Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo."

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil' oder ‚Theilmenge' einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit' zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl' nennen.

‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

$$\overline{\overline{M}}. \tag{3}$$

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins' wird, so ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.

Zwei Mengen M und N nennen wir ‚äquivalent' und bezeichnen dies mit

$$M \sim N \quad \text{oder} \quad N \sim M, \tag{4}$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

Jedem Theil M_1 von M entspricht alsdann ein bestimmter äquivalenter Theil N_1 von N und umgekehrt.

Hat man ein solches Zuordnungsgesetz zweier äquivalenten Mengen, so lässt sich dasselbe (abgesehen von dem Falle, dass jede von ihnen aus nur einem Elemente besteht) mannigfach modificiren. Namentlich kann stets die Vorsorge getroffen werden, dass einem besonderen Elemente m_0 von M irgend ein besonderes Element n_0 von N entspricht. Denn entsprechen bei dem anfänglichen Gesetze die Elemente m_0 und n_0 noch nicht einander, vielmehr dem Elemente m_0 von M das Element n_1 von N, dem Elemente n_0 von N das Element m_1 von M, so nehme man das modificirte Gesetz, wonach m_0 und n_0 und ebenso m_1 und n_1 entsprechende Elemente beider Mengen werden, an den übrigen Elementen jedoch das erste Gesetz erhalten bleibt. Hierdurch ist jener Zweck erreicht.

Jede Menge ist sich selbst äquivalent:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch unter einander äquivalent:

$$\text{aus } M \sim P \text{ und } N \sim P \text{ folgt } M \sim N. \tag{6}$$

Von fundamentaler Bedeutung ist es, *dass zwei Mengen M und N dann und nur dann dieselbe Cardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind:*

$$\text{aus } M \sim N \quad \text{folgt} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}, \tag{7}$$

und

$$\text{aus } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \quad \text{folgt} \quad M \sim N. \tag{8}$$

Die Aequivalenz von Mengen bildet also das nothwendige und untrügliche Criterium für die Gleichheit ihrer Cardinalzahlen.

In der That bleibt nach der obigen Definition der Mächtigkeit die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ungeändert, wenn an Stelle eines Elementes oder auch an Stelle mehrerer, selbst aller Elemente m von M je ein anderes Ding substituirt wird.

Ist nun $M \sim N$, so liegt ein Zuordnungsgesetz zu Grunde, durch welches M und N gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sind; dabei entspreche dem Elemente m von M das Element n von N. Wir können uns alsdann an Stelle jedes Elementes m von M das entsprechende Element n von N substituirt denken, und es verwandelt sich dabei M in N ohne Aenderung der Cardinalzahl; es ist folglich

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Die Umkehrung des Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass zwischen den Elementen von M und den verschiedenen Einsen ihrer Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss besteht. Denn es wächst gewissermassen, wie wir sahen, $\overline{\overline{M}}$ so aus M heraus, dass dabei aus jedem Elemente m von M eine besondere Eins von $\overline{\overline{M}}$ wird. Wir können daher sagen, dass

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Ebenso ist $N \sim \overline{\overline{N}}$. Ist also $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, so folgt nach (6) $M \sim N$.

Wir heben noch den aus dem Begriff der Aequivalenz unmittelbar folgenden Satz hervor:

Sind $M, N, P, \ldots$ Mengen, die keine gemeinsamen Elemente haben, $M', N', P', \ldots$ ebensolche jenen entsprechende Mengen, und ist

$$M \sim M',\ N \sim N',\ P \sim P', \ldots,$$

so ist auch immer

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.

Das ‚Grösser' und ‚Kleiner' bei Mächtigkeiten.

Sind bei zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ und $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ die *zwei* Bedingungen erfüllt:

1) *es giebt keinen Theil von M, der mit N äquivalent ist,*

2) *es giebt einen Theil N_1 von N, so dass $N_1 \sim M$,*

so ist zunächst ersichtlich, dass dieselben erfüllt bleiben, wenn in ihnen M und N durch zwei denselben äquivalente Mengen M' und N' ersetzt werden; *sie drücken daher eine bestimmte Beziehung der Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu einander aus.*

Ferner *ist die Aequivalenz von M und N, also die Gleichheit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ausgeschlossen;* denn wäre $M \sim N$, so hätte man, weil $N_1 \sim M$, auch $N_1 \sim N$ und es müsste wegen $M \sim N$ auch ein Theil M_1 von M existiren, so dass $M_1 \sim M$, also auch $M_1 \sim N$ wäre, was der Bedingung 1) widerspricht.

Drittens *ist die Beziehung von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{b}$ eine solche, dass sie dieselbe Beziehung von $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{a}$ unmöglich macht;* denn wenn in 1) und 2) die Rollen von M und N vertauscht werden, so entstehen daraus zwei Bedingungen, die jenen contradictorisch entgegengesetzt sind.

Wir drücken die durch 1) *und* 2) *charakterisirte Beziehung von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{b}$ so aus, dass wir sagen: $\mathfrak{a}$ ist kleiner als $\mathfrak{b}$ oder auch $\mathfrak{b}$ ist grösser als $\mathfrak{a}$*, in Zeichen:

$$(1) \qquad \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}.$$

Man beweist leicht, dass

$$(2) \qquad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \text{dann immer} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

Ebenso folgt ohne Weiteres aus jener Definition, dass, *wenn P_1 Theil einer Menge P ist, aus $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P_1}}$ immer auch $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ und aus $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ immer auch $\overline{\overline{P_1}} < \mathfrak{b}$ sich ergiebt.*

Wir haben gesehen, dass von den drei Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

jede einzelne die beiden anderen ausschliesst.

Dagegen versteht es sich keineswegs von selbst und dürfte an dieser Stelle unseres Gedankenganges kaum zu beweisen sein, dass bei irgend zwei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eine von jenen drei Beziehungen nothwendig realisirt sein müsse.

Erst später, wenn wir einen Ueberblick über die aufsteigende Folge der transfiniten Cardinalzahlen und eine Einsicht in ihren Zusammenhang gewonnen haben werden, wird sich die Wahrheit des Satzes ergeben:

A. „*Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Cardinalzahlen, so ist entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.*“

Auf's Einfachste lassen sich aus diesem Satze die folgenden ableiten, von denen wir aber vorläufig keinerlei Gebrauch machen dürfen:

B. „*Sind zwei Mengen M und N so beschaffen, dass M mit einem Theil N_1 von N und N mit einem Theil M_1 von M äquivalent ist, so sind auch M und N äquivalent.*“

C. „*Ist M_1 ein Theil einer Menge M, M_2 ein Theil der Menge M_1, und sind die Mengen M und M_2 äquivalent, so ist auch M_1 den Mengen M und M_2 äquivalent.*“

D. „*Ist bei zwei Mengen M und N die Bedingung erfüllt, dass N weder mit M selbst, noch mit einem Theile von M äquivalent ist, so giebt es einen Theil N_1 von N, der mit M äquivalent ist.*“

E. „*Sind zwei Mengen M und N nicht äquivalent, und giebt es einen Theil N_1 von N, der mit M äquivalent ist, so ist kein Theil von M mit N äquivalent.*“

§ 3.

Die Addition und Multiplication von Mächtigkeiten.

Die Vereinigung zweier Mengen M und N, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, wurde in § 1, (2) mit (M, N) bezeichnet. Wir nennen sie die ‚*Vereinigungsmenge von M und N*'.

Sind M', N' zwei andere Mengen ohne gemeinschaftliche Elemente, und ist $M \sim M'$, $N \sim N'$, so sahen wir, dass auch

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Daraus folgt, dass die Cardinalzahl von (M, N) nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt.

Dies führt zur Definition der Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, indem wir setzen:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}. \tag{1}$$

Da im Mächtigkeitsbegriff von der Ordnung der Elemente abstrahirt ist, so folgt ohne Weiteres

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{2}$$

und für je drei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}. \tag{3}$$

Wir kommen zur Multiplication.

Jedes Element m einer Menge M lässt sich mit jedem Elemente n einer andern Menge N zu einem neuen Elemente (m, n) verbinden; für die Menge aller dieser Verbindungen (m, n) setzen wir die Bezeichnung $(M . N)$ fest. Wir nennen sie die ‚*Verbindungsmenge von M und N*'. Es ist also

$$(M . N) = \{(m, n)\}. \tag{4}$$

Man überzeugt sich, dass auch die Mächtigkeit von $(M . N)$ nur von den Mächtigkeiten $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt; denn ersetzt man die Mengen M und N durch die ihnen äquivalenten Mengen

$$M' = \{m'\} \quad \text{und} \quad N' = \{n'\}$$

und betrachtet man m, m' sowie n, n' als zugeordnete Elemente, so wird die Menge

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

dadurch in ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss zu $(M . N)$ gebracht, dass man (m, n) und (m', n') als einander entsprechende Elemente ansieht; es ist also

$$(M' . N') \sim (M . N). \tag{5}$$

Wir definiren nun das Product $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M . N)}}. \tag{6}$$

Eine Menge mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ lässt sich aus zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch nach folgender Regel herstellen: man gehe von der Menge N aus und ersetze in ihr jedes Element n durch eine Menge $M_n \sim M$; fasst man die Elemente aller dieser Mengen M_n zu einem Ganzen S zusammen, so sieht man leicht, dass

$$S \sim (M . N), \tag{7}$$

folglich

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} . \mathfrak{b} .$$

Denn wird bei irgend einem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze der beiden äquivalenten Mengen M und M_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n mit m_n bezeichnet, so hat man:

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

und es lassen sich daher die Mengen S und $(M . N)$ dadurch gegenseitig eindeutig auf einander beziehen, dass m_n und (m, n) als entsprechende Elemente angesehen werden.

