Lineare Scharen orthogonaler Matrizen.

Von J. RADON in Hamburg.

A. HURWITZ hat gelegentlich des Versuches, die Kompositionstheorie der quadratischen Formen auf beliebig viele Variable auszudehnen[1]), die Frage aufgeworfen, wann der Gleichung

$$(x_1^2+x_2^2+\cdot\cdot+x_n^2)\,(y_1^2+y_2^2+\cdot\cdot+y_n^2)=z_1^2+z_2^2+\cdot\cdot+z_n^2$$

durch bilineare Funktionen z_i der x_i und y_i genügt werden kann. Es ergab sich dabei, daß dies nur für die Werte $n = 1, 2, 4, 8$ möglich ist. Im Anschluß an diese Frage stellt HURWITZ u. a. dasselbe Problem für die allgemeinere Gleichung

$$(x_1^2+x_2^2+\cdot\cdot+x_p^2)\,(y_1^2+y_2^2+\cdot\cdot+y_n^2)=z_1^2+z_2^2+\cdot\cdot+z_n^2$$

und gibt für den bei gegebenem n unter Voraussetzung der Möglichkeit einer derartigen Lösung größten zulässigen Wert von p eine Abschätzung.

Faßt man hier in den gesuchten bilinearen Funktionen die x_i als Parameter auf, so definieren sie eine in $x_1 \cdot\cdot x_p$ lineare Schar von orthogonalen Substitutionen.

Demnach kann man mit HURWITZ die gestellte Frage auch so aussprechen: *es sollen quadratische Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ von je n^2 Elementen in möglichst großer Anzahl (p) so bestimmt werden, daß $x_1 A_1 + \cdot\cdot + x_p A_p$ für alle Werte der Parameter $x_1 \ldots x_p$ eine orthogonale Matrix darstellt.*

Von ganz anderer Seite her sah ich mich veranlaßt, mich mit diesem Problem zu beschäftigen. Für den Fall *reeller* Matrizen ergab sich mir seine genaue Lösung durch ein eigentümliches Reduktionsverfahren, das Matrizen heranzieht, deren Elemente komplexe Zahlen sowie Quaternionen sind. Ich möchte dieses Verfahren im folgenden angeben, zuvor aber mein Resultat formulieren:

Bezeichnet man für jedes n den gesuchten größtmöglichen Wert von p durch $\nu(n)$, hat ferner n die Form:

$$n = 2^{4\alpha+\beta} n' \quad (\beta = 0, 1, 2, 3;\ n' \text{ ungerade}),$$

so ist:

$$\nu(n) = 2^\beta + 8\alpha.$$

---

[1]) Göttinger Nachrichten, 1898, S. 309.

Dieses Resultat steht im Einklang mit der HURWITZschen Abschätzung.

Den Hinweis auf die Abhandlung von HURWITZ verdanke ich Herrn A. OSTROWSKI.

I. Vorbereitender Teil.

1. *Bezeichnungsweise.* Ich bediene mich im folgenden des bekannten Matrizenkalküls und will die gebrauchten Bezeichnungen in aller Kürze erläutern.

Mit *großen* (lateinischen oder griechischen) Lettern bezeichne ich Matrizen (rechteckige Systeme von m Zeilen und n Spalten) *allgemeiner Natur.* Unter E_ϱ ist die quadratische „Einheitsmatrix" von ϱ Zeilen und Spalten vorhanden, deren in der Hauptdiagonale befindliche Elemente alle eins sind, während die übrigen den Wert 0 besitzen. Mit $\varLambda$ bezeichne ich eine quadratische Matrix, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonale Null sind; die Elemente der letzteren sollen in der natürlichen Reihenfolge mit $\lambda_1 \lambda_2 ..$ bezeichnet sein. 0 bedeutet eine Matrix, deren Elemente sämtlich Null sind.

Mit *kleinen* lateinischen Lettern (z. B. x) bezeichne ich eine *einspaltige Matrix,* deren Elemente von oben nach unten gelesen, $x_1, x_2, \ldots$ sind.

Die durch Vertauschung von Zeilen und Spalten aus einer Matrix A entstehende *transponierte* Matrix soll mit A' bezeichnet werden. Aus einer einspaltigen Matrix x geht dadurch die einzeilige Matrix x' hervor.

Durch einen oberhalb des Symbols einer Matrix angebrachten *Querstrich* ist stets die Ersetzung aller ihrer Elemente durch die *konjugiert komplexen* Zahlen (bzw. konjugierten Quaternionen) angedeutet.

