Zur Theorie der Euler'schen Integrale.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

In dem Euler'schen Integrale erster Art

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

welches hier durch $E(a, b)$ bezeichnet werden soll, müssen, damit dasselbe einen bestimmten Sinn habe, die reellen Bestandtheile der Grössen a und b positiv sein. Zur Ausdehnung der Definition auf negative Werthe von a und b kann zunächst die Reductionsformel dienen, welche $E(a, b)$ mit $E(a+m, b+n)$ verbindet (m und n ganzzahlig, $a+m>0$, $b+n>0$) oder die Darstellung der Grösse $E(a, b)$ durch ein unendliches Product. Für den Fall, dass nur eine der Constanten a, b im reellen Theile negativ ist, hat H. Hankel ein Integral eingeführt, dessen Integrationsweg eine geschlossene, von 0 oder 1 ausgehende Curve ist*). Dieses Verfahren hat Herr Bigler wesentlich erweitert, indem er für beliebige Werthe von a und b das Euler'sche Integral $E(a, b)$ durch zwei Integrale, deren Integrationswege einfache geschlossene Curven sind, ausdrückt**).

---

*) „Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments", Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrgang 9, 1864 (pag. 12). Hankel behandelt das Integral $\int_{+1}^{+1}(-y)^p(1-y)^q\,dy$, dessen Integrationscurve den Punkt 0 umschliesst.

**) „Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter", Crelle's Journal Bd. 102, 1887, § 2. Herr Bigler leitet für das Euler'sche Integral $E(a, b)$ die Gleichung

$$E(a, b) = \frac{1}{2i\sin(\pi a)}\,e^{-i\pi a}\,V - \frac{1}{2i\sin(\pi b)}\,e^{-i\pi b}\,W$$

ab, wo V und W zwei Integrale von $u^{a-1}(1-u)^{b-1}$ bedeuten, in denen die Integrationsvariable u (von einem beliebigen Punkte aus) einen einfachen Umlauf um den Punkt 0, resp. um den Punkt 1 ausführt.

In den nachstehenden Betrachtungen, welche sich an die Abhandlung des Verfassers „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf"*) anschliessen, wird nicht eine neue Darstellung des Euler'schen Integrals $E(a, b)$, sondern ein (auch für negative a, b brauchbarer) Ersatz desselben aufgesucht, insbesondere hinsichtlich der Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen. Man bezeichnet durch $\mathfrak{E}(a, b)$ das Integral

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)}\int u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \int (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du,$$

in welchem die Variable u einen Doppelumlauf von der in jener Abhandlung angegebenen Art um die Punkte 0 und 1 ausführt. Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ stellt, da es für alle endlichen Werthe von a und b einen bestimmten Sinn behält, eine transcendente ganze Function der zwei Argumente a, b dar. Sind die reellen Theile von a und b positiv, so wird $\mathfrak{E}(a, b)$ mit dem Ausdruck

$$(e^{\pi ia}-e^{-\pi ia})\,(e^{\pi ib}-e^{-\pi ib})\,E(a, b) = -4\sin(\pi a)\sin(\pi b)\,E(a, b)$$

identisch. Das Resultat, dass das Product aus dem Euler'schen Integrale $E(a, b)$ und der Grösse $-4\sin(\pi a)\sin(\pi b)e^{i\pi(a+b)}$ für beliebige endliche Argumente a, b endlich bleibt, ist bereits in den Rechnungen des Herrn Bigler enthalten, der indessen dieses Product selbst nicht zum Gegenstand seiner Untersuchungen nimmt.

Die im Folgenden behandelte Grösse $\mathfrak{E}(a, b)$ ist für reelle Werthe von a und b selbst reell; sie verschwindet, wenn a oder b gleich einer positiven ganzen Zahl, oder wenn $a+b$ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null wird. Wie das Euler'sche Integral $E(a, b)$ ist auch $\mathfrak{E}(a, b)$ symmetrisch in Bezug auf a und b. Für $\mathfrak{E}(a+m, b)$ besteht, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, die Formel

$$\mathfrak{E}(a+m, b) = (-1)^m \frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\,\mathfrak{E}(a, b).$$

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ bleibt ausserdem unverändert, wenn eins der Argumente a, b durch $1-a-b$ ersetzt wird.