Aus unseren Definitionen folgen leicht die Sätze:

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \mathfrak{b} . \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} . (\mathfrak{b} . \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b}) . \mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

weil

$$(M . N) \sim (N . M),$$
$$\big(M . (N . P)\big) \sim \big((M . N) . P\big),$$
$$\big(M . (N, P)\big) \sim \big((M . N), (M . P)\big).$$

Addition und Multiplication von Mächtigkeiten unterliegen also allgemein dem commutativen, associativen und distributiven Gesetze.

§ 4.

Die Potenzirung von Mächtigkeiten.

Unter einer ‚*Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M*‘ oder einfacher ausgedrückt, unter einer ‚*Belegung von N mit M*‘ verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermassen eine eindeutige Function von n und kann etwa mit $f(n)$ bezeichnet werden; sie heisse ‚*Belegungsfunction* von n‘; die entsprechende Belegung von N werde $f(N)$ genannt.

Zwei Belegungen $f_1(N)$ und $f_2(N)$ heissen dann und nur dann gleich, wenn *für alle Elemente* n *von* N die Gleichung erfüllt ist:

$$f_1(n) = f_2(n), \tag{1}$$

so dass, wenn auch nur für ein einziges besonderes Element $n = n_0$ diese Gleichung nicht besteht, $f_1(N)$ und $f_2(N)$ als verschiedene Belegungen von N charakterisirt sind.

Beispielsweise kann, wenn m_0 ein besonderes Element von M ist, festgesetzt sein, dass für alle n

$$f(n) = m_0$$

sei; dieses Gesetz constituirt eine besondere Belegung von N mit M.

Eine andere Art von Belegungen ergiebt sich, wenn m_0 und m_1 zwei verschiedene besondere Elemente von M sind, n_0 ein besonderes Element von N ist, durch die Festsetzung:

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

für alle n, die von n_0 verschieden sind.

Die Gesammtheit aller verschiedenen Belegungen von N mit M bildet eine bestimmte Menge mit den Elementen $f(N)$; wir nennen sie die ‚*Belegungsmenge von* N *mit* M' und bezeichnen sie durch $(N \mid M)$. Es ist also:

$$(N \mid M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so findet man leicht, dass auch

$$(N \mid M) \sim (N' \mid M'). \tag{3}$$

Die Cardinalzahl von $(N \mid M)$ hängt also nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ ab; sie dient uns zur Definition der Potenz $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}. \tag{4}$$

Für drei beliebige Mengen M, N und P beweist man leicht die Sätze:

$$\big((N \mid M) . (P \mid M)\big) \sim \big((N, P) \mid M\big), \tag{5}$$

$$\big((P \mid M) . (P \mid N)\big) \sim \big(P \mid (M . N)\big), \tag{6}$$

$$\big(P \mid (N \mid M)\big) \sim \big((P . N) \mid M\big), \tag{7}$$

aus denen, wenn $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$ gesetzt wird, auf Grund von (4) und im Hinblick auf § 3, die für drei beliebige Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gültigen Sätze sich ergeben:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} . \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} . \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}, \tag{9}$$

$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}.\mathfrak{c}}. \tag{10}$$

Wie inhaltreich und weittragend diese einfachen auf die Mächtigkeiten ausgedehnten Formeln sind, erkennt man an folgendem Beispiel:

Bezeichnen wir die Mächtigkeit des Linearcontinuums X (d. h. des Inbegriffs X aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind) mit $\mathfrak{o}$, so überzeugt man sich leicht, dass sie sich unter anderm durch die Formel

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \tag{11}$$

darstellen lässt, wo über die Bedeutung von $\aleph_0$ der § 6 Aufschluss giebt.

In der That ist $2^{\aleph_0}$ nach (4) nichts anderes als die Mächtigkeit aller Darstellungen

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \quad (\text{wo } f(\nu) = 0 \text{ oder } 1) \tag{12}$$

der Zahlen x im Zweiersystem. Beachten wir hierbei, dass jede Zahl x nur einmal zur Darstellung kommt, mit Ausnahme der Zahlen $x = \frac{2\nu + 1}{2^\mu} < 1$, die zweimal dargestellt werden, so haben wir, wenn wir die „abzählbare" Gesammtheit der letzteren mit $\{s_\nu\}$ bezeichnen, zunächst

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Hebt man aus X irgend eine „abzählbare" Menge $\{t_\nu\}$ heraus und bezeichnet den Rest mit X_1, so ist

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \quad \{t_\nu\}, \quad X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \quad X_1 \sim X_1,$$

mithin

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

also (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

Aus (11) folgt durch Quadriren (nach § 6, (6))

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

und hieraus durch fortgesetzte Multiplication mit $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

wo ν irgend eine endliche Cardinalzahl ist.

Erhebt man beide Seiten von (11) zur Potenz $\aleph_0$, so erhält man

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Da aber nach § 6, (8) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, so ist

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Die Formeln (13) und (14) haben aber keine andere Bedeutung als diese: „Das ν-dimensionale sowohl, wie das $\aleph_0$-dimensionale Continuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Continuums." Es wird also *der ganze Inhalt* der Arbeit im 84ten Bande des Crelle'schen Journals, pag. 242 *mit diesen wenigen Strichen* aus den *Grundformeln des Rechnens mit Mächtigkeiten* rein algebraisch abgeleitet.

§ 5.

Die endlichen Cardinalzahlen.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie die dargelegten Principien, auf welchen später die Lehre von den actual unendlichen oder transfiniten Cardinalzahlen aufgebaut werden soll, auch die natürlichste, kürzeste und strengste Begründung der endlichen Zahlenlehre liefern.

Einem einzelnen Ding e_0, wenn wir es unter den Begriff einer Menge $E_0 = (e_0)$ subsumiren, entspricht als Cardinalzahl das, was wir ‚Eins' nennen und mit 1 bezeichnen; wir haben:

(1) $$1 = \overline{\overline{E}}_0.$$

Man vereinige nun mit E_0 ein anderes Ding e_1, die Vereinigungsmenge heisse E_1, so dass

(2) $$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1).$$

Die Cardinalzahl von E_1 heisst ‚Zwei' und wird mit 2 bezeichnet

(3) $$2 = \overline{\overline{E}}_1.$$

Durch Hinzufügung neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

welche in unbegrenzter Folge uns successive die übrigen, mit 3, 4, 5, . . . bezeichneten, sogenannten *endlichen Cardinalzahlen* liefern. Die hierbei vorkommende hülfsweise Verwendung derselben Zahlen als Indices rechtfertigt sich daraus, dass eine Zahl erst dann in dieser Bedeutung gebraucht wird, nachdem sie als Cardinalzahl definirt worden ist. Wir haben, wenn unter $\nu - 1$ die der Zahl ν in jener Reihe nächstvorangehende verstanden wird,

(4) $$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1},$$

(5) $$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots e_\nu).$$

Aus der Summendefinition in § 3 folgt:

(6) $$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1,$$

d. h. jede endliche Cardinalzahl (ausser 1) ist die Summe aus der nächst vorhergehenden und 1.

Bei unserm Gedankengange treten nun folgende drei Sätze in den Vordergrund:

A. „*Die Glieder der unbegrenzten Reihe endlicher Cardinalzahlen*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sind alle unter einander verschieden (d. h. die in § 1 aufgestellte Aequivalenzbedingung ist an den entsprechenden Mengen nicht erfüllt)“.

B. „*Jede dieser Zahlen* ν *ist grösser, als die ihr vorangehenden und kleiner, als die auf sie folgenden* (§ 2)."

C. „*Es giebt keine Cardinalzahlen, welche ihrer Grösse nach zwischen zwei benachbarten* ν *und* $\nu + 1$ *lägen* (§ 2)."

Die Beweise dieser Sätze stützen wir auf die zwei folgenden D und E, welche daher zunächst zu erhärten sind.

D. „*Ist* M *eine Menge von solcher Beschaffenheit, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit hat, so hat auch die Menge* (M, e), *welche aus* M *durch Hinzufügung eines einzigen neuen Elementes* e *hervorgeht, dieselbe Beschaffenheit, mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit zu haben.*"

E. „*Ist* N *eine Menge mit der endlichen Cardinalzahl* ν, N_1 *irgend eine Theilmenge von* N, *so ist die Cardinalzahl von* N_1 *gleich einer der vorangehenden Zahlen* $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$."