Für die *Multiplikation* der Matrizen dient die übliche Bezeichnung; es bedeutet also $A B$ die Matrix der Elemente

$$c_{ik} = \sum_1^p {}^h\, a_{ih} b_{hk},$$

wenn A ebensoviel (p) Spalten wie B Zeilen besitzt. Es ist dann z. B.:

$$A x = y$$

die symbolische Schreibung der linearen Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^h\, a_{ih} x_h = y_i,$$

$x' A y$ ein kurzer Ausdruck für die Bilinearform $\sum a_{ik} x_i y_k$.

Tritt zu einer Matrix eine *Zahl* als Faktor, der sämtliche Elemente multipliziert, so soll diese Zahl stets mit einem kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

Durch Anschreiben der Symbole für $m \cdot n$ Matrizen $A^{(i,k)}$ $(i = 1, 2, .. m,$ $k = 1, 2, .. n)$ mit r_i Zeilen und s_k Spalten in der Form:

$$\| A^{(i,k)} \| = \left\| \begin{matrix} A^{(1,1)} & \ldots & A^{(1,n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{(m,1)} & \ldots & A^{(m,n)} \end{matrix} \right\|$$

soll jene Matrix von $r_1 + r_2 + .. + r_m$ Zeilen und $s_1 + s_2 + .. + s_n$ Spalten bezeichnet werden, die aus diesem Symbol entsteht, wenn man die $A^{(i,k)}$ durch die ausgeschriebenen rechteckigen Systeme ersetzt.

Jede Matrix mit ebensoviel Zeilen und Spalten kann dann durch *„homologe“* Zerlegung in Teilsysteme in analoger Form geschrieben werden.

Die Multiplikation zweier solcher Matrizen mit den „Elementen“ $A^{(i,h)}$ bzw. $B^{(h,k)}$ läßt sich, sobald die Spaltenanzahl von $A^{(i,h)}$ mit der Zeilenanzahl von $B^{(h,k)}$ für alle i und k übereinstimmt und die Anzahl der Spaltengruppen von $\| A^{(i,h)} \|$ mit jener der Zeilengruppen von $\| B^{(h,k)} \|$ identisch ist, formal wie ein gewöhnliches Matrizenprodukt aus den Teilsystemen ausführen.

2. *Quaternionen.* Die vier Grundeinheiten der Quaternionen bezeichne ich mit $(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ und setze jede Quaternion in die Form

$$q = q_0 + \varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 q_2 + \varepsilon_3 q_3,$$

so daß ihre reellen „Komponenten“ durch Indizes in der angegebenen Weise gekennzeichnet werden. Die Multiplikationsregel der Matrizenrechnung überträgt sich unverändert auf Matrizen, deren Elemente Quaternionen sind. Dagegen verliert die Regel $(AB)' = B'A'$ wegen der nicht kommutativen Multiplikation der Quaternionen ihre Gültigkeit. Hingegen gilt stets:

$$(\overline{AB})' = \overline{B}'\overline{A}'.$$

Ein System *linearer Quaternionengleichungen* der Form:

$$Ax = y$$

(A bedeutet eine quadratische Matrix) liefert durch Auflösung in die reellen Komponenten gewöhnliche lineare Gleichungen für die x-Komponenten. Daraus geht hervor, daß auch hier die bekannte *„Alternative“* gilt: entweder lassen sich die vorgelegten Gleichungen für beliebige Werte der y — und dann eindeutig — lösen, oder das zugehörige homogene System

$$Ax = 0$$

besitzt eine Auflösung, die nicht die triviale $x_i = 0$ ist.

Hat A eine „hintere Reziproke" B, so daß $AB = E$, so sind die vorgelegten linearen Gleichungen durch $x = By$ gelöst; also liegt der erste Fall der Alternative vor. Wird jetzt BA mit U bezeichnet, so gilt:

$$AU = A \text{ oder } A(U - E) = 0.$$

Wenn wir nun $U - E$ in Spaltenmatrizen zerlegen:

$$U - E = \| x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)} \|,$$

so muß

$$Ax^{(i)} = 0$$

sein. Daraus folgt nach der obigen Alternative $x^{(i)} = 0$, d. h.

$$BA = E,$$

so daß B auch „vordere Reziproke" ist.

Es seien $\nu < n$ Spaltenmatrizen von je n Elementen gegeben:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\nu)},$$

welche die Relationen erfüllen:

$$\overline{x^{(i)}}' x^{(i)} = 1, \quad \overline{x^{(i)}}' x^{(k)} = 0 \quad (i \neq k).$$