Die Definition des Integrals $\mathfrak{E}(a, b)$ und die Ableitung der soeben erwähnten Eigenschaften desselben, sowie einiger anderer Formeln, bildet den Gegenstand des nachstehenden § 1. In § 2 wird vorausgesetzt, dass von den Constanten a und b die eine im reellen Theil positiv sei. Dann kommt $\mathfrak{E}(a, b)$ auf ein hier durch $\overline{E}(a, b)$ bezeichnetes Integral von der von Hankel betrachteten Art zurück, dessen Integrationsweg aus einer einfachen geschlossenen Curve besteht.

Der § 3 knüpft an das Verfahren an, durch welches H. Hankel das Euler'sche Integral zweiter Art $\Gamma(a)$ für beliebige Werthe von a

*) Dieser Band, pag. 470.

definirt*). Hankel leitet für den Quotienten $\frac{1}{\Gamma(a)}$, der, wie Herr Weierstrass hervorgehoben hat**), für jedes endliche a endlich bleibt, den allgemein gültigen Integralausdruck

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty} e^{-t}(-t)^{-a}dt$$

ab, dessen Integrationsweg im unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe beginnt und endigt und den Punkt 0 umschliesst. Setzt man $t = -u$, so dass die Variable u vom unendlich entfernten Punkt der negativen reellen Axe ausgeht, so entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2\pi i}\int e^{u} u^{-a}\, du,$$

welche von Heine***) und von Herrn Bigler†) in ihren Untersuchungen angewendet worden ist††). Die Rechnungen des nachstehenden § 3 beziehen sich nun auf das Integral

$$\int e^{u} u^{a-1}\, du,$$

dessen Integrationsweg mit dem des letztgenannten Ausdrucks übereinstimmt. Dasselbe wird hier durch $\bar{\Gamma}(a)$ bezeichnet. Der Vergleich mit der Hankel'schen Formel zeigt, dass

$$\bar{\Gamma}(a) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)}$$

ist. Für ein positives a, wo das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ convergirt, ergiebt sich unmittelbar die Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\,\Gamma(a) = 2i \sin(\pi a)\,\Gamma(a),$$

welche in die zuvor erwähnte übergeht, wenn die Relation

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

benutzt wird. Statt also den Quotienten $\frac{1}{\Gamma(a)}$ zu behandeln, kann man, wie im Folgenden geschieht, die Eigenschaft der Gammafunction, dass

---

*) § 2—3 der erwähnten Abh. im 9ten Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift.

**) „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten", Crelle's Journal, Bd. 51, pag. 7 und 36, 1856.

***) „Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy", Abschnitt I, in Crelle's Journal, Bd. 89, pag. 19, 1880.

†) l. c. § 1.

††) Man vergleiche auch die Abhandlung des Herrn J. Thomae „Beitrag zur Theorie der Function $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x\end{pmatrix}$" in Schlömilch's Zeitschrift, Jahrgang 14, 1869.

ihre für endliche Argumente eintretenden Unstetigkeiten sich durch Multiplication mit $e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}$ oder mit $\sin(\pi a)$ beseitigen lassen, zum Ausgangspunkt der Betrachtung nehmen. Das Integral $\bar{\Gamma}(a)$, das eine transcendente ganze Function von a ist, steht zu $\Gamma(a)$ in einer ähnlichen Beziehung wie die in § 1 definirte Grösse $\mathfrak{E}(a, b)$ zu dem Euler'schen Integral $E(a, b)$. Aus den oben genannten Gleichungen folgt, dass

$$\bar{\Gamma}(a+1) = -a\bar{\Gamma}(a)$$

ist, und dass $\bar{\Gamma}(a)$ für positive ganzzahlige Werthe von a verschwindet.

