) di prim'ordine rispetto alla variazione $\delta$: val quanto dire che, indicando con $\delta s$ l'arco $PQ$ e trattandolo come un infinitesimo (indipendente da $ds$), le differenze $Dx_i$ risultano anch'esse infinitesime di primo ordine (almeno) rispetto a $\delta s$. Le (39) ne forniscono pertanto una espressione che è esatta:

*fino al secondo ordine rispetto a* $ds$;

*fino al primo ordine rispetto a* $\delta s$.

Dal significato dei simboli $d$ e $\delta$, quali figurano nella (39), scende immediatamente che, come il $d^2$, anche i $\delta d$ e $\delta d^2$ si esplicitano in base alla (31). Ed è appena necessario avvertire che, a calcoli eseguiti, tutte le funzioni del posto vanno riferite al punto $P$.

## § 18.

## Lunghezza della soprabase — Curvatura.

Rappresentiamo con $a'_{ik}$ i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare in $P'$. Atteso il comportamento testè rilevato delle $Dx_i$, potremo risguardare

(40) $$\sum_1^n {}_{ik} a'_{ik} Dx_i Dx_k$$

come *espressione del quadrato della distanza* $\overline{P'Q'}^2$, *a meno di termini d'ordine superiore al secondo, rispetto sia a* $ds$ *che a* $\delta s$.

Giova riportare (colla stessa approssimazione) anche i valori $a'_{ik}$ al punto $P$. All'uopo basta sviluppare lungo la geodetica $PP'$, trascurando i termini in $ds^3$; si ha quindi

(41) $$a'_{ik} = a_{ik} + d a_{ik} + \frac{1}{2} d^2 a_{ik}.$$

Un analogo trasporto si può mettere in evidenza in una generica $Dx_i$, aggiungendo e togliendo il termine $\frac{1}{2} d^2 \delta x_i$ (e ricordando che $\delta d x_i = d\delta x_i$). Le (39) divengono in conformità

(39') $$Dx_i = D'\delta x_i - \tfrac{1}{2} v^{(i)},$$

dove

(42) $$D'\delta x_i = \delta x_i + d\delta x_i + \tfrac{1}{2} d^2 \delta x_i,$$

(43) $$v^{(i)} = d\delta dx_i - \delta d^2 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Come si vede, le $v^{(i)}$ sono di terz'ordine (secondo in $ds$ e primo in $\delta s$). Perciò la materiale sostituzione nella (40), a meno di termini d'ordine complessivo superiore al quarto, dà

$$\overline{P'Q'}^2 = \sum_1^n {}_{ik} a'_{ik} D'\delta x_i D'\delta x_k - \sum_1^n {}_{ik} a'_{ik} v^{(i)} D'\delta x_k.$$

In base alle (41), (42), e colla stessa approssimazione, il primo sommatorio può essere posto sotto la forma

$$\delta s^2 + d\delta s^2 + \tfrac{1}{2} d^2 \delta s^2,$$

dove

$$\delta s^2 = \overline{PQ}^2 = \sum_1^n {}_{ik} a_{ik} \delta x_i \delta x_k;$$

e il secondo sommatorio può essere ridotto a

$$J = \sum_1^n {}_{ik} a_{ik} v^{(i)} \delta x_k.$$

Ora, in virtù della (33), $d\delta s^2$ si annulla identicamente; lo stesso avviene quindi di $d^2 \delta s^2$. Rimane in conformità

(44) $$\overline{P'Q'}^2 = \overline{PQ}^2 - J,$$

ma resta da attribuire ad $J$ la sua espressione definitiva. Questa risulta dalla circostanza che, a norma delle (43), $J$ si può considerare come un caso particolare dell'invariante $I$ definito dalla (34): basta assumervi $d'$ coincidente con $d$ e $\delta'$ con $\delta$. Si ha perciò dalla (34')

$$J = \sum_{1}^{n}{}_{jlhk}\, a_{jk,lh}\, d x_j\, d x_l\, \delta x_h\, \delta x_k. \tag{45}$$

Siamo ormai in grado di fornire una caratterizzazione intrinseca della curvatura sotto la forma geometrica seguente:

*Costruito in $V_n$ un parallelogrammoide infinitesimo $P\,Q\,P'\,Q'$, si faccia il rapporto*

$$K = \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}{(d s\, \delta s \sin \psi)^2} \tag{46}$$

*fra la differenza dei quadrati della base e della soprabase e il quadrato dell'area del parallelogrammoide* [23]. *Questo rapporto, cioè, in virtù della* (44),

$$K = \frac{J}{(d s\, \delta s \sin \psi)^2} \tag{47}$$

*costituisce la curvatura riemanniana di $V_n$ in $P$ secondo la giacitura del parallelogrammoide.* La coincidenza colla espressione ordinaria [24]) scende dalla (45).

