SULL'ELETTRODINAMICA DI MINKOWSKI.

Memoria di **Max Abraham** (Milano).

Adunanza del 23 gennajo 1910.

§ 1.

INTRODUZIONE.

In un precedente lavoro [1]) ho sviluppato un sistema dell'elettrodinamica dei corpi in movimento, il quale, conformandosi ai principî generali della teoria di MAXWELL e HERTZ, abbraccia le teorie moderne di E. COHN, H. A. LORENTZ e H. MINKOWSKI. Per il caso speciale della teoria di MINKOWSKI risultò un'espressione della forza ponderomotrice, che differisce dall'espressione data da MINKOWSKI stesso; affermai che quella espressione soddisfa al principio di relatività.

Nella presente Nota sarà provata questa affermazione. Premetterò, nel § 2, alcuni teoremi relativi ai vettori di quattro dimensioni, già contenuti essenzialmente nella Memoria di MINKOWSKI [2]) che saranno applicati in seguito; ho creduto essere utile di dare all'analisi vettoriale di quattro dimensioni una forma, che, adattandosi all'analisi tredimensionale, permette di scendere subito dalla varietà quattrodimensionale di spazio e tempo allo spazio tredimensionale.

Nel § 3 s'introducono grandezze, che chiamerò « *Tensori di quattro dimensioni* ». Essi sono una generalizzazione dei tensori [3]) tredimensionali, che caratterizzano, per esempio, lo stato di tensione di un corpo elastico. Il tensore quattrodimensionale, che occorre considerare nell'elettrodinamica, contiene, nelle sue dieci componenti, le sei componenti delle pressioni elettromagnetiche, le tre componenti della corrente d'energia e la densità dell'energia elettromagnetica. Sarà formato un tensore di quattro dimensioni, le cui componenti sono identiche ai valori delle pressioni, della corrente d'energia e

[1]) M. ABRAHAM, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVIII (2° sem. 1909), pp. 1-28].

[2]) H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1908, pp. 53-111].

[3]) M. ABRAHAM, *Geometrische Grundbegriffe* [Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, IV, 2, pp. 3-47].

della densità d'energia elettromagnetiche, dedotti nel mio lavoro citato dai principî generali dell'elettrodinamica dei corpi in movimento.

Ne risulta, che questi principî sono compatibili col postulato di relatività; la simmetria delle equazioni del campo elettromagnetico per lo spazio vuoto, che si esprime nella trasformazione di LORENTZ, può essere data anche alle equazioni elettromagnetiche per i corpi ponderabili, scrivendole, sia sotto la forma di MINKOWSKI sia sotto la forma equivalente di LORENTZ, senza contradire a quei principî.

MINKOWSKI ha già dato alle equazioni di movimento di un punto materiale una forma invariante per le trasformazioni di LORENTZ. Però, egli ha creduto necessario aggiungere alla forza elettromagnetica ponderomotrice una forza addizionale, incompatibile [4]) col mio sistema dell'elettrodinamica. Nel § 4 scriverò le equazioni di movimento così, che sodisfacciano al principio di relatività, senza introdurre la forza addizionale di MINKOWSKI. Invece bisogna ammettere, che la « densità di riposo » della massa non sia costante, ma che cresca ogni volta, quando la corrente elettrica sviluppa calore di JOULE nella materia; questa ipotesi fu già prima, da A. EINSTEIN e da M. PLANCK, messa in rapporto col principio di relatività.

Però mi pare dubbioso, se proprio il concetto di spazio e tempo sviluppato da MINKOWSKI [5]) sia una base possibile della meccanica razionale. Anzi la cinematica dei sistemi rigidi, che M. BORN [6]) ha voluto adattare al gruppo di LORENTZ, offre difficoltà considerevoli, come G. HERGLOTZ [7]) ha dimostrato: il corpo rigido nel « mondo » di MINKOWSKI non potendo essere messo in rotazione.

§ 2.

Vettori di quattro dimensioni.

Una trasformazione lineare delle quattro coordinate x, y, z, u, che ha l'invariante

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$

si dice, secondo MINKOWSKI, « *trasformazione di* LORENTZ ». Noi ci limiteremo in seguito al gruppo delle trasformazioni ortogonali, cioè delle rotazioni dello spazio di quattro dimensioni.

Un sistema di quattro grandezze, che si trasformano come le coordinate x, y, z, u, si dice « *vettore quattrodimensionale di prima specie* » (V_I^4). Proiettandolo sopra lo spazio

[4]) *Vedi* la discussione fra G. NORDSTRÖM e M. ABRAHAM [Physikalische Zeitschrift, Jahrgang X (1909), pp. 681-687, 737-741].

[5]) H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit* (Leipzig, Teubner, 1909).

[6]) M. BORN, *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprincips* [Annalen der Physik, Bd. XXX (1909), pp. 1-56].

[7]) G. HERGLOTZ, *Über den vom Standpunkt des Relativitätsprincips aus als « starr » zu bezeichnen den Körper* [Annalen der Physik, Bd. XXXI (1910), pp. 393-415].

tredimensionale delle x, y, z, le tre prime componenti del V_I^4 costituiscono un vettore tredimensionale (V^3), $\mathfrak{r}$, la quarta (u) uno scalare tredimensionale (S^3).