Fügt man zu den $x^{(i)}$ noch $n - \nu$ weitere aus Nullen bestehende Spalten und bezeichnet die entstehende quadratische Matrix $\| x^{(1)} \ldots x^{(\nu)} 0 \ldots 0 \|$ mit U, so ist das Gleichungssystem $Uz = 0$ in nichttrivialer Weise lösbar; man kann folglich das System $Uz = y$ nicht für beliebige y erfüllen. Wählen wir jetzt eine Spaltenmatrix y so, daß $Uz = y$ nicht lösbar ist, und setzen:

$$x^{(\nu+1)} = y - x^{(1)} (\overline{x^{(1)}}' y) - x^{(2)} (\overline{x^{(2)}}' y) \ldots - x^{(\nu)} (\overline{x^{(\nu)}}' y),$$

so ist sicher $x^{(\nu+1)} \neq 0$, und es gilt:

$$\overline{x^{(i)}}' x^{(\nu+1)} = 0, \quad \overline{x^{(\nu+1)}}' x^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots \nu).$$

Normieren wir $x^{(\nu+1)}$ durch Hinzufügen eines skalaren Faktors so, daß $\overline{x^{(\nu+1)}}' x^{(\nu+1)} = 1$, so haben wir zu den $x^{(1)} \ldots x^{(\nu)}$ noch eine Spalte $x^{(\nu+1)}$ unter Erhaltung der gestellten „Orthogonalitätsbedingungen" hinzugefügt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir eine Matrix

$$X = \| x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)} \|$$

mit der Eigenschaft:

$$\overline{X}' X = E,$$

woraus nach dem früher Bewiesenen auch

$$X\overline{X}' = E$$

folgt.

3. *Normalformen.* Es wird mehrfach das Problem auftreten, eine Matrix spezieller Natur in bestimmter Weise in eine Normalform überzuführen. Ich stelle hier die benötigten Sätze zusammen unter Hinzufügung der Beweise, soweit letztere nicht bekannt sind.

a) Eine *reelle symmetrische* Matrix $S\,(S' = S)$ läßt sich mit Hilfe einer reellen orthogonalen Matrix O $(OO' = E)$ in die Gestalt setzen:

$$S = O\varLambda O',$$

wo $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ (vgl. 1) reelle Zahlen sind.

Ist insbesondere $S^2 = E_n$, so kann $\varLambda$ in der Form:

$$\varLambda = \begin{Vmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & -E_{n-\rho} \end{Vmatrix}$$

angenommen werden (Satz und Beweis bekannt).

b) Eine *reelle schiefe* Matrix $T\,(T' = -T)$ von *gerader* Zeilenanzahl n läßt sich mit Hilfe einer reellen orthogonalen Matrix O in die Gestalt setzen:

$$T = O \begin{Vmatrix} 0 & \varLambda \\ -\varLambda & 0 \end{Vmatrix} O',$$

wo $\lambda_1 \ldots \lambda_{\frac{n}{2}}$ reelle Zahlen $\geqslant 0$ sind. Ist insbesondere $T^2 = -E$, so kann $\varLambda = E_{\frac{n}{2}}$ angenommen werden. (Satz und Beweis bekannt.)

c) Eine *komplexe symmetrische* Matrix läßt sich mit Hilfe einer komplexen Matrix O, für die $O\overline{O}' = E$, in die Gestalt setzen:

$$S = O\varLambda O'$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ reelle Zahlen $\geqslant 0$ sind. Ist insbesondere $S\overline{S} = E$, so ist $\varLambda = E$ zu setzen.

Zum Beweise suchen wir ein reelles λ und eine Spaltenmatrix $x^{(1)}$, für welche:

$$S\overline{x^{(1)}} = \lambda x^{(1)}, \quad \overline{x^{(1)}}' x^{(1)} = 1.$$

Setzen wir $S = A + iB$, $x^{(1)} = u + iv$, so haben wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Au + Bv &= \lambda u \\ Bu - Av &= \lambda v, \end{aligned}$$

dessen Determinante

$$\begin{vmatrix} A-\lambda E, & B \\ B & -A-\lambda E \end{vmatrix} = 0$$

sein muß. Wegen der Symmetrie von S ist dies eine gewöhnliche Säkulargleichung mit lauter reellen Wurzeln, die paarweise nur durch das Vorzeichen unterschieden sind. Wir denken für λ eine Wurzel $\geqq 0$ gewählt und die zugehörige Lösung $x^{(1)}$ so normiert, daß $\overline{x^{(1)\prime}}x^{(1)} = 1$.

Wir ergänzen jetzt die Spalte $x^{(1)}$ durch Hinzufügen von $n-1$ weiteren Spalten $x^{(1)} \ldots x^{(n)}$ zu einer Matrix O' mit $O'\overline{O} = E$. Da dann

$$\overline{O}' S \overline{O} = \| \overline{x^{(i)\prime}} S \overline{x^{(k)}} \|,$$

so folgt, wie man leicht einsieht,

$$S = O \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & S^* \end{Vmatrix} O',$$

wo S^* wieder symmetrisch ist. Es ist klar, wie man durch Fortsetzung dieses Verfahrens das ausgesprochene Ergebnis erhält.

d) Eine *komplexe schiefe* Matrix T mit gerader Zeilenanzahl läßt sich mittels einer komplexen Matrix O, für welche $O\overline{O}' = E$, in die Gestalt bringen:

$$T = O \begin{Vmatrix} -\varDelta & 0 \\ 0 & \varDelta \end{Vmatrix} O',$$

wo $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{\frac{n}{2}}$ reell und $\geqq 0$ sind. Ist insbesondere $T\overline{T} = -E$, so ist $\varDelta = E_{\frac{n}{2}}$ zu setzen.