Beweis von D. Nehmen wir an, es hätte die Menge (M, e) mit einer ihrer Theilmengen, wir wollen sie N nennen, gleiche Mächtigkeit, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, die beide auf einen Widerspruch führen:

1) Die Menge N enthält e als Element; es sei $N = (M_1, e)$; dann ist M_1 ein Theil von M, weil N ein Theil von (M, e) ist. Wie wir in § 1 sahen, lässt sich das Zuordnungsgesetz der beiden äquivalenten Mengen (M, e) und (M_1, e) so modificiren, dass das Element e der einen demselben Element e der andern entspricht; alsdann sind von selbst auch M und M_1 gegenseitig eindeutig auf einander bezogen. Dies streitet aber gegen die Voraussetzung, dass M mit seinem Theile M_1 nicht gleiche Mächtigkeit hat.

2) Die Theilmenge N von (M, e) enthält e nicht als Element, so ist N entweder M oder ein Theil von M. Bei dem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze zwischen (M, e) und N möge das Element e der ersteren dem Elemente f der letzteren entsprechen. Sei $N = (M_1, f)$; dann wird gleichzeitig die Menge M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu M_1 gesetzt sein; M_1 ist aber als Theil von N jedenfalls auch ein Theil von M. Es wäre auch hier M einem seiner Theile äquivalent, gegen die Voraussetzung.

Beweis von E. Es werde die Richtigkeit des Satzes bis zu einem gewissen ν vorausgesetzt und dann auf die Gültigkeit für das nächstfolgende $\nu + 1$ wie folgt geschlossen.

Als Menge mit der Cardinalzahl $\nu + 1$ werde $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots e_\nu)$ zu Grunde gelegt; ist der Satz für diese richtig, so folgt ohne Weiteres (§ 1) auch seine Gültigkeit für jede andere Menge mit derselben Cardinalzahl $\nu + 1$. Sei E' irgend ein Theil von E_ν; wir unterscheiden folgende Fälle:

1) E' enthält e_ν nicht als Element, dann ist E' entweder $E_{\nu-1}$

oder ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also zur Cardinalzahl entweder ν oder eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$, weil wir ja unsern Satz als richtig für die Menge $E_{\nu-1}$ mit der Cardinalzahl ν voraussetzen.

2) E' besteht aus dem einzigen Element e_ν, dann ist $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' besteht aus e_ν und einer Menge E'', so dass $E' = (E'', e_\nu)$ E'' ist ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also vorausgesetztermassen zur Cardinalzahl eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.

Nun ist aber $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, daher hat E' zur Cardinalzahl eine der Zahlen $2, 3, \ldots \nu$.

Beweis von A. Jede der von uns mit E_ν bezeichneten Mengen hat die Beschaffenheit, mit keiner ihrer Theilmengen äquivalent zu sein. Denn nimmt man an, dass dies für ein gewisses ν richtig sei, so folgt aus dem Satze D dasselbe für das nächstfolgende $\nu + 1$.

Für $\nu = 1$ erkennt man aber unmittelbar, dass die Menge $E_1 = (e_0, e_1)$ keiner ihrer Theilmengen, die hier (e_0) und (e_1) sind, äquivalent ist.

Betrachten wir nun irgend zwei Zahlen μ und ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und ist μ die frühere, ν die spätere, so ist $E_{\mu-1}$ eine Theilmenge von $E_{\nu-1}$; es sind daher $E_{\mu-1}$ und $E_{\nu-1}$ nicht äquivalent; die zugehörigen Cardinalzahlen $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ und $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ sind somit nicht gleich.

Beweis von B. Ist von den beiden endlichen Cardinalzahlen μ und ν die erste die frühere, die zweite die spätere, so ist $\mu < \nu$. Denn betrachten wir die beiden Mengen $M = E_{\mu-1}$ und $N = E_{\nu-1}$, so ist an ihnen jede der beiden Bedingungen in § 2 für $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ erfüllt. Die Bedingung 1) ist erfüllt, weil nach Satz E eine Theilmenge von $M = E_{\mu-1}$ nur eine von den Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \mu - 1$ haben, also der Menge $N = E_{\nu-1}$ nach Satz A nicht äquivalent sein kann. Die Bedingung 2) ist erfüllt, weil hier M selbst ein Theil von N ist.

Beweis von C. Sei $\mathfrak{a}$ eine Cardinalzahl, die kleiner ist als $\nu + 1$. Wegen der Bedingung 2) des § 2 giebt es eine Theilmenge von E_ν mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$. Nach Satz E kommt einer Theilmenge von E_ν nur eine der Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$ zu.

Es ist also $\mathfrak{a}$ gleich einer von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$.

Nach Satz B ist keine von diesen grösser als ν.

Folglich giebt es keine Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, die kleiner als $\nu + 1$ und grösser als ν wäre. —

Von Bedeutung für das Spätere ist folgender Satz:

F. „*Ist K irgend eine Menge von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen, so giebt es unter ihnen eine* $\varkappa_1$, *die kleiner als die übrigen, also die kleinste von allen ist.*“

Beweis. Die Menge K enthält entweder die Zahl 1, dann ist diese die kleinste, $\varkappa_1 = 1$; oder nicht. Im letzteren Falle sei J der Inbegriff *aller* derjenigen Cardinalzahlen unsrer Reihe $1, 2, 3, \ldots$, welche kleiner sind, als die in K vorkommenden. Gehört eine Zahl ν zu J, so gehören auch alle Zahlen $< \nu$ zu J. Es muss aber J ein Element ν_1 haben, so dass $\nu_1 + 1$ und folglich auch alle grösseren Zahlen nicht zu J gehören, weil sonst J die Gesammtheit aller endlichen Zahlen umfassen würde, während doch die zu K gehörigen Zahlen nicht in J enthalten sind. J ist also nichts anderes als der Abschnitt $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. Die Zahl $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ ist nothwendig ein Element von K und kleiner als die übrigen.

Aus F schliesst man auf:

G. „*Jede Menge $K = \{\varkappa\}$ von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen lässt sich in die Reihenform*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

bringen, so dass

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots \text{“}$$

§ 6.

Die kleinste transfinite Cardinalzahl Alef-null.

Die Mengen mit endlicher Cardinalzahl heissen ‚*endliche Mengen*‘, alle anderen wollen wir ‚*transfinite Mengen*‘ und die ihnen zukommenden Cardinalzahlen ‚*transfinite Cardinalzahlen*‘ nennen.

Die Gesammtheit *aller endlichen Cardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§ 1) ‚*Alef-null*‘, in Zeichen $\aleph_0$, definiren also

(1) $$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}.$$

Dass $\aleph_0$ eine *transfinite* Zahl, d. h. *keiner endlichen* Zahl μ *gleich* ist, folgt aus der einfachen Thatsache, dass, wenn zu der Menge $\{\nu\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt wird, die Vereinigungsmenge $(\{\nu\}, e_0)$ der ursprünglichen $\{\nu\}$ äquivalent ist. Denn es lässt sich zwischen beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Elemente e_0 der ersten das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu + 1$ der andern entspricht. Nach § 3 haben wir daher:

(2) $$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

In § 5 wurde aber gezeigt, dass $\mu + 1$ stets von μ verschieden ist, daher ist $\aleph_0$ keiner endlichen Zahl μ gleich.

Die Zahl $\aleph_0$ ist grösser als jede endliche Zahl μ:

(3) $$\aleph_0 > \mu.$$

Dies folgt im Hinblick auf § 3 daraus, dass $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots \mu)}}$, kein Theil der Menge $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ äquivalent der Menge $\{\nu\}$ und dass $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ selbst ein Theil von $\{\nu\}$ ist.

Andrerseits ist $\aleph_0$ *die kleinste transfinite Cardinalzahl.*

Ist $\mathfrak{a}$ irgend eine von $\aleph_0$ verschiedene transfinite Cardinalzahl, so ist immer

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Dies beruht auf folgenden Sätzen:

A. „*Jede transfinite Menge T hat Theilmengen mit der Cardinalzahl $\aleph_0$*".

Beweis. Hat man nach irgend einer Regel eine endliche Zahl von Elementen $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$ aus T entfernt, so bleibt stets die Möglichkeit, ein ferneres Element t_ν herauszunehmen. Die Menge $\{t_\nu\}$, worin ν eine beliebige endliche Cardinalzahl bedeutet, ist eine Theilmenge von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, weil $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. „*Ist S eine transfinite Menge mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, S_1 irgend eine transfinite Theilmenge von S, so ist auch $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.*"

Beweis. Vorausgesetzt ist, dass $S \sim \{\nu\}$; bezeichnen wir, unter Zugrundelegung eines Zuordnungsgesetzes zwischen diesen beiden Mengen, mit s_ν dasjenige Element von S, welches dem Elemente ν von $\{\nu\}$ entspricht, so ist

$$S = \{s_\nu\}.$$

Die Theilmenge S_1 von S besteht aus gewissen Elementen $s_\varkappa$ von S und die Gesammtheit aller Zahlen $\varkappa$ bildet einen transfiniten Theil K der Menge $\{\nu\}$. Nach Satz G, § 5 lässt sich die Menge K in die Reihenform bringen

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

wo

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

folglich ist auch

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Daraus folgt, dass $S_1 \sim S$, mithin $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$. —

Aus A und B ergiebt sich die Formel (4) im Hinblick auf § 2.