Die Grössen $\mathfrak{E}(a, b)$, $\bar{E}(a, b)$ und $\bar{\Gamma}(a)$ finden, ebenso wie $E(a, b)$ und $\Gamma(a)$, bei der Integration gewisser linearer Differentialgleichungen Anwendung, indem sie den Zusammenhang zwischen den Lösungen in Reihenform und den Lösungen durch bestimmte Integrale vermitteln. Als Beispiel hierfür werden in § 4 die bestimmten Integrale, welche die Lösung der Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe im allgemeinen Falle darstellen, mit den zugehörigen Potenzreihen verglichen.

Die oben genannte (vorstehende) Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" wird im Folgenden kurz durch Abh. bezeichnet.

---

§ 1.

In der Ebene der Variable u ziehe man von einem Punkte c aus, der auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 liegt, zwei geschlossene, weder sich selbst noch einander schneidende Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, von denen die erstere den Punkt $u = 0$, die letztere den Punkt $u = 1$ umschliesst, und integrire die Function

$$(1) \qquad f(u) = e^{-\pi i(a+b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}$$

nach u in der Art, dass die Grösse u zunächst längs $\mathfrak{Q}$ den Punkt 1, sodann längs $\mathfrak{P}$ den Punkt 0 in positiver Drehungsrichtung umkreist und hierauf die Curven $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ auch im entgegengesetzten Sinne durchläuft. In dem Anfangswerthe der Function $f(u)$ an der unteren Integralgrenze $u = c$,

$$f(c) = e^{-\pi i(a+b)} c^{a-1}(1-c)^{b-1},$$

wähle man diejenigen Werthe der Potenzen c^{a-1} und $(1-c)^{b-1}$, die durch die Reihen

$$(2)\begin{cases} c^{a-1} = [1-(1-c)]^{a-1} = 1 - \frac{a-1}{1}(1-c) + \frac{(a-1)(a-2)}{1.2}(1-c)^2 - \cdots, \\ (1-c)^{b-1} = 1 - \frac{b-1}{1}c + \frac{(b-1)(b-2)}{1.2}c^2 - \cdots \end{cases}$$

dargestellt werden, die also für reelle a, b reell und positiv sind. Dieser specielle Werth $f(c)$ wird f_0 genannt. Bringt man die Potenzen c^{a-1} und $(1-c)^{b-1}$ auf die Form

$$c^{a-1} = e^{(a-1)\log c}, \quad (1-c)^{b-1} = e^{(b-1)\log(1-c)},$$

so sind in f_0 für $\log c$ und $\log(1-c)$ die reellen Werthe zu nehmen.

Das so definirte Integral der Function $f(u)$ soll $\mathfrak{E}(a, b)$ genannt werden. Man hat für dasselbe, nach § 1 der erwähnten Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" die abgekürzte Bezeichnung

$$(3) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)} \overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du.$$

Die reelle Axe der u-Ebene treffe, abgesehen von c, die Curve $\mathfrak{P}$ im Punkte $\varkappa$, die Curve $\mathfrak{Q}$ im Punkte λ. Indem man ausserdem zwei

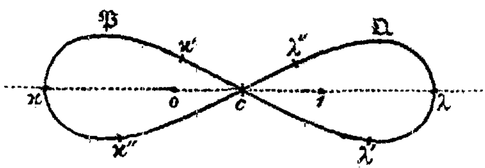

Fig. 1.

Punkte $\varkappa'$, $\varkappa''$ auf $\mathfrak{P}$ und zwei Punkte λ', λ'' auf $\mathfrak{Q}$ fixirt, kann man nach Fig. 1 die vier Theile des Integrationsweges von $\mathfrak{E}(a, b)$ durch

$$c\lambda'\lambda\lambda''c, \quad c\varkappa'\varkappa\varkappa''c, \quad c\lambda''\lambda\lambda'c, \quad c\varkappa''\varkappa\varkappa'c$$

bezeichnen. $\mathfrak{E}(a, b)$ ist hiernach gleich der Summe der vier Integrale

$$(4) \quad \overline{\int_c^{(1)}} f(u)\, du, \quad \overline{\int_c^{(0)}} f(u)\, du, \quad \overline{\int_c^{(1-)}} f(u)\, du, \quad \overline{\int_c^{(0-)}} f(u)\, du,$$

deren Integrationswege nur je einen der singulären Punkte $u = 0$ und $u = 1$ umkreisen.