Der Beweis verläuft analog wie unter c); wir setzen hier die Gleichungen an:

$$\begin{aligned} T\overline{x^{(1)}} &= -\lambda x^{(2)} \\ T\overline{x^{(2)}} &= \lambda x^{(1)}. \end{aligned}$$

Trennt man wieder Reelles und Imaginäres, so erkennt man, daß für λ eine gewöhnliche Säkulargleichung herauskommt, deren Wurzeln paarweise entgegengesetzt gleich sind. Nehmen wir eine solche Wurzel $\geqq 0$, und normieren das zugehörige $x^{(1)}$ durch

$$\overline{x^{(1)\prime}} x^{(1)} = 1,$$

so folgt:

$$\overline{x^{(2)\prime}} T \overline{x^{(1)}} = -\lambda \overline{x^{(2)\prime}} x^{(2)} = -\overline{x^{(1)\prime}} T \overline{x^{(2)}} = -\lambda \overline{x^{(1)\prime}} x^{(1)}.$$

Für $\lambda \neq 0$ folgt daraus auch

$$\overline{x^{(2)\prime}} x^{(2)} = 1,$$

für $\lambda = 0$ kann $x^{(2)}$ unabhängig von $x^{(1)}$ so normiert werden.

Außerdem ist wegen der schiefen Symmetrie:

$$\overline{x^{(1)'}}\, T \overline{x^{(1)}} = -\lambda \overline{x^{(1)'}}\, x^{(2)} = 0,$$

also folgt für $\lambda \neq 0$: $\overline{x^{(1)'}}\, x^{(2)} = 0$; dies kann aber auch für $\lambda = 0$ erreicht werden. Denn die Matrix T hat geraden Rang, und $T\overline{x} = 0$ besitzt dann sicher zwei linear unabhängige Lösungen.

Ergänzt man die beiden Spalten $x^{(1)} x^{(2)}$ zu einer Matrix O' mit $O'\overline{O} = E$, so wird, ähnlich wie unter c):

$$T = O \begin{Vmatrix} R & 0 \\ 0 & T^* \end{Vmatrix} O',$$

wo $R = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{Vmatrix}$ und T^* wieder schief ist. Fortsetzung dieses Prozesses und eine schließliche Umstellung der Zeilen und Kolonnen führt zu dem ausgesprochenen Ergebnis.

e) Eine *Quaternionenmatrix* S mit $\overline{S'} = S$ läßt sich mit Hilfe einer Quaternionenmatrix O, für welche $O\overline{O'} = E$, in die Form bringen:

$$S = O \varDelta \overline{O'},$$

wo $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ *skalar* sind. Ist insbesondere $S^2 = E$, so kann

$$\varDelta = \begin{Vmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & -E_{n-\rho} \end{Vmatrix}$$

gesetzt werden.

Beweis: Wir setzen mit einem reellen λ die Gleichungen an:

$$S x^{(1)} = \lambda x^{(2)}$$

und zerspalten in die vier reellen Komponenten. Für λ ergibt sich wieder eine gewöhnliche Säkulargleichung.

Nehmen wir eine Wurzel derselben und normieren das zugehörige Lösungssystem $x^{(1)}$ durch $\overline{x^{(1)'}}\, x^{(1)} = 1$, bestimmen ferner nach 2. $n-1$ weitere Spalten $x^{(2)} \ldots x^{(n)}$, so daß die Matrix $X = \| x^{(1)} \ldots x^{(2)} \|$ der Bedingung $\overline{X'}X = E$ genügt, so wird:

$$\overline{X'} S X = \| \overline{x^{(i)'}}\, S x^{(k)} \| = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & S^* \end{Vmatrix},$$

wo wieder $\overline{S^{*\prime}} = S^*$. Fortsetzung des Verfahrens führt zu der zu beweisenden Aussage.

f) Eine *Quaternionenmatrix* T, *für welche* $T + \overline{T'} = 0$, läßt sich mit Hilfe einer Matrix O $(O\overline{O'} = E)$ in die Gestalt setzen:

$$T = O \varDelta \overline{O'},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ vektorielle Quaternionen sind, deren Richtungen im übrigen beliebig vorgeschrieben werden können. Ist insbesondere $T^2 = -E$, so kann man $\varLambda = \varepsilon_1 E$ annehmen.