Vettore quattrodimensionale di seconda specie (V_{II}^4) si chiama un sistema di sei grandezze, che si trasformano come le espressioni seguenti, formate dalle componenti x_1, y_1, z_1, u_1 e x_2, y_2, z_2, u_2 di due V_I^4:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, & \mathfrak{a}_y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, & \mathfrak{a}_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \\ \mathfrak{b}_x = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix}, & \mathfrak{b}_y = \begin{vmatrix} y_1 & u_1 \\ y_2 & u_2 \end{vmatrix}, & \mathfrak{b}_z = \begin{vmatrix} z_1 & u_1 \\ z_2 & u_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Evidentemente, proiettando sopra lo spazio tredimensionale, il V_{II}^4 risulta composto da due V^3, che, nel simbolismo dell'analisi vettoriale ordinaria, si scrivono:

$$(1_a)\qquad \mathfrak{a} = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2], \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{r}_1 u_2 - \mathfrak{r}_2 u_1 .$$

Da due V_I^4:

$$\mathfrak{r},\ u \quad \text{e} \quad \mathfrak{r}_1,\ u_1$$

si può comporre uno *scalare quattrodimensionale* (S^4) nel modo seguente:

$$(2)\qquad S = x x_1 + y y_1 + z z_1 + u u_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 + u u_1 .$$

Inversamente, da uno scalare quattrodimensionale qualunque $\varphi(x, y, z, u)$ si ottiene, derivando rispetto alle coordinate, un V_I^4:

$$(3)\qquad X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad U = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Dunque gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial u}$$

si trasformano come le componenti di un V_I^4; questi operatori furono chiamati da MINKOWSKI le componenti dell'operatore « lor ».

Da quattro V_I^4 si può comporre un S^4, che determina lo spazio del parallelepipedo dei quattro vettori:

$$(4)\qquad \varphi = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Applicando a questo S^4 lo schema (3), si ottiene un V_I^4, composto da tre altri V_I^4, $\mathfrak{r}_1 u_1$, $\mathfrak{r}_2 u_2$, $\mathfrak{r}_3 u_3$, le cui componenti sono:

$$(5)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & u_1 \\ y_2 & z_2 & u_2 \\ y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix}, & Y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & u_1 \\ z_2 & x_2 & u_2 \\ z_3 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}, \\ Z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & u_3 \end{vmatrix}, & U = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}; \end{cases}$$

scrivendo nel modo vettoriale, si ha:

$$(5_a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = u_1[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] + u_2[\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1] + u_3[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2], \\ U = -\,\mathfrak{r}_1[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]. \end{cases}$$

Cancellando l'indice 3, scriviamo il V_I^4 ottenuto:

$$\mathfrak{R} = u[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2] + [\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}_1 u_2 - \mathfrak{r}_2 u_1],$$
$$U = -\,\mathfrak{r}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2],$$

e introduciamo, invece dei V_I^4 $\{\mathfrak{r}_1, u_1\}$ e $\{\mathfrak{r}_2, u_2\}$, il V_{II}^4 $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, composto da essi secondo la regola (1_a). Allora risulta:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = u\mathfrak{a} + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}], \\ U = -\,\mathfrak{r}\mathfrak{a}, \end{cases}$$

cioè un V_I^4, composto da un V_I^4 e un V_{II}^4.

Si ottiene un altro V_I^4, permutando nelle espressioni (6) i V^3 $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$. Per dimostrare questo formiamo i due S^4:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 + uu_1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{r}\mathfrak{r}_2 + uu_2.$$

Moltiplicandoli rispettivamente coi V_I^4:

$$-\,\mathfrak{r}_2,\ -\,u_2 \qquad \text{e} \qquad +\,\mathfrak{r}_1,\ +\,u_1,$$

e sommando, si costruisce il V_I^4:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2 + uu_2) - \mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 + uu_1),$$
$$U' = u_1(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2 + uu_2) - u_2(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 + uu_1),$$

che può scriversi:

$$\mathfrak{R}' = u(\mathfrak{r}_1 u_2 - \mathfrak{r}_2 u_1) + \big[\mathfrak{r}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]\big],$$
$$U' = -\,(\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}_1 u_2 - \mathfrak{r}_2 u_1).$$

Introducendo, mediante le (1_a), il V_{II}^4 $\{a, b\}$, risultano formule, analoghe alle (6):

$$(6_a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}' = u\mathfrak{b} + [\mathfrak{r}\mathfrak{a}], \\ U' = -\,\mathfrak{r}\mathfrak{b}, \end{cases}$$

dove $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ hanno cambiato il posto.

Nell'elettrodinamica di Minkowski intervengono quattro V^3, cioè le eccitazioni elettrica e magnetica $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$, e due vettori ausiliari $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{H}$, che formano due V_{II}^4:

$$\mathfrak{B},\ -i\mathfrak{E} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{H},\ -i\mathfrak{D}.$$

Poi si ha il V_I^4 « *velocità* »

$$\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \qquad \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}$$

($\mathfrak{q}$ designando il vettore velocità tredimensionale riferita alla velocità della luce).