Aus (2) schliesst man durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

und indem man diese Betrachtung wiederholt,

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Denn nach (1) § 3 ist $\aleph_0 + \aleph_0$ die Cardinalzahl $(\overline{\overline{\{a_\nu\}, \{b_\nu\}}})$, weil

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Nun hat man offenbar

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

also

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

Die Gleichung (6) kann auch so geschrieben werden:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$$

und, indem man zu beiden Seiten wiederholt $\aleph_0$ addirt, findet man, dass

(7) $$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Wir haben aber auch

(8) $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Beweis. Nach (6) des § 3 ist $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ die der Verbindungsmenge

$$\{(\mu, \nu)\}$$

zukommende Cardinalzahl, wo μ und ν unabhängig von einander zwei beliebige endliche Cardinalzahlen sind. Ist auch λ Repräsentant einer beliebigen endlichen Cardinalzahl (so dass $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ und $\{\nu\}$ nur verschiedene Bezeichnungen für dieselbe Gesammtheit aller endlichen Cardinalzahlen sind), so haben wir zu zeigen, dass

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Bezeichnen wir $\mu + \nu$ mit ϱ, so nimmt ϱ die sämmtlichen Zahlenwerthe $2, 3, 4, \ldots$ an, und es giebt im Ganzen $\varrho - 1$ Elemente (μ, ν), für welche $\mu + \nu = \varrho$, nämlich diese:

$$(1, \varrho - 1), (2, \varrho - 2), \ldots (\varrho - 1, 1).$$

In dieser Reihenfolge denke man sich zuerst das eine Element (1, 1) gesetzt, für welches $\varrho = 2$, dann die beiden Elemente, für welche $\varrho = 3$, dann die drei Elemente, für welche $\varrho = 4$ u. s. w., so erhält man sämmtliche Elemente (μ, ν) in einfacher Reihenform:

$$(1, 1);\ (1, 2), (2, 1);\ (1, 3), (2, 2), (3, 1);\ (1, 4), (2, 3), \ldots,$$

und zwar kommt hier, wie man leicht sieht, das Element (μ, ν) an die λ^{te} Stelle, wo

(9) $$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}.$$

λ nimmt jeden Zahlwerth $1, 2, 3, \ldots$ einmal an; es besteht also vermöge (9) eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\lambda\}$ und $\{(\mu, \nu)\}$. —

Werden die beiden Seiten der Gleichung (8) mit $\aleph_0$ multiplicirt, so erhält man $\aleph_0{}^3 = \aleph_0{}^2 = \aleph_0$ und durch wiederholte Multiplication mit $\aleph_0$ die für jede endliche Cardinalzahl ν gültige Gleichung:

(10) $$\aleph_0{}^\nu = \aleph_0 .$$

Die Sätze E und A des § 5 führen zu dem Satze über *endliche* Mengen:

C. „*Jede endliche Menge E ist so beschaffen, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen äquivalent ist.*"

Diesem Satz steht scharf der folgende für *transfinite* Mengen gegenüber:

D. „*Jede transfinite Menge T ist so beschaffen, dass sie Theilmengen T_1 hat, die ihr äquivalent sind.*"

Beweis. Nach Satz A dieses Paragraphen giebt es eine Theilmenge $S = \{t_\nu\}$ von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$. Sei $T = (S, U)$, so dass U aus denjenigen Elementen von T zusammengesetzt ist, welche von den Elementen t_ν verschieden sind. Setzen wir $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, so ist T_1 eine Theilmenge von T und zwar die durch Fortlassung des einzigen Elementes t_1 aus T hervorgehende. Da $S \sim S_1$ (Satz B dieses Paragraphen) und $U \sim U$, so ist auch (§ 1) $T \sim T_1$.

In diesen Sätzen C und D tritt die wesentliche Verschiedenheit von endlichen und transfiniten Mengen am Deutlichsten zu Tage, auf welche bereits im Jahre 1877 im 84sten Bande des Crelle'schen Journals pag. 242 hingewiesen wurde.

Nachdem wir die kleinste transfinite Cardinalzahl $\aleph_0$ eingeführt und ihre nächstliegenden Eigenschaften abgeleitet haben, entsteht die Frage nach den höheren Cardinalzahlen und ihrem Hervorgang aus $\aleph_0$.

Es soll gezeigt werden, dass die transfiniten Cardinalzahlen sich nach ihrer Grösse ordnen lassen und in dieser Ordnung, wie die endlichen, jedoch in einem erweiterten Sinne, eine ‚*wohlgeordnete Menge*' bilden.

Aus $\aleph_0$ geht nach einem bestimmten Gesetze die *nächstgrössere* Cardinalzahl $\aleph_1$, aus dieser nach demselben Gesetze die *nächstgrössere* $\aleph_2$ hervor und so geht es weiter.

Aber auch die unbegrenzte Folge der Cardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

erschöpft nicht den Begriff der transfiniten Cardinalzahl. Es wird die Existenz einer Cardinalzahl nachgewiesen werden, die wir mit $\aleph_\omega$ bezeichnen und welche sich als die zu *allen* $\aleph_\nu$ *nächstgrössere* ausweist; aus ihr geht in derselben Weise wie $\aleph_1$ aus $\aleph_0$ eine nächstgrössere $\aleph_{\omega+1}$ hervor und so geht es ohne Ende fort.

Zu *jeder transfiniten Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ giebt es eine nach einheitlichem Gesetz aus ihr hervorgehende *nächstgrössere;* aber auch zu jeder unbegrenzt aufsteigenden wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{a}\}$ von transfiniten Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ giebt es eine *nächstgrössere*, einheitlich daraus hervorgehende.

Zur strengen Begründung dieses im Jahre 1882 gefundenen und in dem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883", sowie im XXI. Bande der Math. Annalen ausgesprochenen Sachverhaltes bedienen wir uns der sogenannten ‚*Ordnungstypen*', deren Theorie wir zunächst in den folgenden Paragraphen auseinander zu setzen haben. —

§ 7.

Die Ordnungstypen einfach geordneter Mengen.

Eine Menge M nennen wir ‚*einfach geordnet*', wenn unter ihren Elementen m eine bestimmte ‚*Rangordnung*' herrscht, in welcher von je zwei beliebigen Elementen m_1 und m_2 das eine den ‚*niedrigeren*', das andere den ‚*höheren*' Rang einnimmt und zwar so, dass wenn von drei Elementen m_1, m_2 und m_3 etwa m_1 dem Range nach niedriger ist als m_2, dieses niedriger als m_3, alsdann auch immer m_1 niedrigeren Rang hat als m_3.

Die Beziehung zweier Elemente m_1 und m_2, bei welcher m_1 den niedrigeren, m_2 den höheren Rang in der gegebenen Rangordnung hat, soll durch die Formeln ausgedrückt werden

$$(1) \qquad m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1.$$

So ist beispielsweise jede in einer unendlichen Geraden definirte Punktmenge P eine einfach geordnete Menge, wenn von zwei zu ihr gehörigen Punkten p_1 und p_2 demjenigen der niedrigere Rang zugewiesen wird, dessen Coordinate (unter Zugrundelegung eines Nullpunktes und einer positiven Richtung) die kleinere ist. —

Es leuchtet ein, dass eine und dieselbe Menge nach den verschiedensten Gesetzen ‚einfach geordnet' werden kann. Nehmen wir zum Beispiel die Menge R aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (wo p und q theilerfremd seien), die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, so hat man einmal ihre ‚natürliche' Rangordnung der Grösse nach. Dann lassen sie sich aber auch etwa so ordnen (und in dieser Ordnung wollen wir die Menge mit R_0 bezeichnen), dass von zwei Zahlen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$, bei denen die Summen $p_1 + q_1$ und $p_2 + q_2$ verschiedene Werthe haben, diejenige Zahl den niedrigeren Rang erhält, für welche die betreffende Summe die kleinere ist, und dass wenn $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, alsdann die kleinere der beiden rationalen Zahlen die niedrigere sei.