Una volta riconosciuto che $K$ dipende soltanto dal punto $P$ e dalla giacitura, si ha dalla (46) il corollario seguente: Tutti i parallelogrammoidi equivalenti che insistono sulla stessa base (e appartengono alla stessa giacitura) hanno soprabasi di eguale lunghezza.

Vorrei ancora rilevare, dal punto di vista sistematico, che il procedimento ora svolto, oltre a stabilire una nuova proprietà della curvatura riemanniana, presenta sulla trattazione ordinaria il vantaggio di evitare qualche sviluppo formale. Di solito infatti si definisce, in uno dei modi segnalati da GAUSS, la curvatura delle $V_2$; e si passa alle $V_n$, facendo intervenire le $V_2$ costituite dalle geodetiche di una stessa giacitura. Si richiede quindi un discreto calcolo per riconoscere che la curvatura riemanniana di queste $V_2$ è data dalla (47).

Se invece si adotta per $K$ la definizione geometrica (46), da un lato riesce più espressiva la traduzione analitica che porta alla (47); e dall'altro, valendo naturalmente la medesima definizione anche per $n = 2$, appare manifesto che la curvatura di $V_n$ desunta da un generico parallelogrammoide coincide con quella di qualsivoglia $V_2$, la quale (al limite) contenga lo stesso parallelogrammoide.

## NOTA CRITICA.

Già rilevammo nel § 15 che le espressioni (31)

$$d\delta x_i + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\} d x_j\, \delta x_l = 0$$

---

[23]) Più precisamente, di qualunque pezzo di superficie a due dimensioni avente il parallelogrammoide per contorno e tendente a zero con esso.

[24]) L. BIANCHI, loc. cit. [1]), pp. 341-342.

dei differenziali di 2° ordine non differiscono da quelle cui si perviene esplicitando la comprensiva definizione di RIEMANN.

Dallo stesso § risulta altresì che, con queste espressioni dei differenziali secondi, si ha identicamente (lemma di RICCI):

$$\delta d s^2 = d \delta s^2 = d \Phi = \delta \Phi = 0, \tag{48}$$

dove

$$\Phi = \sum_{1\,ik}^{n} a_{ik}\, d x_i\, \delta x_k,$$

e $ds^2$, $\delta s^2$ stanno, ben si intende, per

$$\sum_{1\,ik}^{n} a_{ik}\, d x_i\, d x_k \quad \text{e} \quad \sum_{1\,ik}^{n} a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k,$$

rispettivamente.

In questa condizione di cose non sembra ambiguo il significato da attribuire al trinomio considerato da RIEMANN:

$$R = \delta^2 d s^2 - 2\, d \delta \Phi + d^2 \delta s^2,$$

e un tale significato, in virtù della (48), implica necessariamente $R = 0$.

RIEMANN afferma invece [25]: « Haec expressio [cioè $R$] invenietur $= J$ » [avendo $J$ il valore (45)]. WEBER, nei suoi chiarimenti, si diffonde sul modo di introdurre i differenziali secondi [26], ma, dopo averne ricavata l'espressione esplicita, dice semplicemente [27]: « woraus man leicht den Ausdruck erhält $R = J$ ».

Probabilmente, nella $R$ di RIEMANN, c'è soltanto un qualche vizio di scrittura, che ne vela il concetto. Mi lusingo di aver sostanzialmente ricostruito tale concetto, ma non potei aggiustare il simbolo. Se la cosa è fattibile, sarà bene rendere, anche su questo particolare, piena giustizia al genio di RIEMANN.

Terminerò con una osservazione circa il calcolo della curvatura con riferimento a speciali variabili, che è indicato da RIEMANN [28] e sviluppato da WEBER [29]. Ecco intanto di che si tratta.