Combinando questo V_I^4 col V_{II}^4 $\{\mathfrak{B}, -i\mathfrak{E}\}$ secondo lo schema (6_a), si ottiene il V_I^4:

$$(7)\qquad \mathfrak{R}^e = \frac{\mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}]}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \qquad U^e = \frac{i(\mathfrak{q}\mathfrak{E})}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}},$$

che Minkowski ha chiamato la « *forza elettrica di riposo* ». Invece, dal V_I^4 « velocità » e dal V_{II}^4 $\{-i\mathfrak{H},\ -\mathfrak{D}\}$, combinandoli secondo lo schema (6), si ottiene il V_I^4, che si dice «*forza magnetica di riposo*»:

$$(8)\qquad \mathfrak{R}^m = \frac{\mathfrak{H} - [\mathfrak{q}\mathfrak{D}]}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \qquad U^m = \frac{i(\mathfrak{q}\mathfrak{H})}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}.$$

I vettori «forza elettrica e magnetica di riposo» sono connessi coi V^3, che determinano le forze ponderomotrici su poli elettrici e magnetici in moto e che ho nel primo lavoro scritto $\mathfrak{E}'$ e $\mathfrak{H}'$:

$$(9)\qquad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}], \qquad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - [\mathfrak{q}\mathfrak{D}].$$

Evidentemente si ha:

$$(9_a)\qquad \mathfrak{R}^e = k^{-1}\mathfrak{E}', \qquad U^e = ik^{-1}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}'),$$

$$(9_b)\qquad \mathfrak{R}^m = k^{-1}\mathfrak{H}', \qquad U^m = ik^{-1}(\mathfrak{q}\mathfrak{H}'),$$

ponendo

$$(9_c)\qquad k = \sqrt{1-\mathfrak{q}^2}.$$

Dai due V_I^4

$$\{\mathfrak{R}^e,\ U^e\} \quad \text{e} \quad \{\mathfrak{R}^m,\ U^m\}$$

componendoli secondo la formola (1_a), si ottiene il V_{II}^4:

$$\mathfrak{a} = k^{-2}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'],$$
$$\mathfrak{b} = ik^{-2}\{\mathfrak{E}'(\mathfrak{q}\mathfrak{H}') - \mathfrak{H}'(\mathfrak{q}\mathfrak{E}')\} = ik^{-2}\big[\mathfrak{q}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']\big].$$

Introducendo il V^3:

$$(10)\qquad \mathfrak{f}' = [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'],$$

l'ultimo V_{II}^4 può scriversi:

$$(11)\qquad \mathfrak{a} = k^{-2}\mathfrak{f}', \qquad \mathfrak{b} = ik^{-2}[\mathfrak{q}\mathfrak{f}'].$$

Moltiplicando il V^3 $\mathfrak{f}'$ per la velocità della luce (c), otteniamo il vettore «*raggio relativo*» del mio primo lavoro [l. c. [1]), equazione IV].

Finalmente componiamo il V_{II}^4, rappresentato da (11), col V_I^4 «velocità» secondo lo schema (6). Il V_I^4 così calcolato è:

$$\mathfrak{R} = ik^{-3}\Big\{\mathfrak{f}' + \big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{f}']\big]\Big\},$$
$$U = -k^{-3}(\mathfrak{q}\mathfrak{f}').$$

Moltiplicandolo per $(-i)$, giungiamo al V_I^4 «*raggio di riposo*» di MINKOWSKI:

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = k^{-1}\mathfrak{f}' + k^{-3}\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{f}'), \\ U = ik^{-3}(\mathfrak{q}\mathfrak{f}'). \end{cases}$$

§ 3.

Tensori di quattro dimensioni.

« *Tensore quattrodimensionale* » (T^4) diciamo un sistema di dieci grandezze, che si trasformano per le trasformazioni ortogonali di LORENTZ, come si trasformano i quadrati e prodotti delle coordinate x, y, z, u:

$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ yz,\ zx,\ xy;\quad xu,\ yu,\ zu;\quad u^2.$$

Proiettando sopra lo spazio tredimensionale delle (x, y, z), le sei prime componenti formano un tensore tredimensionale (T^3), trasformandosi come i quadrati e prodotti delle (x, y, z); le seguenti tre componenti del T^4 costituiscono un V^3, la decima uno scalare S^3.

Le quattro componenti dell'operatore « lor » trasformandosi come componenti di un V_I^4, si può, da uno scalare quattrodimensionale φ, dato come funzione delle x, y, z, u, dedurre un T^4, derivando due volte rispetto a x, y, z, u:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial u}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial u}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}.$$

Se è dato un S^4, funzione omogenea quadratica delle x, y, z, u:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y, z, u) = {} & \tfrac{1}{2} c_{11} x^2 + \tfrac{1}{2} c_{22} y^2 + \tfrac{1}{2} c_{33} z^2 \\ & + c_{23} yz + c_{31} zx + c_{12} xy \\ & + c_{14} xu + c_{24} yu + c_{34} zu + \tfrac{1}{2} c_{44} u^2, \end{aligned} \right.$$

i 10 coefficienti:

$$c_{11}, \quad c_{22}, \quad c_{33}, \quad c_{23}, \quad c_{31}, \quad c_{12}; \qquad c_{14}, \quad c_{24}, \quad c_{34}; \qquad c_{44},$$

costituiscono un tensore quattrodimensionale.