In dieser Rangordnung hat unsere Menge, da zu einem und demselben Werth von $p+q$ immer nur eine endliche Anzahl von verschiedenen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ gehört, offenbar die Form

$$R_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_\nu, \cdots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \cdots\right),$$

wo

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}. \text{ —}$$

Stets also, wenn wir von einer *einfach geordneten* Menge M sprechen, denken wir uns eine *bestimmte Rangordnung* ihrer Elemente in dem erklärten Sinne zu Grunde gelegt. —

Es giebt zweifach, dreifach, ν-fach, α-fach geordnete Mengen, von diesen sehen wir aber vorläufig in unserer Untersuchung ab. Daher sei es uns auch erlaubt, im Folgenden den kürzeren Ausdruck ‚geordnete Menge' zu gebrauchen, während wir die ‚einfach geordnete Menge' im Sinne haben. —

Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter ‚*Ordnungstypus*' oder kürzer ein bestimmter ‚*Typus*' zu, den wir mit

(2) $$\overline{M}$$

bezeichnen wollen; hierunter verstehen wir *den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergiebt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahiren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.*

Darnach ist der Ordnungstypus $\overline{M}$ *selbst eine geordnete Menge,* deren Elemente *lauter Einsen* sind, die dieselbe Rangordnung unter einander haben, wie die entsprechenden Elemente von M, aus denen sie durch Abstraction hervorgegangen sind.

Zwei geordnete Mengen M und N nennen wir ‚*ähnlich*', wenn sie sich gegenseitig eindeutig einander so zuordnen lassen, dass wenn m_1 und m_2 irgend zwei Elemente von M, n_1 und n_2 die entsprechenden Elemente von N sind, alsdann immer die Rangbeziehung von m_1 *zu* m_2 innerhalb M dieselbe ist, wie die von n_1 zu n_2 innerhalb N. Eine solche Zuordnung ähnlicher Mengen nennen wir eine ‚Abbildung' derselben auf einander. Dabei entspricht jeder Theilmenge M_1 von M (die offenbar auch als geordnete Menge erscheint) eine ihr ähnliche Theilmenge N_1 von N.

Die Aehnlichkeit zweier geordneten Mengen M und N drücken wir durch die Formel aus:

(3) $$M \simeq N.$$

Jede geordnete Menge ist sich selbst ähnlich.

Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass *zwei geordnete Mengen dann und nur dann denselben Ordnungstypus haben, wenn sie ähnlich sind, so dass von den beiden Formeln*

$$(4) \qquad \overline{M} = \overline{N}, \quad M \simeq N$$

immer die eine eine Folge der andern ist.

Abstrahirt man an einem Ordnungstypus $\overline{M}$ auch noch von der Rangordnung der Elemente, so erhält man (§ 1) die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ der geordneten Menge M, welche zugleich Cardinalzahl des Ordnungstypus $\overline{M}$ ist.

Aus $\overline{M} = \overline{N}$ folgt immer $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, d. h. geordnete Mengen von gleichem Typus haben immer dieselbe Mächtigkeit oder Cardinalzahl; die Aehnlichkeit geordneter Mengen begründet stets ihre Aequivalenz. Hingegen können zwei geordnete Mengen äquivalent sein, ohne ähnlich zu sein.

Wir werden zur Bezeichnung der Ordnungstypen die kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets gebrauchen.

Ist α ein Ordnungstypus, so verstehen wir unter

$$(5) \qquad \overline{\alpha}$$

die zugehörige Cardinalzahl.

Die Ordnungstypen endlicher einfach geordneter Mengen bieten kein besonderes Interesse. Denn man überzeugt sich leicht, dass für eine und dieselbe endliche Cardinalzahl ν alle einfach geordneten Mengen einander ähnlich sind, also einen und denselben Typus haben. Die endlichen einfachen Ordnungstypen sind daher denselben Gesetzen unterworfen wie die endlichen Cardinalzahlen, und es wird erlaubt sein, für sie dieselben Zeichen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ zu gebrauchen, wenn sie auch begrifflich von den Cardinalzahlen verschieden sind.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungstypen;* denn zu einer und derselben transfiniten Cardinalzahl giebt es unzählig viele verschiedene Typen einfach geordneter Mengen, die in ihrer Gesammtheit eine besondere ‚*Typenclasse*' constituiren.

Jede dieser Typenclassen ist also bestimmt durch die transfinite Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche allen einzelnen zur Classe gehörigen Typen gemeinsam ist; wir nennen sie daher kurz Typenclasse $[\mathfrak{a}]$.

Diejenige von ihnen, welche sich uns naturgemäss zuerst darbietet, und deren vollständige Erforschung daher auch das nächste besondere Ziel der transfiniten Mengenlehre sein muss, ist die Typenclasse $[\aleph_0]$, welche alle Typen mit der kleinsten transfiniten Cardinalzahl $\aleph_0$ umfasst.

Wir haben zu unterscheiden von der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche die Typenclasse $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt*, diejenige Cardinalzahl $\mathfrak{a}'$, welche *ihrerseits* *durch die Typenclasse* $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt ist;* es ist die Cardinalzahl, welche (§ 1) der Typenclasse $[\mathfrak{a}]$ zukommt, sofern sie eine *wohldefinirte Menge* darstellt, *deren Elemente die sämmtlichen Typen* α *mit der Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ *sind.* Wir werden sehen, dass $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ verschieden und zwar immer grösser als $\mathfrak{a}$ ist. —

Werden in einer geordneten Menge M alle Rangbeziehungen ihrer Elemente umgekehrt, so dass überall aus dem ‚niedriger' ein ‚höher' und aus dem ‚höher' ein ‚niedriger' wird, so erhält man wieder eine geordnete Menge, die wir mit

(6) $$^{*}M$$

bezeichnen und die ‚*inverse*' von M nennen wollen.

Den Ordnungstypus von $^{*}M$ bezeichnen wir, wenn $\alpha = \overline{M}$ ist, mit

(7) $$^{*}\alpha.$$

Es kann vorkommen, dass $^{*}\alpha = \alpha$, wie z. B. bei den endlichen Typen oder bei dem Typus der Menge R aller rationalen Zahlen, die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, den wir unter der Bezeichnung η untersuchen werden.

Wir bemerken ferner, dass zwei ähnliche geordnete Mengen entweder auf eine einzige Weise oder auf mehrere Weisen auf einander abgebildet werden können; im ersten Falle ist der betreffende Typus sich selbst nur auf eine Weise ähnlich, im andern auf mehrere Weisen.

So sind nicht nur alle endlichen Typen, sondern die Typen der transfiniten ‚wohlgeordneten Mengen', welche uns später beschäftigen werden und die wir transfinite Ordnungszahlen nennen, von der Art, nur eine einzige Abbildung auf sich selbst zuzulassen. Dagegen ist jener Typus η sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Wir wollen diesen Unterschied an zwei einfachen Beispielen verdeutlichen.

Unter ω verstehen wir den Typus einer wohlgeordneten Menge

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots),$$

in welcher

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

und wo ν Repräsentant aller endlichen Cardinalzahlen ist.

Eine andere wohlgeordnete Menge

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

mit der Bedingung

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

vom nämlichen Typus ω kann offenbar auf jene nur so ‚abgebildet' werden, dass e_ν und f_ν entsprechende Elemente sind. Denn das dem Range nach niedrigste Element e_1 der ersten muss bei der Abbildung dem niedrigsten Element f_1 der zweiten, das dem Range nach auf e_1 nächstfolgende e_2 dem auf f_1 nächstfolgenden f_2 u. s. w. zugeordnet werden.

Jede andere gegenseitig eindeutige Zuordnung der beiden äquivalenten Mengen $\{e_\nu\}$ und $\{f_\nu\}$ ist keine ‚Abbildung‘ in dem Sinne, wie wir ihn oben für die Typentheorie fixirt haben.

Nehmen wir dagegen eine geordnete Menge von der Form

$$\{e_{\nu'}\},$$

wo ν' Repräsentant aller positiven und negativen endlichen ganzen Zahlen mit Einschluss der 0 ist und wo ebenfalls

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Diese Menge hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element. Ihr Typus ist nach der Summendefinition, die im § 8 gegeben werden wird, dieser:

$$^*\omega + \omega.$$

Er ist sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Denn betrachten wir eine Menge von demselben Typus

$$\{f_{\nu'}\},$$

wo

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

so können die beiden geordneten Mengen so aufeinander abgebildet werden, dass, unter ν_0' eine bestimmte der Zahlen ν' verstanden, dem Elemente $e_{\nu'}$ der ersten das Element $f_{\nu_0'+\nu'}$ der zweiten entspricht. Bei der Willkürlichkeit von ν_0' haben wir also hier unendlich viele Abbildungen.

Der hier entwickelte Begriff des „Ordnungstypus“ umfasst, wenn er in gleicher Weise auf „mehrfach geordnete Mengen“ übertragen wird, neben dem in § 1 eingeführten Begriff der „Cardinalzahl oder Mächtigkeit“, alles „Anzahlmässige“, das überhaupt denkbar ist und lässt in diesem Sinne keine weitere Verallgemeinerung zu. Er enthält nichts Willkürliches, sondern ist die naturgemässe Erweiterung des Anzahlbegriffs. *Es verdient besonders betont zu werden, dass das Gleichheitskriterium* (4) *mit absoluter Nothwendigkeit aus dem Begriffe des Ordnungstypus folgt und daher keinerlei Abänderung zulässt.* In dem Verkennen dieses Sachverhaltes ist die Hauptursache der schweren Irrthümer zu erblicken, welche sich in dem Werke des Herrn G. Veronese „Grundzüge der Geometrie“ finden (Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894).