Beweis: Es werden die Gleichungen angesetzt (mit *reellem* λ):

$$Tx^{(1)} = x^{(1)} \cdot \lambda_1 \varepsilon_1.$$

Zerspaltung in die vier Komponenten gibt eine Säkulargleichung für λ, also kann man durch ein reelles λ und eine Quaternionenspalte $x^{(1)}$ diese Gleichungen erfüllen. Setzt man $x^{(1)} = z^{(1)} \alpha$, wo α eine beliebige Quaternion, so wird:

$$Tz^{(1)} = z^{(1)} \lambda \alpha \varepsilon_1 \alpha^{-1}.$$

Man kann also nach einer bekannten Darstellung der Rotationen statt der vektoriellen Quaternion $\lambda \varepsilon_1$ eine andere von demselben Betrage und beliebig vorgeschriebener Richtung wählen.

Ergänzt man die Spalte $x^{(1)}$ nach Normierung durch $\overline{x^{(1)}}' x^{(1)} = 1$ wieder zu einer Matrix X mit $\overline{X}' X = E$, so folgt:

$$\overline{X}' T X = \begin{Vmatrix} \lambda \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & T^* \end{Vmatrix}, \text{ wo } \overline{T^*}' + T^* = 0.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man das zu beweisende Ergebnis.

II. Lösung des Problems.

1. *Formulierung.* Es sind reelle quadratische linear unabhängige Matrizen von je n^2 Elementen in möglichst großer Anzahl ν zu bestimmen, so daß

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots + \lambda_\nu T_\nu)(\lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2' + \ldots + \lambda_\nu T_\nu') = \varrho(\lambda_1 \ldots \lambda_\nu) E.$$

Offenbar ist $\varrho(\lambda_1 \ldots \lambda_\nu)$ eine quadratische Form der λ und stets $\geqq 0$. Durch Vornahme einer linearen Transformation der λ kann man also $\varrho(\lambda_1 \ldots \lambda_\nu) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_\mu^2$, $\mu \leqq \nu$ annehmen. Da für $\mu < \nu$ dann sofort $T_{\mu+1} = \ldots = T_\nu = 0$ folgt, was der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der T widerspricht, so können wir die Frage (der HURWITZschen Problemstellung entsprechend) so formulieren:

Es sollen reelle Matrizen T_i von je n^2 Elementen in möglichst großer Anzahl ν so bestimmt werden, daß:

$$(1) \qquad T_i T_i' = E_n, \quad T_i T_k' + T_k T_i' = 0 \; (i \neq k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu).$$

2. *Erste Reduktion.* Das gesuchte System läßt sich in sofort verständlicher Weise so schreiben:

$$(T_1, T_2, \ldots T_\nu) = T_\nu (A_1 A_2 \ldots A_{\nu-1} E_n),$$

und für die Matrizen $A_i (= T'_\nu T_i)$, E_n bleiben die Relationen (1) aufrecht. Sie lauten nun:

$$A_i + A'_i = 0, \quad A_i^2 = -E_n, \quad A_i A_k + A_k A_i = 0 \qquad (2)$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots \nu - 1).$$

Offenbar erhält man zu jedem System $(A_1 \ldots A_{\nu-1})$, das den Relationen (2) genügt, unter Hinzuziehung einer beliebigen Orthogonalmatrix T_ν wieder ein T-System der gewünschten Art. Es ist also nunmehr ein System $(A_1 \ldots A_{\nu-1})$ mit möglichst vielen Elementen zu finden, welche die Relationen (2) erfüllen.

Ist n ungerade, so gibt es keine A_i; denn nach (2) müßte $|A_i|^2 = 1$ sein, während A_i schief ist, was einen Widerspruch bedeutet.

Ist also n ungerade, so ist $\nu(n) = 1$[1].

3. *Zweite Reduktion.* Wenn n gerade ist, so können wir nach I, 3b)

$$A_{\nu-1} = O A^*_{\nu-1} O'$$

setzen, wo O eine reelle Orthogonalmatrix und

$$A^*_{\nu-1} = \begin{Vmatrix} 0 & E_{\frac{n}{2}} \\ -E_{\frac{n}{2}}, & 0 \end{Vmatrix}$$

ist. Es kann also das A-System geschrieben werden:

$$(A_1 \ldots A_{\nu-1}) = O (A_1^* \ldots A^*_{\nu-1}) O'.$$

Für die A^* gelten die Beziehungen (2) unverändert weiter.