Nell'elettrodinamica dei corpi in movimento valgono le equazioni dell'impulso e dell'energia [8]):

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_x}{\partial t}, \\ \mathfrak{R}_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial t}, \\ \mathfrak{R}_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial t}; \\ c\mathfrak{q}\mathfrak{R} + Q &= -\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \right.$$

Per dare a queste quattro equazioni una forma più simmetrica, poniamo:

$$(15) \qquad u = ict, \qquad \mathfrak{R}_u = i\mathfrak{q}\mathfrak{R} + i\frac{Q}{c}, \qquad U_u = \psi;$$

$$(15_a) \qquad X_u = -ic\mathfrak{g}_x, \qquad Y_u = -ic\mathfrak{g}_y, \qquad Z_u = -ic\mathfrak{g}_z;$$

$$(15_b) \qquad U_x = -\frac{i}{c}\mathfrak{S}_x, \qquad U_y = \frac{-i}{c}\mathfrak{S}_y, \qquad U_z = \frac{-i}{c}\mathfrak{S}_z.$$

[8]) M. Abraham, l. c. [1]), equazioni (6) e (7).

Allora esse diventano:

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} + \dfrac{\partial X_u}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_y = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_u = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} + \dfrac{\partial U_u}{\partial u}. \end{cases}$$

Ora, nella teoria di MINKOWSKI, il sistema delle quattro grandezze

$$\mathfrak{R}_x, \quad \mathfrak{R}_y, \quad \mathfrak{R}_z, \quad \mathfrak{R}_u,$$

delle quali le tre prime sono le componenti del V^3, che determina la forza ponderomotrice per l'unità di spazio, deve costituire un V_I^4. Le 16 grandezze X_x, X_y, ..., U_z, U_u, dalle quali quel sistema si deriva mediante le equazioni (16), devono trasformarsi in guisa che questa condizione sia soddisfatta.

Noi determiniamo queste 16 grandezze nel modo seguente. Esse si riducano a 10:

$$(17)\quad \begin{cases} X_x, \; Y_y, \; Z_z, & Y_z = Z_y, & Z_x = X_z, & X_y = Y_x; \\ X_u = U_x, & Y_u = U_y, & Z_u = U_z, & U_u, \end{cases}$$

che *sono le componenti di un* T^4.

Allora, dalle proprietà di trasformazione delle componenti di un T^4 e delle componenti dell'operatore « lor », segue infatti che le quattro grandezze, derivate da (16), si trasformano come le coordinate x, y, z, u di un punto dello spazio quattrodimensionale, cioè come componenti di un V_I^4, conformandosi al principio di relatività. Però la determinazione scelta da me non è la sola, che corrisponde a questo principio. Anzi MINKOWSKI stesso ha preferito un'altra determinazione, che non soddisfa alle condizioni di simmetria, contenute nelle (17). Ma la determinazione postulata dal mio sistema dell'elettrodinamica dei corpi in movimento è quella indicata ora.

È nostro scopo di formare un T^4, le cui componenti corrispondono alle espressioni indicate nel primo lavoro per il caso speciale della teoria di MINKOWSKI. Provato questo, è evidente che queste espressioni soddisfanno al principio di relatività.

Otteniamo un tale T^4, calcolando un S^4 della forma (13), cioè una funzione omogenea quadratica delle x, y, z, u, invariante per le trasformazioni di LORENTZ:

$$(18)\qquad \varphi(x, y, z, u) = \Phi(x, y, z) - i\,u(\mathfrak{r}\mathfrak{f}) + \tfrac{1}{2}u^2\psi.$$

Dall'S^3, funzione omogenea di secondo ordine delle x, y, z:

$$(18_a)\qquad \Phi(x, y, z) = \tfrac{1}{2}X_x x^2 + \tfrac{1}{2}Y_y y^2 + \tfrac{1}{2}Z_z z^2 + Y_z yz + Z_x zx + X_y xy,$$

si ottengono le sei pressioni di MAXWELL; il V^3, designato adesso con $\mathfrak{f}$, ci dà, secondo $(15_{a,b})$, nello stesso tempo la corrente d'energia $\mathfrak{S}$ e la densità dell'impulso elettromagnetico $\mathfrak{g}$:

$$(18_b)\qquad \mathfrak{f} = c\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\mathfrak{S};$$

finalmente, la decima componente del T^4 derivato da (18), ψ, determina la densità dell'energia elettromagnetica.