Auf pag. 30 wird dort die „Anzahl oder Zahl einer geordneten Gruppe“ ganz in Uebereinstimmung mit dem, was wir „Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge“ genannt haben, erklärt. (Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890, pag. 68—75, Abdruck aus der Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, vom Jahre 1887).

Dem Kriterium der Gleichheit vermeint aber Herr V. einen Zusatz geben zu müssen. Er sagt pag. 31: „Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen *und von denen die eine nicht ein Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist*, sind gleich.“*)

Diese Definition der Gleichheit enthält einen *Cirkel* und wird daher zu einem *Nonsens.*

Was heisst denn in seinem Zusatz „*einem Theil der andern nicht gleich*“?

Um diese Frage zu beantworten, muss man vor allem wissen, wann zwei Zahlen gleich oder nicht gleich sind. *Es setzt also seine Definition der Gleichheit* (abgesehen von ihrer Willkürlichkeit) *eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt, bei welcher man von neuem wissen muss, was gleich und ungleich ist, u. s. w., u. s. w., in infinitum.*

Nachdem Herr V. auf solche Weise das unentbehrliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen so zu sagen *freiwillig preisgegeben* hat, darf man sich über die Regellosigkeit nicht wundern, in welcher er des Weiteren mit seinen pseudotransfiniten Zahlen operirt und den letzteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie, in der von ihm fingirten Form, selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Auch wird hiermit die auffallende Aehnlichkeit verständlich, welche seinen Zahlbildungen mit den höchst absurden „unendlichen Zahlen“ Fontenelle's in dessen „Géometrie de L'Infini, Paris 1727“ anhaftet.

Kürzlich hat auch Herr W. Killing in dem „Index lectionum“ der Akademie in Münster (für 1895—96) seinen Bedenken gegen die Grundlage des Veronese'schen Buches dankenswerthen Ausdruck gegeben.

§ 8.

Addition und Multiplication von Ordnungstypen.

Die Vereinigungsmenge (M, N) zweier Mengen M und N lässt sich, wenn die letzteren geordnet sind, selbst als eine geordnete Menge auffassen, in welcher die Rangbeziehungen der Elemente von M unter einander, ebenso die Rangbeziehungen der Elemente von N unter einander dieselben wie in M resp. N geblieben sind, dagegen alle Elemente von M niedrigeren Rang als alle Elemente von N haben. Sind M' und N' zwei andere geordnete Mengen, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$,

*) In der italienischen Originalausgabe (pag. 27) lautet diese Stelle wörtlich: „Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell' altro, sono uguali.“

so ist auch $(M, N) \simeq (M', N')$; der Ordnungstypus von (M, N) hängt also nur von den Ordnungstypen $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$ ab; wir definiren also:

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}. \tag{1}$$

In der Summe $\alpha + \beta$ heisst α der ‚*Augendus*', β der ‚*Addendus*'.

Für drei beliebige Typen beweist man leicht das associative Gesetz

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \tag{2}$$

Dagegen ist das commutative Gesetz bei der Addition von Typen im Allgemeinen nicht gültig. Wir sehen dies bereits am folgenden einfachen Beispiel.

Ist ω der im § 7 bereits erwähnte Typus der wohlgeordneten Menge

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

so ist $1 + \omega$ nicht gleich $\omega + 1$.

Denn ist f ein neues Element, so hat man nach (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$

$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Die Menge

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

ist aber der Menge E ähnlich, folglich

$$1 + \omega = \omega.$$

Dagegen sind die Mengen E und (E, f) nicht ähnlich, weil erstere kein dem Range nach höchstes Glied, letztere aber das höchste Glied f hat. $\omega + 1$ ist also von $\omega = 1 + \omega$ verschieden.

Aus zwei geordneten Mengen M und N mit den Typen α und β lässt sich eine geordnete Menge S dadurch herstellen, dass in N an Stelle jedes Elementes n eine geordnete Menge M_n substituirt wird, welche denselben Typus α wie M hat, also

$$\overline{M}_n = \alpha, \tag{3}$$

und dass über die Rangordnung in

$$S = \{M_n\} \tag{4}$$

folgende Bestimmungen getroffen werden:

1) je zwei Elemente von S, welche einer und derselben Menge M_n angehören, behalten in S dieselbe Rangbeziehung wie in M_n,

2) je zwei Elemente von S, welche zwei verschiedenen Mengen M_{n_1} und M_{n_2} angehören, erhalten in S die Rangbeziehung, welche n_1 und n_2 in N haben.

Der Ordnungstypus von S hängt, wie leicht zu sehen, nur von den Typen α und β ab; wir definiren:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{S}. \tag{5}$$

In diesem Producte heisst α der *„Multiplicandus“* und β der *„Multiplicator“*.

Unter Zugrundelegung irgend einer *Abbildung* von M auf M_n sei m_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n.

Wir können dann auch schreiben

$$S = \{m_n\}. \tag{6}$$

Nehmen wir eine dritte geordnete Menge $P = \{p\}$ mit dem Ordnungstypus $\overline{P} = \gamma$ hinzu, so ist nach (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}}, \quad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}},$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Die beiden geordneten Mengen $\{(m_n)_p\}$ und $\{m_{(n_p)}\}$ sind aber ähnlich und werden auf einander abgebildet, indem man ihre Elemente $(m_n)_p$ und $m_{(n_p)}$ als entsprechende ansieht.

Es besteht folglich für drei Typen α, β und γ das *associative Gesetz*

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{7}$$

Aus (1) und (5) folgt auch leicht das *distributive Gesetz*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{8}$$

jedoch nur in dieser Form, wo *der zweigliedrige Factor die Rolle des Multiplicators* hat.

Dagegen hat bei Typen das *commutative Gesetz* ebensowenig bei der Multiplication wie bei der Addition allgemeine Geltung.

Beispielsweise sind $2 . \omega$ und $\omega . 2$ verschiedene Typen; denn nach (5) ist

$$2 . \omega = \overline{(e_1, f_1;\ e_2, f_2;\ \ldots;\ e_\nu, f_\nu;\ \ldots)} = \omega;$$

dagegen ist

$$\omega \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots;\ f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

offenbar von ω verschieden.

Vergleicht man die in § 3 gegebenen Definitionen der Elementaroperationen für Cardinalzahlen mit den hier aufgestellten für Ordnungstypen, so erkennt man leicht, dass die Cardinalzahl der Summe zweier Typen gleich ist der Summe der Cardinalzahlen der einzelnen Typen und dass die Cardinalzahl des Products zweier Typen gleich ist dem Product der Cardinalzahlen der einzelnen Typen.

Jede aus den beiden Elementaroperationen hervorgehende Gleichung zwischen Ordnungstypen bleibt also auch richtig, wenn man darin sämmtliche Typen durch ihre Cardinalzahlen ersetzt.

§ 9.

Der Ordnungstypus η der Menge R aller rationalen Zahlen, die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung.

Unter R verstehen wir, wie in § 7, das System aller rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (p und q als theilerfremd gedacht) die > 0 und < 1, *in ihrer natürlichen Rangordnung*, wo die Grösse der Zahl ihren Rang bestimmt. Den Ordnungstypus von R bezeichnen wir mit η:

$$\eta = \overline{R}. \tag{1}$$

Wir haben aber dort dieselbe Menge auch in eine andere Rangordnung gesetzt, in welcher wir sie R_0 nennen, wobei in erster Linie die Grösse von $p + q$, in zweiter Linie, nämlich bei rationalen Zahlen, für welche $p + q$ denselben Werth hat, die Grösse von $\frac{p}{q}$ selbst den Rang bestimmt. R_0 hat die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots), \quad \text{wo} \quad r_\nu \prec r_{\nu+1}, \tag{2}$$

$$\overline{R}_0 = \omega. \tag{3}$$

R und R_0 haben, weil sie sich nur in der Rangordnung der Elemente unterscheiden, dieselbe Cardinalzahl, und da offenbar $\overline{\overline{R}}_0 = \aleph_0$, so ist auch

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0. \tag{4}$$

Der Typus η gehört also in die Typenclasse $[\aleph_0]$.

Wir bemerken zweitens, dass in R weder ein dem Range nach niedrigstes, noch ein dem Range nach höchstes Element vorkommt.

Drittens hat R die Eigenschaft, dass *zwischen* je zweien seiner Elemente dem Range nach andere liegen; diese Beschaffenheit drücken wir mit den Worten aus: *R ist ‚überalldicht'*.

Es soll nun gezeigt werden, dass diese drei Merkmale den Typus η von R kennzeichnen, so dass folgender Satz besteht:

„Hat man eine einfach geordnete Menge M, welche die drei Bedingungen erfüllt:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$.

2) M hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element.