Spaltet man die ersten $(\nu - 2) A^*$ homolog zu $A^*_{\nu-1}$ in Teilsysteme:

$$A_i^* = \begin{Vmatrix} R_i & S_i \\ -S'_i & W_i \end{Vmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots \nu - 2, R_i, W_i \text{ schief}),$$

so ergeben die Beziehungen (2) zunächst aus $A_i^* A^*_{\nu-1} + A^*_{\nu-1} A_i^* = 0$, daß $W_i = -R_i$ und S_i schief ist. Also wird:

$$A_i^* = \begin{Vmatrix} R_i & S_i \\ S_i & -R_i \end{Vmatrix} \quad (R_i, S_i \text{ schief}, \ i = 1, 2, \ldots \nu - 2).$$

---

[1]) Dieser erste Schritt der Reduktion findet sich ebenso bei HURWITZ.

Fassen wir R_i und S_i zu einer *schiefen komplexen* Matrix zusammen:

$$R_i + i S_i = B_i \quad (i = 1, 2, .. \nu - 2),$$

so berechnet man leicht:

$$A_i^* A_k^* = \begin{Vmatrix} \Re(B_i \overline{B_k}) & -\Im(B_i \overline{B_k}) \\ \Im(B_i \overline{B_k}) & \Re(B_i \overline{B_k}) \end{Vmatrix}$$

und die Relationen (2) gehen über in:

$$B_i + B_i' = 0, \; B_i \overline{B_i} = -E_{\frac{n}{2}}, \; B_i \overline{B_k} + B_k \overline{B_i} = 0 \tag{3}$$
$$(i, k = 1, 2, .. \nu - 2).$$

Ist nun $\frac{n}{2}$ ungerade, so gibt es wieder keine B, da diese zugleich schief sein und eine von Null verschiedene Determinante haben müssen. Also folgt:

Ist $\frac{n}{2}$ *ungerade, so ist* $\nu(n) = 2$.

4. *Dritte Reduktion.* Ist $\frac{n}{2}$ gerade, so kann nach I, 3d)

$$B_{\nu-2} = O B_{\nu-2}^* O'$$

gesetzt werden, wo

$$O \overline{O}' = E, \quad B_{\nu-2}^* = \begin{Vmatrix} 0 & E_{\frac{n}{4}} \\ -E_{\frac{n}{4}} & 0 \end{Vmatrix}$$

Man erhält so das System $(B_1 .. B_{\nu-2})$ in der Form:

$$(B_1 .. B_{\nu-2}) = O(B_1^* .. B_{\nu-2}^*) O'$$

und die B^* genügen wieder den Relationen (3).

Die B_i^* $(i = 1, 2, .. \nu - 3)$ zerspalten wir homolog zu $B_{\nu-2}^*$ und erhalten dann aus $B_i^* \overline{B_{\nu-2}^*} + B_{\nu-2}^* \overline{B_i^*} = 0$:

$$B_i^* = \begin{Vmatrix} P_i & Q_i \\ \overline{Q_i} & -\overline{P_i} \end{Vmatrix} \quad (P_i + P_i' = 0, \; Q_i + Q_i' = 0).$$

Zerlegen wir noch P_i, Q_i in Real- und Imaginärteil, indem wir

$$P_i = -T_i^{(1)} - i T_i^{(2)}, \; Q_i = -T_i^{(3)} + i S_i$$

setzen (S_i symmetrisch, die T_i schief), so ergibt sich:

$$B_i^* \overline{B_k^*} = \begin{Vmatrix} A & C \\ -\overline{C} & \overline{A} \end{Vmatrix},$$

wo:

$$A = -S_i S_k + T_i^{(1)} T_k^{(1)} + T_i^{(2)} T_k^{(2)} + T_i^{(3)} T_k^{(3)} + \\ + i(-S_i T_k^{(3)} - T_i^{(3)} S_k - T_i^{(1)} T_k^{(2)} + T_i^{(2)} T_k^{(1)})$$

$$C = -S_i T_k^{(2)} - T_i^{(2)} S_k - T_i^{(3)} T_k^{(1)} + T_i^{(1)} T_k^{(3)} + \\ + i(S_i T_k^{(1)} + T_i^{(1)} S_k + T_i^{(2)} T_k^{(3)} - T_i^{(3)} T_k^{(2)}).$$

Führen wir nun die *Quaternionenmatrizen* ein:

$$C_i = S_i + \varepsilon_1 T_i^{(1)} + \varepsilon_2 T_i^{(2)} + \varepsilon_3 T_i^{(3)} \quad (C_i = \bar{C}_i', \; i = 1, 2, \ldots \nu - 3),$$

so schreibt sich dies einfach so:

$$B_i^* \overline{B_k^*} = \begin{Vmatrix} -(C_i C_k)_0 - i(C_i C_k)_3, & -(C_i C_k)_2 + i(C_i C_k)_1 \\ (C_i C_k)_2 + i(C_i C_k)_1, & -(C_i C_k)_0 + i(C_i C_k)_3 \end{Vmatrix},$$

und die Beziehungen (3) gehen in die gleichwertigen über:

$$C_i = \bar{C}_i', \; C_i^2 = E_{\frac{n}{4}}, \; C_i C_k + C_k C_i = 0 \\ (i, k = 1, 2, \ldots \nu - 3). \tag{4}$$