Per giungere ad uno scalare quattrodimensionale adatto, funzione omogenea di secondo ordine delle coordinate x, y, z, u, con coefficienti bilineari nelle componenti dei vettori elettromagnetici, formiamo prima, secondo lo schema (6), dal raggio vettore nello spazio di quattro dimensione $\{\mathfrak{r}, u\}$, e dal V^4_{II} $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, il V^4_I:

$$\mathfrak{R} = u\mathfrak{a} + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}], \qquad U = -(\mathfrak{r}\mathfrak{a}).$$

In modo analogo, da un'altro V^4_{II} $\{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'\}$ e dal V^4_I $\{\mathfrak{r}, \mathfrak{a}\}$ si compone il V^4_I:

$$\mathfrak{R}' = u\mathfrak{a}' + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}'], \qquad U' = -(\mathfrak{r}\mathfrak{a}').$$

Ora, secondo lo schema (2) si ottiene il S^4:

$$S = \mathfrak{R}\mathfrak{R}' + UU' = u^2\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + u\mathfrak{a}[\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] + u\mathfrak{a}'[\mathfrak{r}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}][\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] + (\mathfrak{r}\mathfrak{a})(\mathfrak{r}\mathfrak{a}'),$$

che può scriversi:

$$(19)\quad S = (\mathfrak{r}\mathfrak{a})(\mathfrak{r}\mathfrak{a}') - (\mathfrak{r}\mathfrak{b})(\mathfrak{r}\mathfrak{b}') + \mathfrak{r}^2(\mathfrak{b}\mathfrak{b}') + u\mathfrak{r}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] + u\mathfrak{r}[\mathfrak{b}'\mathfrak{a}] + u^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}').$$

Come segue da (6_a), si può permutare $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}'$ con $\mathfrak{b}'$, e ottenere in modo corrispondente un'altro S^4:

$$(19_a)\quad S^* = (\mathfrak{r}\mathfrak{b})(\mathfrak{r}\mathfrak{b}') - (\mathfrak{r}\mathfrak{a})(\mathfrak{r}\mathfrak{a}') + \mathfrak{r}^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') + u\mathfrak{r}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + u\mathfrak{r}[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}] + u^2(\mathfrak{b}\mathfrak{b}').$$

Ponendo

$$4\varphi = S - S^*,$$

risulta:

$$(20)\quad \begin{cases} 2\varphi = (\mathfrak{r}\mathfrak{a})(\mathfrak{r}\mathfrak{a}') - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') - (\mathfrak{r}\mathfrak{b})(\mathfrak{r}\mathfrak{b}') + \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{b}\mathfrak{b}') \\ \quad + u\mathfrak{r}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] + u\mathfrak{r}[\mathfrak{b}'\mathfrak{a}] + \frac{1}{2}u^2\{(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') - (\mathfrak{b}\mathfrak{b}')\}. \end{cases}$$

Adesso, identificando la funzione φ omogenea di secondo ordine delle x, y, z, u, invariante per la trasformazione di LORENTZ, con l'S^4 dato da (18), si trovano le espressioni:

$$(20_a)\qquad 2\Phi = (\mathfrak{r}\mathfrak{a})(\mathfrak{r}\mathfrak{a}') - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') - (\mathfrak{r}\mathfrak{b})(\mathfrak{r}\mathfrak{b}') + \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{b}\mathfrak{b}'),$$

$$(20_b)\qquad 2\mathfrak{f} = i[\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] + i[\mathfrak{b}'\mathfrak{a}],$$

$$(20_c)\qquad 2\psi = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}') - (\mathfrak{b}\mathfrak{b}').$$

Introduciamo i V^4_{II} elettrodinamici di MINKOWSKI, ponendo

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = \mathfrak{H}, & \mathfrak{b} = -i\mathfrak{D}; \\ \mathfrak{a}' = \mathfrak{B}, & \mathfrak{b}' = -i\mathfrak{E}. \end{cases}$$

Allora risultano, tenendo conto di (18_a), le espressioni seguenti:

$$(21_a)\quad \begin{cases} X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy \\ = (\mathfrak{r}\mathfrak{E})(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{H})(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{H}\mathfrak{B}), \end{cases}$$

$$(21_b)\qquad 2\mathfrak{f} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}],$$

$$(21_c)\qquad 2\psi = \mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}.$$

Esse dànno per lo spazio vuoto, dove $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{B}$ diventano identici, i valori conosciuti delle pressione di MAXWELL, della corrente e della densità dell'energia. Per corpi ponderabili nello stato di riposo, i valori (21_a) e (21_c) delle pressioni e della densità dell'energia sono accettabili, invece il valore (21_b) no, perchè, essendo

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H},$$

la corrente d'energia sarebbe

$$\mathfrak{S} = c\mathfrak{f} = \left(\frac{\varepsilon\mu + 1}{2}\right)c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

che dalla corrente data dal vettore di POYNTING

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

differisce di

$$\left(\frac{\varepsilon\mu - 1}{2}\right)c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Dunque noi dovremo sottrarre dall'invariante φ, dato dall'equazione (20), un'altro S^4, che contiene come fattore $(\varepsilon\mu - 1)$, eguale a zero per lo spazio vuoto.