Der Werth des Integrals $\mathfrak{E}(a, b)$ hängt von der unteren Integralgrenze c nicht ab (s. d. Abh.). Sind die reellen Bestandtheile der Constanten a und b positiv, so gilt für das auf der rechten Seite von (3) stehende Integral (nach Formel (9) der Abh.) die Gleichung

$$\overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1} du = (e^{2\pi i a} - 1)(e^{2\pi i b} - 1)\, E(a, b),$$

in welcher $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$(5) \qquad E(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du$$

bedeutet; denn die Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ können alsdann auf je einen (doppelt durchlaufenen) Abschnitt der reellen Axe und einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt 0, resp. um den Punkt 1 reducirt werden. Auch für $E(a, b)$ gilt die Bedingung, dass die Potenzen u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ im Punkte $u=c$ die Werthe (2) annehmen. Die Integrale $\mathfrak{E}(a, b)$ und $E(a, b)$ sind folglich im genannten Falle $(a>0,\ b>0)$ durch die Relation

$$(6) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})(e^{\pi i b} - e^{-\pi i b})\, E(a, b)$$

mit einander verbunden, welcher man auch die Form

$$(6\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = -4 \sin(\pi a) \sin(\pi b)\, E(a, b)$$

geben kann.

Das Integral $E(a, b)$ hat für alle endlichen Werthe von a und b einen bestimmten endlichen Werth. Denn die zu integrirende Function $f(u)$ ist, da man einen bestimmten Anfangswerth derselben fixirt hat, und die Variable u nach der Voraussetzung durch die Punkte 0 und 1 nicht hindurchgeht, in allen Punkten des Integrationsweges eindeutig und stetig, und der Integrationsweg hat eine endliche Länge. Mithin stellt $\mathfrak{E}(a, b)$ eine transcendente ganze Function der zwei Argumente a und b dar.

Setzt man, was keine Beschränkung ist, die Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ als Kreise mit den Mittelpunkten $u=0$ und $u=1$ voraus, so gilt für die Variable u auf $\mathfrak{P}$ die Gleichung $u=ce^{\vartheta i}$, auf $\mathfrak{Q}$ die Gleichung $u-1=(1-c)e^{\vartheta_1 i}$, wo ϑ zwischen 0 und 2π, ϑ_1 zwischen $-\pi$ und π variirt. Die Punkte $\varkappa$ und λ (Fig. 1) werden dann $\varkappa=-c$, $\lambda=2-c$. Wenn u den Halbkreis $c\varkappa'\varkappa$ durchläuft, so nimmt die Potenz u^{a-1} den Factor $e^{\pi i(a-1)}$ auf; ebenso tritt zu $(1-u)^{b-1}$ der Factor $e^{\pi i(b-1)}$ hinzu, wenn u in positiver Drehungsrichtung von c zu λ übergeht. Betrachtet man also die Producte

$$e^{-\pi i(a-1)} u^{a-1}, \quad e^{-\pi i(b-1)} (1-u)^{b-1}$$

und wählt für u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ im Punkte $u=c$ die in (2) bezeichneten Werthe, so ist, wenn u den erwähnten Weg $c\varkappa'\varkappa$, bezw. $c\lambda'\lambda$ zurückgelegt hat, der Ausdruck $e^{-\pi i(a-1)}u^{a-1}$ im Punkte $\varkappa$ gleich dem in (2) angegebenen Werthe c^{a-1}, bezw. der Ausdruck $e^{-\pi i(b-1)}(1-u)^{b-1}$ im Punkte λ gleich dem in (2) angegebenen Werthe $(1-c)^{b-1}$. Diese Erwägungen übertragen sich auf den allgemeineren Fall, wo die Gestalt der Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eine beliebige bleibt. Es seien A und B die Constanten