Si scelgano coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tali che, *in un determinato punto* $P$, si annullino tutti i simboli $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ (cosa sempre possibile, come è ben messo in evidenza da WEBER). Si considerino due sistemi indipendenti di differenziali $dx_i$, $\delta x_i$, risguardando

---

25) l. c. 2), p. 381.

26) Aggiungendo, senza alcuna giustificazione, le condizioni supplementari

$$d^2 \delta s^2 = \delta^2 d s^2 = -2\, d \delta \Phi.$$

In virtù delle (48) (e semprechè si debbano leggere le formule come effettivamente sono scritte), va tutto a zero.

27) l. c. 2), p. 388.

28) l. c. 2), p. 261.

29) l. c. 2), pp. 384-387.

nulli tutti i differenziali secondi $d^2 x_i$, $d\delta x_i$, $\delta d x_i$, $\delta^2 x_i$. Dicansi $P'$ e $Q$ i punti di coordinate $x_i + d x_i$, $x_i + \delta x_i$; $a'_{hk}$ i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare in $P'$. Posto in particolare

$$(\delta s^2)_{P'} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} a'_{hk} \delta x_h \delta x_k,$$

si applichi alle $a'$ lo sviluppo di TAYLOR rispetto agli incrementi $d$, fino al secondo ordine incluso. Con tale approssimazione si ha

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{hkjl} \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} d x_j d x_l \delta x_h \delta x_k,$$

il $\delta s^2$ e le derivate seconde riferendosi, ben si intende, a $P$. Come mostra WEBER, per il modo con cui sono state fissate le variabili, intercedono speciali relazioni fra i valori delle derivate seconde delle $a_{hk}$ in $P$. Tenendone conto, con qualche trasformazione, si trova

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{3} \sum_{1}^{n}{}_{hkjl} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial a_{hj}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_h \partial x_j} \right] d x_j d x_l \delta x_h \delta x_k.$$

Il sommatorio si può risguardare come l'espressione, che, in base alla formula (45), assume $-I$, quando si adottano le variabili $x$ particolarizzate come sopra si è detto.

Perciò, badando alla (47), ricaviamo

$$\frac{(\delta s^2)_{P'} - \delta s^2}{(d s \delta s \sin \psi)^2} = -\frac{1}{3} K, \tag{49}$$

che RIEMANN, nel passo citato, enuncia a parole (moltiplicando ambo i membri per 4, onde mettere in evidenza nel denominatore l'area del triangolo $PP'Q$).

Vengo finalmente alla mia osservazione.

Detto $Q^*$ l'estremo dell'elemento lineare $(\delta s)_{P'}$ (corrispondente agli incrementi $\delta x_i$), la (49) si scrive

$$\frac{\overline{P'Q^*}^2 - \overline{PQ}^2}{(d s \delta s \sin \psi)^2} = -\frac{1}{3} K; \tag{49'}$$

mentre la (46) (cambiata di segno) porge

$$\frac{\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2}{(d s \delta s \sin \psi)^2} = -K. \tag{46'}$$

I secondi membri stanno, come si vede, nel rapporto di 1 a 3. La non coincidenza è manifestamente dovuta al fatto che il punto $Q'$ (quarto vertice del parallelogrammoide), cui si perviene col procedimento invariante, è ben distinto dal punto $Q^*$ di RIEMANN, definito analiticamente con riferimento a speciali variabili.

Per localizzare il divario sulle formule, giova riferire (come è naturalmente permesso dato il carattere invariantivo) anche il nostro procedimento alle speciali variabili di RIEMANN. Le (31) danno allora, in quanto si riferiscono al punto $P$,

$$d^2 x_i = d\delta x_i = \delta d x_i = \delta^2 x_i = 0;$$

*ma non ne segue che debbano annullarsi nello stesso punto anche i differenziali superiori,* come $\delta d^2 x_i$, $d^2 \delta x_i$, ecc. Il calcolo di RIEMANN è invece basato sull'ipotesi che si annullino tutti i differenziali d'ordine superiore al primo: ipotesi anch'essa legittima, ma *non* dotata di carattere invariantivo (di fronte ai cambiamenti di variabili). Non deve dunque sorprendere che i risultati sieno diversi; si rileverà piuttosto la fortuita analogia delle formule (49') e (46'), i cui secondi membri differiscono soltanto per un fattore numerico.

Padova, novembre 1916.

TULLIO LEVI-CIVITA.