Per ottenere un tale S^4, consideriamo due V_I^4; prima il V_I^4 *« velocità »*

$$\mathfrak{r}_1 = k^{-1}\mathfrak{q}, \qquad u_1 = ik^{-1},$$

poi il *« raggio di riposo »*, dato dalle equazioni (12):

$$\mathfrak{R} = k^{-1}\mathfrak{f}' + k^{-3}\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{f}'), \qquad U = ik^{-3}(\mathfrak{q}\mathfrak{f}').$$

Introduciamo il V^3

$$\mathfrak{W} = (\varepsilon\mu - 1)k^{-1}\mathfrak{R} = (\varepsilon\mu - 1)\{k^{-2}\mathfrak{f}' + k^{-4}\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{f}')\}. \tag{22}$$

$(\varepsilon\mu - 1)$ essendo un S^4,

$$\mathfrak{r}_2 = (\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{R} = k\mathfrak{W},$$
$$u_2 = (\varepsilon\mu - 1)U = ik(\mathfrak{q}\mathfrak{W}),$$

costituiscono un V_I^4.

Ora componiamo, secondo lo schema (2), due S^4:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 + uu_1 = k^{-1}\{(\mathfrak{r}\mathfrak{q}) + iu\},$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{r}_2 + uu_2 = k\{(\mathfrak{r}\mathfrak{W}) + iu(\mathfrak{q}\mathfrak{W})\},$$

entrambi lineari nelle x, y, z, u, e moltiplichiamoli. Allora risulta un S^4, funzione omogenea di secondo ordine delle x, y, z, u:

$$2\chi = (\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}\mathfrak{W}) + \big(iu\mathfrak{r},\ \mathfrak{W} + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W})\big) - u^2(\mathfrak{q}\mathfrak{W}). \tag{23}$$

Sommando gli S^4, φ e χ, dati da (20) e (23), formiamo il nuovo S^4

$$f = \varphi + \chi, \tag{24}$$

e prendiamo questo, invece di φ, come invariante caratteristico, determinante le pressioni, la corrente e la densità d'energia elettromagnetiche, ponendo:

$$f(x, y, z, u) = \Phi(x, y, z) - iu(\mathfrak{r}\mathfrak{f}) + \tfrac{1}{2}u^2\psi.$$

Allora risultano, invece di $(21_{a,b,c})$, le formole:

$$(24_a)\quad \begin{cases} 2\Phi = X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy \\ \quad = (\mathfrak{r}\mathfrak{E})(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{H})(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}\mathfrak{W}), \end{cases}$$

$$(24_b)\quad 2\mathfrak{f} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - \mathfrak{W} - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}),$$

$$(24_c)\quad 2\psi = \mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B} - 2(\mathfrak{q}\mathfrak{W}).$$

Questi valori sono identici a quelli derivati dal mio sistema dell'elettrodinamica dei corpi in movimento nel primo lavoro, per il caso della teoria di MINKOWSKI.

In questa teoria valgono le relazioni [9]:

$$(25)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{H}], & \mathfrak{E} = \mathfrak{E}' - [\mathfrak{q}\mathfrak{B}], \\ \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{E}], & \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + [\mathfrak{q}\mathfrak{D}]. \end{cases}$$

Un calcolo, che non riproduciamo, ci dà

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = k^{-2}(\varepsilon\mu - 1)[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] = k^{-2}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{f}'.$$

D'altra parte si ha, secondo (22):

$$(26)\quad \mathfrak{W} - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = k^{-2}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{f}'.$$

Dunque vale la relazione:

$$(26_a)\quad \mathfrak{W} - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

formola già trovata nel primo lavoro [10]).

L'equazione (24_b) perciò può scriversi

$$(26_b)\quad \mathfrak{f} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}),$$

ossia

$$(26_c)\quad \mathfrak{f} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - \mathfrak{W}.$$

Evidentemente da (26_b) e (18_b) risulta per il caso di riposo la corrente d'energia postulata dal teorema del POYNTING. I valori della corrente d'energia e della densità dell'impulso si accordano con quelli trovati nel primo lavoro [11]). Anche l'espressione (24_c) per la densità d'energia fu già indicata lì [12]).

Resta da provare, che le pressioni elettromagnetiche, determinate dall'equazione (24_a), sono le stesse che risultano dal primo lavoro.

Per dimostrare questo, bisogna introdurre le *«pressioni relative»*, definite da [13])

$$X'_x = X_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{f}_x, \qquad X'_y = X_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{f}_x, \qquad X'_z = X_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{f}_x;$$
$$Y'_x = Y_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{f}_y, \qquad Y'_y = Y_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{f}_y, \qquad Y'_z = Y_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{f}_y;$$
$$Z'_x = Z_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{f}_z, \qquad Z'_y = Z_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{f}_z, \qquad Z'_z = Z_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{f}_z.$$

9) M. ABRAHAM, l. c. [1]), equazioni (36) e (37).

10) M. ABRAHAM, l. c. [1]), equazione (40_c).

11) M. ABRAHAM, l. c. [1]), equazioni (40), (40_a) e (42).

12) M. ABRAHAM, l. c. [1]), equazione (44_a).