5. *Vierte Reduktion.* Nach I, 3c) läßt sich $C_{\nu-3}$ in die Form bringen:

$$C_{\nu-3} = O C_{\nu-3}^* \bar{O}',$$

wo

$$O\bar{O}' = E_{\frac{n}{4}}, \; C_{\nu-3}^* = \begin{Vmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & -E_{\frac{n}{4}-\rho} \end{Vmatrix}$$

Setzen wir also das System der C so an:

$$(C_1, C_2, \ldots C_{\nu-3}) = O(C_1^* C_2^* \ldots C_{\nu-3}^*) \bar{O}',$$

so erfüllen die C_i^* ebenfalls die Relationen (4). Zerlegen wir die ersten $(\nu - 4)$ C_i^* homolog zu $C_{\nu-3}^*$, so ergibt sich aus $C_i^* = \overline{C_i^*}'$ und $C_i^* C_{\nu-3}^* + C_{\nu-3}^* C_i^* = 0$:

$$C_i^* = \begin{Vmatrix} 0 & B_i \\ \bar{B}_i' & 0 \end{Vmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots \nu - 4).$$

$C_i^{*2} = E$ liefert dann: $B_i \bar{B}_i' = E_\rho$, $\bar{B}_i' B_i = E_{\frac{n}{4}-\rho}$.

Daraus folgt, daß die linearen Gleichungen

$$B_i x = y$$

für beliebige Wahl der y durch $x = \bar{B}_i' y$ lösbar sind. Nach Zerspaltung in reelle Komponenten hat man 4ϱ lineare Gleichungen für $n - 4\varrho$

Unbekannte, die für beliebige Wahl der rechten Seiten lösbar sind. Das ist nur für $n = 8\varrho$ möglich. Wir schließen daraus:

Ist $\frac{n}{4}$ *ungerade, so ist* $\nu(n) = 4$.

Ist dagegen $\frac{n}{4}$ gerade, so können wir $\varrho = \frac{n}{8}$ annehmen und die C_i^* zu bilden suchen. Wir schreiben sie jetzt so:

$$C_i^* = \left\| \begin{matrix} 0 & D_i \\ \bar{D}_i' & 0 \end{matrix} \right\| \quad (i = 1, 2, \ldots \nu - 4),$$

und die (quadratischen) D_i erfüllen nunmehr die Beziehungen:

$$(5) \qquad D_i \bar{D}_i' = E_{\frac{n}{8}}, \quad D_i \bar{D}_k' + D_k \bar{D}_i' = 0,$$

(Die ebenfalls geltenden Relationen

$$\bar{D}_i' D_i = E_{\frac{n}{8}}, \quad \bar{D}_i' D_k + \bar{D}_k' D_i = 0$$

folgen aus (5), wie man mit Hilfe des unter I, 2 über die Reziproke einer Quaternionenmatrix hergeleiteten Ergebnisses leicht einsieht.)

Die Bestimmung der D_i ist, wie man bemerkt, eine Verallgemeinerung des in 1. für die T_i formulierten „Grundproblemes". Auch sie läßt sich vollständig aus dem hier gegebenen Reduktionsverfahren herleiten.

6. *Fünfte Reduktion.* Wir schreiben das System der D_i so:

$$(D_1 \ldots D_{\nu-4}) = D_{\nu-4}\,(F_1 \ldots F_{\nu-5}, E)$$

und erhalten für die F_i die Relationen:

$$(6) \qquad F_i + \bar{F}_i' = 0, \quad F_i^2 = -E_{\frac{n}{8}}, \quad F_i F_k + F_k F_i = 0 \; (i, k = 1, 2, \ldots \nu - 5).$$

7. *Sechste Reduktion.* Nach I, 3 f) können wir setzen:

$$F_{\nu-5} = O F_{\nu-5}^* \bar{O}',$$

wo

$$O \bar{O}' = E, \quad F_{\nu-5}^* = \varepsilon_1 E_{\frac{n}{8}},$$

und schreiben dann das F-System so:

$$(F_1 F_2 \ldots F_{\nu-5}) = O(F_1^* F_2^* \ldots F_{\nu-5}^*)\bar{O}'.$$

Zwischen den F_i^* bestehen dann die Relationen (6) fort.

Aus $F_i^* F_{\nu-5}^* + F_{\nu-5}^* F_i^* = 0$ und $F_i^* + \overline{F_i^*}' = 0$ folgt nun zunächst:

$$F_i^* = \varepsilon_2 S_i^{(1)} + \varepsilon_3 S_i^{(2)},$$

wo $S_i^{(1)}, S_i^{(2)}$ reell symmetrisch sind.