3) M ist überalldicht,

so ist der Ordnungstypus von M gleich η:

$$\overline{M} = \eta."$$

Beweis. Wegen der Bedingung 1) lässt sich M in die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω bringen; in einer solchen Form zu Grunde gelegt, bezeichnen wir M mit M_0 und setzen

(5) $$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots).$$

Wir haben nun zu zeigen, dass

(6) $$M \simeq R.$$

D. h. es muss bewiesen werden, dass sich M auf R *abbilden* lässt, so dass das Rangverhältniss je zweier Elemente in M dasselbe ist, wie das Rangverhältniss der beiden entsprechenden Elemente in R.

Das Element r_1 in R möge dem Elemente m_1 in M zugeordnet werden.

r_2 hat eine bestimmte Rangbeziehung zu r_1 in R; wegen der Bedingung 2) giebt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche zu m_1 dieselbe Rangbeziehung in M haben, wie r_2 zu r_1 in R; *von ihnen* wählen wir dasjenige, welches in M_0 den kleinsten Index hat, es sei m_{ι_2} und ordnen es dem r_2 zu.

r_3 hat in R bestimmte Rangbeziehungen zu r_1 und r_2; wegen der Bedingungen 2) und 3) giebt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche in M zu m_1 und m_{ι_2} dieselben Rangbeziehungen haben, wie r_3 zu r_1 und r_2 in R; wir wählen dasjenige von ihnen, es sei m_{ι_3}, welches in M_0 den kleinsten Index hat, dieses ordnen wir dem r_3 zu.

Nach diesem Gesetze denken wir uns das Zuordnungsverfahren fortgesetzt; sind den ν Elementen

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

von R bestimmte Elemente

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

von M als Bilder zugewiesen, welche in M dieselben Rangbeziehungen unter einander haben wie die entsprechenden in R, so werde dem Elemente $r_{\nu+1}$ von R das in M_0 mit dem kleinsten Index versehene Element $m_{\iota_{\nu+1}}$ von M als Bild zugewiesen, welches zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

dieselben Rangbeziehungen in M hat, wie $r_{\nu+1}$ zu $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ in R.

Wir haben auf diese Weise *allen* Elementen r_ν von R bestimmte Elemente m_{ι_ν} von M als Bilder zugewiesen und die Elemente m_{ι_ν} haben in M dieselbe Rangordnung wie die entsprechenden Elemente r_ν in R.

Es muss aber noch gezeigt werden, dass die Elemente m_{ι_ν} *alle Elemente m_ν von M* umfassen oder, was dasselbe ist, dass die Reihe

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

nur eine *Permutation* der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

ist.

Dies beweisen wir durch eine *vollständige Induction*, indem wir zeigen, dass *wenn* die Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bei der Abbildung zur Geltung kommen, *dasselbe auch bei dem folgenden Elemente* $m_{\nu+1}$ *der Fall ist.*

Sei λ so gross, dass unter den Elementen

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

die Elemente

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu,$$

(welche vorausgesetztermassen zur Abbildung gelangen) vorkommen. Es kann sein, dass sich auch $m_{\nu+1}$ darunter vorfindet; dann kommt $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung.

Findet sich aber $m_{\nu+1}$ *nicht unter den Elementen*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda},$$

so hat $m_{\nu+1}$ zu diesen Elementen innerhalb M eine bestimmte Rangstellung; dieselbe Rangstellung zu $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ in R haben unzählig viele Elemente von R, unter ihnen sei das in R_0 mit dem kleinsten Index versehene $r_{\lambda+\sigma}$.

Dann hat $m_{\nu+1}$, wie man sich leicht überzeugt, auch zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

dieselbe Rangstellung in M, wie $r_{\lambda+\sigma}$ zu

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}$$

in R. Da $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bereits zur Abbildung gelangt sind, so ist $m_{\nu+1}$ das mit dem kleinsten Index in M_0 versehene Element, welches diese Rangstellung zu

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

hat. Folglich ist nach unserm Zuordnungsgesetze

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Es kommt also auch in diesem Falle das Element $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung und zwar ist $r_{\lambda+\sigma}$ das ihm zugeordnete Element von R.

So sehen wir, dass durch unsern Zuordnungsmodus *die ganze Menge M* auf *die ganze Menge R* abgebildet wird; M und R sind ähnliche Mengen, w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich beispielsweise die folgenden:

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller negativen und positiven rationalen Zahlen, mit Einschluss der Null, in ihrer natürlichen Rangordnung."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Zahlen, welche grösser als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen, welche grösser als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$."

Denn alle diese geordneten Mengen erfüllen die drei in unserm Satze für M geforderten Bedingungen (M. v. Crelle's Journal Bd. 77, pag. 258).

Betrachten wir ferner nach den in § 8 gegebenen Definitionen Mengen mit den Typen $\eta + \eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$ so finden sich auch bei ihnen jene drei Bedingungen erfüllt. Wir haben somit die Sätze:

$$\eta + \eta = \eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta = \eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta = \eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta = \eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta = \eta. \tag{11}$$

Die wiederholte Anwendung von (7) und (8) giebt für jede endliche Zahl ν:

$$\eta \cdot \nu = \eta, \tag{12}$$

$$\eta^\nu = \eta. \tag{13}$$

Dagegen sind, wie man leicht sieht, für $\nu > 1$, die Typen $1 + \eta$, $\eta + 1$, $\nu \cdot \eta$, $1 + \eta + 1$ sowohl unter sich, wie auch von η verschieden. Andrerseits ist

$$\eta + 1 + \eta = \eta, \tag{14}$$

dagegen $\eta + \nu + \eta$ für $\nu > 1$ von η verschieden.

Endlich verdient hervorgehoben zu werden, dass

$$^*\eta = \eta. \tag{15}$$

§ 10.

Die in einer transfiniten geordneten Menge enthaltenen Fundamentalreihen.

Legen wir irgend eine einfach geordnete transfinite Menge M zu Grunde. Jede Theilmenge von M ist selbst eine geordnete Menge. Für das Studium des Typus $\overline{M}$ scheinen diejenigen Theilmengen von M, denen die Typen ω und $^*\omega$ zukommen, besonders werthvoll zu sein; wir nennen sie ‚*in M enthaltene Fundamentalreihen erster Ordnung*' und zwar die ersteren (vom Typus ω) ‚*steigende*', die anderen (vom Typus $^*\omega$) ‚*fallende*'.

Da wir uns auf die Betrachtung von Fundamentalreihen *erster Ordnung* beschränken (in späteren Untersuchungen werden auch solche *höherer Ordnung* zur Geltung kommen), so wollen wir sie hier einfach ‚*Fundamentalreihen*' nennen.

Eine ‚steigende Fundamentalreihe' hat also die Form

(1) $$\{a_\nu\}, \quad \text{wo} \quad a_\nu \prec a_{\nu+1},$$

eine ‚fallende Fundamentalreihe' ist von der Form

(2) $$\{b_\nu\}, \quad \text{wo} \quad b_\nu \succ b_{\nu+1}.$$

ν hat überall in unseren Betrachtungen (sowie auch $\varkappa, \lambda, \mu$) die Bedeutung einer beliebigen endlichen Cardinalzahl oder auch eines endlichen Typus resp. einer endlichen Ordnungszahl.

Zwei in M enthaltene steigende Fundamentalreihen $\{a_\nu\}$ und $\{a'_\nu\}$ nennen wir, *zusammengehörig*', in Zeichen

(3) $$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\},$$

wenn sowohl zu jedem Elemente a_ν Elemente a'_λ existiren, so dass

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

wie auch zu jedem Elemente a'_ν Elemente a_μ vorhanden sind, so dass

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Zwei in M enthaltene fallende Fundamentalreihen $\{b_\nu\}$ und $\{b'_\nu\}$ heissen ‚*zusammengehörig*', in Zeichen

(4) $$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\},$$

wenn zu jedem Elemente b_ν Elemente b'_λ vorhanden sind, so dass

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

und zu jedem Elemente b'_ν Elemente b_μ existiren, so dass

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Eine steigende Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ und eine fallende $\{b_\nu\}$ nennen wir dann ‚*zusammengehörig*', in Zeichen

$$(5) \qquad \{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\},$$

wenn 1) für alle ν und μ

$$a_\nu \prec b_\mu$$

und 2) in M *höchstens ein* Element m_0 (also entweder nur eines oder gar kein solches) existirt, so dass für alle ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Es bestehen dann die Sätze:

A. „*Sind zwei Fundamentalreihen zusammengehörig mit einer dritten, so sind sie auch unter einander zusammengehörig.*"

B. „*Zwei gleichgerichtete Fundamentalreihen, von denen die eine Theilmenge der andern ist, sind stets zusammengehörig.*"

Existirt in M ein Element m_0, welches zu der steigenden Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ eine solche Stellung hat, dass

1) für jedes ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) für jedes Element m von M das $\prec m_0$, eine gewisse Zahl ν_0 existirt, so dass

$$a_\nu \succ m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0,$$

so wollen wir m_0 ‚*Grenzelement von* $\{a_\nu\}$ *in* M' und zugleich ein ‚*Hauptelement von* M' nennen.