13) M. ABRAHAM, l. c. [1]), equazione (10), dove si deve porre $\mathfrak{w} = c\mathfrak{q}$, $\mathfrak{f} = c\mathfrak{g}$.

Tenendo conto delle condizioni di simmetria:

$$Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z, \qquad X_y = Y_x,$$

si ha

$$\begin{aligned} Y'_z - Z'_y &= \mathfrak{q}_z \mathfrak{f}_y - \mathfrak{q}_y \mathfrak{f}_z, \\ Z'_x - X'_z &= \mathfrak{q}_x \mathfrak{f}_z - \mathfrak{q}_z \mathfrak{f}_x, \\ X'_y - Y'_x &= \mathfrak{q}_y \mathfrak{f}_x - \mathfrak{q}_x \mathfrak{f}_y, \end{aligned}$$

relazioni che sono, come ho dimostrato nel primo lavoro, soddisfatte dalle espressioni indicate per le pressioni relative. Basta dunque provare che, per la funzione

$$2\Phi' = X'_x x^2 + Y'_y y^2 + Z'_z z^2 + (Y'_z + Z'_y) y z + (Z'_x + X'_z) z x + (X'_y + Y'_x) x y,$$

ponendola eguale a

$$\begin{aligned} 2\Phi' = 2\Phi &+ x^2 \mathfrak{q}_x \mathfrak{f}_x + y^2 \mathfrak{q}_y \mathfrak{f}_y + z^2 \mathfrak{q}_z \mathfrak{f}_z \\ &+ (\mathfrak{q}_y \mathfrak{f}_z + \mathfrak{q}_z \mathfrak{f}_y) y z + (\mathfrak{q}_z \mathfrak{f}_x + \mathfrak{q}_x \mathfrak{f}_z) z x + (\mathfrak{q}_x \mathfrak{f}_y + \mathfrak{q}_y \mathfrak{f}_x) x y, \end{aligned}$$

ossia a

$$2\Phi' = 2\Phi + (\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}\mathfrak{f}), \tag{27}$$

e introducendo il valore (24_a) di 2Φ, si trova un'espressione identica a quella che risulta dalle formole fondamentali (V_a) del primo lavoro. Queste ultime dànno

$$2\Phi' = (\mathfrak{r}\mathfrak{E}')(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{E}'\mathfrak{D}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{H}')(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}^2(\mathfrak{H}'\mathfrak{B}). \tag{27$_a$}$$

La identità dei valori (27) e (27_a) sarà dimostrata provando che è soddisfatta la relazione:

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}\mathfrak{f}) + (\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}\mathfrak{W}) \\ &= (\mathfrak{r}, \mathfrak{E}' - \mathfrak{E})(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{r}, \mathfrak{H}' - \mathfrak{H})(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}^2\{(\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}, \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}, \mathfrak{B})\}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Tenendo conto delle (26_c) e (25), essa si scrive

$$\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]) &= (\mathfrak{r}[\mathfrak{q}\mathfrak{B}])(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{r}[\mathfrak{q}\mathfrak{D}])(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}^2\{(\mathfrak{D}[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]) - \mathfrak{B}[\mathfrak{q}\mathfrak{D}]\} \\ &= \mathfrak{r}[\mathfrak{q}, \mathfrak{B}(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{r}\mathfrak{B})] + \mathfrak{r}^2(\mathfrak{q}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]). \end{aligned}\right. \tag{28$_a$}$$

Adesso, essendo identicamente

$$[\mathfrak{q}, \mathfrak{B}(\mathfrak{r}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{r}\mathfrak{B})] = -\Big[\mathfrak{q}\big[\mathfrak{r}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]\big]\Big] = -\,\mathfrak{r}(\mathfrak{q}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]) + (\mathfrak{r}\mathfrak{q})[\mathfrak{D}\mathfrak{B}],$$

la parte seconda dell'equazione (28_a) dà infatti:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{q})(\mathfrak{r}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]),$$

cosicchè la relazione (28) è identicamente soddisfatta. Dunque, dalla formola (27_a), postulata dal nostro sistema dell'elettrodinamica, seguono per il caso speciale della teoria di MINKOWSKI i valori delle pressioni di MAXWELL, che, accordandosi colla relazione (24_a), obbediscono al principio di relatività.

§ 4.

Le equazioni di movimento.

Nella meccanica di MINKOWSKI interviene il cosidetto « tempo proprio » di un punto, cioè uno scalare quattrodimensionale (τ), definito da [14])

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}} = k^{-1}. \tag{29}$$

Derivando, rispetto a τ, il raggio vettore quattrodimensionale del punto, e dividendo per la velocità della luce (c), risulta il V^4 « velocità » di MINKOWSKI:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{c}\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{q}_x\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{q}_x k^{-1}, \\ \frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{c}\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{q}_y\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{q}_y k^{-1}, \\ \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau} &= \frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{q}_z\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{q}_z k^{-1}, \\ \frac{1}{c}\frac{du}{d\tau} &= \frac{1}{c}\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = i\frac{dt}{d\tau} = ik^{-1}. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Evidentemente le quattro componenti del V^4 « velocità » soddisfanno identicamente all'equazione:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{du}{d\tau}\right)^2 = -1. \tag{30$_a$}$$