Setzen wir nun:

$$S_i^{(1)} + i S_i^{(2)} = G_i \quad (i = 1, 2, \ldots \nu - 6),$$

so sind die G_i symmetrische komplexe Matrizen und es wird:

$$\begin{aligned} F_i^* F_k^* &= -S_i^{(1)} S_k^{(1)} - S_i^{(2)} S_k^{(2)} + \varepsilon_1 (S_i^{(1)} S_k^{(2)} - S_i^{(2)} S_k^{(1)}) \\ &= -\Re(G_i \overline{G}_k) - \varepsilon_1 \Im(G_i \overline{G}_k). \end{aligned}$$

Für die G_i folgen daraus die zu (6) äquivalenten Beziehungen:

$$G_i' = G_i, \quad G_i \overline{G}_i = E_{\frac{n}{8}}, \quad G_i \overline{G}_k + G_k \overline{G}_i = 0 \tag{7}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots \nu - 6).$$

8. *Siebente Reduktion.* Nach I, 3c) setzen wir:

$$G_{\nu-6} = O G_{\nu-6}^* O',$$

wo:

$$O \overline{O}' = E_{\frac{n}{8}}, \quad G_{\nu-6}^* = E_{\frac{n}{8}}.$$

Schreiben wir entsprechend das G-System so:

$$(G_1 G_2, \ldots G_{\nu-6}) = O (G_1^* G_2^* \ldots G_{\nu-6}^*) O',$$

so bestehen für die G_i^* die Relationen (7) fort. Aus $G_i^* \overline{G_{\nu-6}^*} + G_{\nu-6}^* \overline{G_i^*} = 0$ und $G_i' = G_i$ folgt nun:

$$G_i^* = i H_i,$$

wo $H_1 \ldots H_{\nu-7}$ reell symmetrisch sind. Die Relationen (7) lassen sich dann in die gleichwertigen umsetzen:

$$H_i' = H_i, \quad H_i^2 = E_{\frac{n}{8}}, \quad H_i H_k + H_k H_i = 0 \tag{8}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots \nu - 7).$$

9. *Achte Reduktion.* Nach I, 3a) kann man setzen:

$$H_{\nu-7} = O H_{\nu-7}^* O'$$

mit

$$O O' = E, \quad H_{\nu-7}^* = \left\| \begin{matrix} E_\rho & 0 \\ 0 & -E_{\frac{n}{8}-\rho} \end{matrix} \right\|.$$

Schreiben wir dementsprechend:

$$(H_1 H_2 \ldots H_{\nu-7}) = O(H_1^* H_2^* \ldots H_{\nu-7}^*) O',$$

so gelten für die H^* die Relationen (8) unverändert weiter. Zerspalten wir die ersten $(\nu - 8) H^*$ homolog zu $H_{\nu-7}^*$, so ergibt $H_i^* H_{\nu-7}^* + H_{\nu-7}^* H_i^* = 0$ und $H_i^{*\prime} = H_i^*$ zunächst:

$$H_i^* = \begin{Vmatrix} 0 & T_i \\ T_i' & 0 \end{Vmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots \nu - 8).$$

Wegen $H_i^{*2} = E_{\frac{n}{8}}$ darf die Determinante $|H_i^*|$ nicht verschwinden; dies ist offenbar nur für $\varrho = \frac{n}{8} - \varrho$ möglich. Also erhalten wir zuerst:

Ist $\frac{n}{8}$ ungerade, so ist $\nu(n) = 8$.

Ist aber $\frac{n}{8}$ gerade, so können wir $\varrho = \frac{n}{16}$ annehmen und nach geeigneten T_i fragen. Für diese ergeben sich aber nach (8) die Bedingungen:

$$T_i T_i' = E_{\frac{n}{16}}, \quad T_i T_k' + T_k T_i' = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots \nu - 8). \tag{9}$$

Diese Bedingungen sind aber mit den Bedingungen (1), von denen wir ausgingen, völlig identisch.

Daher folgt:

$$\nu(n) = \nu\left(\frac{n}{16}\right) + 8.$$

Dies ergibt aber in Verbindung mit den im Verlaufe der Reduktion erhaltenen Aussagen über die Fälle, wo $\frac{n}{2^\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ ungerade ist, das am Schlusse der Einleitung formulierte Ergebnis. Offenbar gestattet unser Verfahren für jedes n jede mögliche lineare Schar orthogonaler Matrizen zu gewinnen, doch ist eine Übersicht über die Gesamtheit der möglichen Scharen so kaum zu erhalten.

Hamburg, 29. Mai 1921.