Ebenso nennen wir auch m_0 ein ‚*Hauptelement von* M' und zugleich ‚*Grenzelement von* $\{b_\nu\}$ *in* M', wenn die Bedingungen erfüllt sind:

1) für jedes ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) für jedes Element m von M, das $\succ m_0$, existirt eine gewisse Zahl ν_0, so dass

$$b_\nu \prec m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Eine Fundamentalreihe kann *nie mehr als ein* Grenzelement in M haben; M aber hat im Allgemeinen viele Hauptelemente.

Man überzeugt sich von der Wahrheit folgender Sätze:

C. „*Hat eine Fundamentalreihe ein Grenzelement in M, so haben alle mit ihr zusammengehörigen Fundamentalreihen dasselbe Grenzelement in M.*"

D. „*Haben zwei Fundamentalreihen (gleichgerichtete oder verschiedengerichtete) ein und dasselbe Grenzelement in M, so sind sie zusammengehörig.*"

Sind M und M' zwei ähnliche geordnete Mengen, so dass

$$(6) \qquad \overline{M} = \overline{M'},$$

und legt man *irgend eine Abbildung* der beiden Mengen zu Grunde, so gelten, wie man leicht sieht, folgende Sätze:

E. „*Jeder Fundamentalreihe in M entspricht als Bild eine Fundamentalreihe in M′ und umgekehrt; jeder steigenden eine steigende, jeder fallenden eine fallende; zusammengehörigen Fundamentalreihen in M entsprechen als Bilder zusammengehörige Fundamentalreihen in M′ und umgekehrt.*"

F. „*Gehört zu einer Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so gehört auch zu der entsprechenden Fundamentalreihe in M′ ein Grenzelement in M′ und umgekehrt; und diese beiden Grenzelemente sind Bilder von einander bei der Abbildung.*"

G. „*Den Hauptelementen von M entsprechen als Bilder Hauptelemente von M′ und umgekehrt.*"

Besteht eine Menge M aus lauter Hauptelementen, so dass jedes ihrer Elemente ein Hauptelement ist, so nennen wir sie eine ‚*insichdichte Menge.*"

Giebt es zu jeder Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so nennen wir M eine ‚*abgeschlossene Menge*'.

Eine Menge, die sowohl ‚insichdicht', wie auch ‚abgeschlossen' ist, heisse eine ‚*perfecte Menge*'.

Hat eine Menge eins von diesen drei Prädicaten, so kommt dasselbe Prädicat auch jeder ähnlichen Menge zu; es lassen sich dieselben Prädicate daher auch den entsprechenden Ordnungstypen zuschreiben, und es giebt somit ‚*insichdichte Typen*', ‚*abgeschlossene Typen*', ‚*perfecte Typen*', desgleichen auch ‚*überalldichte Typen*' (§ 9).

So ist z. B. η ein ‚insichdichter' Typus; wie in § 9 gezeigt, ist er auch ‚überalldicht', aber nicht ‚abgeschlossen'.

ω und $^*\omega$ haben keine Hauptelemente (Haupteinsen); dagegen haben $\omega + \nu$ und $\nu + {}^*\omega$ je ein Hauptelement und sind ‚abgeschlossene' Typen.

Der Typus $\omega \cdot 3$ hat zwei Hauptelemente, ist aber nicht ‚abgeschlossen'; der Typus $\omega \cdot 3 + \nu$ hat drei Hauptelemente und ist ‚abgeschlossen'.

§ 11.

Der Ordnungstypus θ des Linearcontinuums X.

Wir wenden uns zur Untersuchung des Ordnungstypus der Menge $X = \{x\}$ aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, so dass bei zwei beliebigen Elementen x und x' derselben

(1) $$x \prec x', \quad \text{falls} \quad x < x'.$$

Die Bezeichnung dieses Typus sei

(1) $$\bar{X} = \theta.$$

Aus den Elementen der rationalen und irrationalen Zahlenlehre weiss man, dass jede Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ in X ein Grenzelement x_0 in X hat, und dass auch umgekehrt jedes Element x von X Grenzelement von zusammengehörigen Fundamentalreihen in X ist. Somit ist X eine ‚*perfecte Menge*', θ ein ‚*perfecter Typus*'.

Damit ist θ aber noch nicht ausreichend charakterisirt, wir haben vielmehr noch folgende Eigenschaft von X ins Auge zu fassen:

X *enthält* die in § 9 untersuchte Menge R vom Ordnungstypus η als Theilmenge und zwar *im Besondern so, dass zwischen je zwei beliebigen Elementen* x_0 und x_1 von X Elemente von R dem Range nach liegen.

Es soll nun gezeigt werden, dass *diese Merkmale zusammengenommen* in erschöpfender Weise den Ordnungstypus θ des Linearcontinuums X kennzeichnen, so dass der Satz gilt:

„*Hat eine geordnete Menge* M *ein solches Gepräge, dass sie* 1) ‚*perfect*' *ist*, 2) *in ihr eine Menge* S *mit der Cardinalzahl* $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$ *enthalten ist, welche zu* M *in der Beziehung steht, dass zwischen je zwei beliebigen Elementen* m_0 *und* m_1 *von* M *Elemente von* S *dem Range nach liegen, so ist* $\overline{M} = \theta$."

Beweis. Sollte S ein niedrigstes oder ein höchstes Element haben, so würden sie wegen 2) auch denselben Charakter als Elemente von M tragen; wir könnten sie alsdann von S entfernen, ohne dass diese Menge dadurch die in 2) ausgedrückte Beziehung zu M verliert.

Wir setzen daher S von vornherein ohne niedrigstes und höchstes Element voraus; S hat alsdann nach § 9 den Ordnungstypus η.

Denn da S ein Theil von M ist, so müssen nach 2) zwischen je zwei beliebigen Elementen s_0 und s_1 von S dem Range nach andere Elemente von S liegen. Ausserdem haben wir nach 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Die beiden Mengen S und R sind daher einander ‚*ähnlich*',

(2) $$S \simeq R.$$

Wir denken uns irgend eine ‚*Abbildung*' von R auf S zu Grunde gelegt und behaupten, dass dieselbe zugleich eine bestimmte ‚*Abbildung*' von X auf M ergiebt, und zwar in folgender Weise:

Alle Elemente von X, die gleichzeitig der Menge R angehören, mögen als Bilder denjenigen Elementen von M entsprechen, welche zugleich Elemente von S sind und bei der vorausgesetzten Abbildung von R auf S jenen Elementen von R entsprechen.

Ist aber x_0 ein nicht zu R gehöriges Element von X, so lässt sich dasselbe als Grenzelement einer in X enthaltenen Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ ansehen, welche durch eine in R enthaltene mit ihr zusammengehörige Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ ersetzt werden kann. Der letzteren entspricht als Bild eine Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S und M, welche wegen 1) von einem Elemente m_0 in M begrenzt wird, das nicht zu S gehört. (F, § 10). Dieses Element m_0 in M (welches dasselbe bleibt, wenn an Stelle der Fundamentalreihen $\{x_\nu\}$ und $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ andere von demselben Elemente x_0 in X begrenzte gedacht werden, [E, C, D, § 10]) gelte als Bild von x_0 in X. Umgekehrt gehört zu jedem Elemente m_0 von M, welches nicht in S vorkommt, ein ganz bestimmtes Element x_0 von X, welches nicht zu R gehört und von welchem m_0 das Bild ist.

Auf diese Weise ist zwischen X und M eine gegenseitig eindeutige Beziehung hergestellt, von der zu zeigen ist, dass sie eine ‚Abbildung' dieser Mengen begründet.

Dies steht von vornherein für diejenigen Elemente von X und M fest, welche gleichzeitig den Mengen R resp. S angehören.

Vergleichen wir ein Element r von R mit einem nicht zu R gehörigen Elemente x_0 von X; die zugehörigen Elemente von M seien s und m_0.

Ist $r < x_0$, so giebt es eine steigende Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$, welche von x_0 begrenzt wird, und es ist von einem gewissen ν_0 an

$$r < r_{\varkappa_\nu} \quad \text{für} \quad \nu \gtreqq \nu_0.$$

Das Bild von $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ in M ist eine steigende Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$, welch ein M von m_0 begrenzt wird, und man hat (§ 10) erstens $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ für jedes ν und andrerseits $s \prec s_{\lambda_\nu}$, für $\nu \gtreqq \nu_0$, daher (§ 7) $s \prec m_0$.

Ist $r > x_0$, so schliesst man ähnlich, dass $s \succ m_0$.

Betrachten wir endlich zwei nicht zu R gehörige Elemente x_0 und x_0' und die ihnen in M entsprechenden Elemente m_0 und m_0', so zeigt man durch eine analoge Betrachtung, dass wenn $x_0 < x_0'$, alsdann $m_0 \prec m_0'$.

Damit wäre der Beweis der Aehnlichkeit von X und M erbracht, und es ist daher

$$\overline{M} = \theta.$$

Halle, März 1895.