Formiamo adesso, dai V_I^4 « velocità » e « forza », secondo lo schema (2), lo scalare quattrodimensionale

$$\Psi = \mathfrak{R}_x\frac{dx}{c\,d\tau} + \mathfrak{R}_y\frac{dy}{c\,d\tau} + \mathfrak{R}_z\frac{dz}{c\,d\tau} + \mathfrak{R}_u\frac{du}{c\,d\tau}. \tag{31}$$

Introducendo la forza ponderomotrice del campo elettromagnetico, le cui componenti sono determinate da (16), e tenendo conto delle equazioni (15) e (30) si trova:

$$\Psi = -\frac{Q}{c}k^{-1}, \tag{31$_a$}$$

dove Q è il calore di JOULE, sviluppato nell'unità di spazio e tempo.

Ora MINKOWSKI dà alle equazioni di movimento di un elemento di materia la

---

[14]) H. MINKOWSKI, l. c. [5]), equazione (3), pag. 48.

forma [15])

$$(32)\qquad \begin{cases} \nu \dfrac{d^2 x}{d\tau^2} = \mathfrak{K}_x + \Psi \dfrac{dx}{c\,d\tau}, \\ \nu \dfrac{d^2 y}{d\tau^2} = \mathfrak{K}_y + \Psi \dfrac{dy}{c\,d\tau}, \\ \nu \dfrac{d^2 z}{d\tau^2} = \mathfrak{K}_z + \Psi \dfrac{dz}{c\,d\tau}, \\ \nu \dfrac{d^2 u}{d\tau^2} = \mathfrak{K}_u + \Psi \dfrac{du}{c\,d\tau}, \end{cases}$$

l'S^4 (ν) determinando la « densità di riposo » della materia. L'identità (30_a), dalla quale segue

$$\frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau}\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau}\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{du}{d\tau}\frac{d^2u}{d\tau^2} = 0,$$

è soddisfatta dalle equazioni (32).

Minkowski chiama forza ponderomotrice del campo elettromagnetico, il V^3 le cui componenti sono i secondi membri delle prime tre equazioni di moto (32), cioè il V^3:

$$(32_a)\qquad \mathfrak{K} + \Psi \mathfrak{q} k^{-1} = \mathfrak{K} - \frac{\mathfrak{q}\cdot Q}{c k^2}.$$

Questo vettore non è identico alla forza determinata dal teorema dell'impulso (14), ma differisce da questa di

$$-\frac{\mathfrak{q}\, Q}{c k^2};$$

dunque, quando il calore di Joule è sviluppato nella materia, la meccanica di Minkowski deve aggiungere alla forza ponderomotrice, derivata dal teorema dell'impulso, questa forza addizionale.

Considerando il teorema d'impulso importantissimo per la meccanica elettromagnetica, preferisco di conservare questo principio dell'elettrodinamica dei corpi in movimento. Si può togliere la forza addizionale di Minkowski, dando alle equazioni di movimento, invece di (32), la forma suggerita appunto dalla legge meccanica dell'impulso:

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\left(\nu \dfrac{dx}{d\tau}\right) = \mathfrak{K}_x, \\ \dfrac{d}{d\tau}\left(\nu \dfrac{dy}{d\tau}\right) = \mathfrak{K}_y, \\ \dfrac{d}{d\tau}\left(\nu \dfrac{dz}{d\tau}\right) = \mathfrak{K}_z, \\ \dfrac{d}{d\tau}\left(\nu \dfrac{du}{d\tau}\right) = \mathfrak{K}_u. \end{cases}$$

Siccome τ e ν sono degli S^4, entrambi i membri di queste equazioni sono le componenti di un V^4_I; queste equazioni dunque si accordano col principio della relatività. L'i-

[15]) H. Minkowski, l. c. [5]), equazione (20), pag. 54.

dentità (30_a) è soddisfatta, se si pone

$$\frac{d\nu}{d\tau}\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2\right\}=\mathfrak{K}_x\frac{dx}{d\tau}+\mathfrak{K}_y\frac{dy}{d\tau}+\mathfrak{K}_z\frac{dz}{d\tau}+\mathfrak{K}_u\frac{du}{d\tau};$$

tenendo conto di (30_a), (31), e (31_a), si trova

$$\frac{d\nu}{d\tau}=-\frac{\Psi}{c}=\frac{Q}{c^2k},$$

ossia, secondo (29):

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{Q}{c^2}. \tag{33_a}$$

Dunque ν, la « densità di riposo » della massa, deve essere variabile, e crescere ogni qual volta si sviluppa calore di JOULE nella materia. Accettando questa ipotesi, già introdotta prima dall'EINSTEIN e dal PLANCK, si evita la forza addizionale di MINKOWSKI.

Dalle equazioni di movimento (33), che si riferiscono all'unità di volume di un corpo esteso, si passa alle equazioni di moto di un punto materiale, nel medesimo modo che fu indicato da MINKOWSKI per le equazioni (32).

Milano, 17 gennajo 1910.

MAX ABRAHAM.