$$(7) \qquad \begin{cases} A = e^{-\pi i(a-1)}\varkappa^{a-1} = (-\varkappa)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-\varkappa)}, \\ B = e^{-\pi i(b-1)}(1-\lambda)^{b-1} = (\lambda-1)^{b-1} = e^{(b-1)\log(\lambda-1)}, \end{cases}$$

in denen der reelle $\log(-\varkappa)$, resp. der reelle $\log(\lambda-1)$ zur Anwendung kommt. Durchläuft u den Bogen $c\varkappa'\varkappa$, resp. den Bogen $c\lambda'\lambda$ (Fig. 1), und hat die Function $f(u)$, welche man als das Product

$$e^{-\pi i(a-1)}u^{a-1}\, e^{-\pi i(b-1)}(1-u)^{b-1} = (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}$$

schreiben kann, im Punkte c den oben bezeichneten Werth f_0, so wird die Potenz $(-u)^{a-1}$ im Punkte $\varkappa$ gleich A und die Potenz $(u-1)^{b-1}$ im Punkte λ gleich B. Hieraus folgt, dass man $\mathfrak{E}(a, b)$ auch als das Integral

$$(8) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = \overline{\int_c}^{(1, 0, 1-, 0-)} (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du$$

definiren und die Bestimmung treffen kann, dass bei den positiven Umläufen längs $\mathfrak{P}$, bezw. $\mathfrak{Q}$ der Factor $(-u)^{a-1}$ der zu integrirenden Function für $u = \varkappa$ den Werth A, der Factor $(u-1)^{b-1}$ für $u = \lambda$ den Werth B annehmen soll. Denn diese Angabe der Werthe der Potenzen $(-u)^{a-1}$, $(u-1)^{b-1}$ in den Punkten $\varkappa$, λ (Fig. 1) ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass $f(u)$ im Punkte c den Anfangswerth f_0 habe. Für reelle a, b sind A, B reell und positiv. Die hier angestellte Betrachtung zeigt ferner, dass $\mathfrak{E}(a, b)$ auch als das Integral

$$(8a) \qquad \mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a-1)} \overline{\int_c}^{(1, 0, 1-, 0-)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du$$

definirt werden kann, wenn man festsetzt, dass die Potenz $(u-1)^{b-1}$ bei dem positiven Umlauf längs $\mathfrak{Q}$ für $u = \lambda$ (Fig. 1) den obigen Werth B hat, während u^{a-1} an der unteren Integralgrenze c gleich dem in (2) bezeichneten Werthe c^{a-1} ist.

Setzt man in dem Integral (3)

$$u = 1 - u', \quad u' = 1 - u,$$

so entspricht dem positiven Umlauf der Variable u um $u = 0$, resp. $u = 1$ ein positiver Umlauf der Variable u' um $u' = 1$, resp. $u' = 0$. Wird also die Constante $1 - c$ durch c' bezeichnet, so ergiebt sich für $\mathfrak{E}(a, b)$ der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(a, b) = -e^{-\pi i(a+b)} \overline{\int_{c'}}^{(0, 1, 0-, 1-)} u'^{\,b-1}(1-u')^{a-1}\,du'.$$

In dem rechts stehenden Integral tritt, wenn die singulären Punkte 0 und 1 in Bezug auf die Reihenfolge der Umkreisung mit einander vertauscht werden, nur der Factor -1 hinzu (Formel (8) der Abh.); denn die Umkehrung des Integrationsweges hat jene Vertauschung zur Folge. Ausserdem kann man die untere Grenze c', da sie ohne Einfluss auf den Werth des Integrals ist, durch c ersetzen; der Anfangswerth von $f(u)$ wird dann wieder gleich f_0. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)} \overline{\int_c}^{(1, 0, 1-, 0-)} u'^{\,b-1}(1-u')^{a-1}\,du',$$

welche beweist, dass

(9) $$\mathfrak{E}(a,b) = \mathfrak{E}(b,a)$$

ist.

Die Anwendung der Formel der theilweisen Integration auf die Grösse

$$\mathfrak{E}(a+1,b) = -e^{-\pi i(a+b)}\overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^a(1-u)^{b-1}\,du$$

führt zu dem Ausdrucke

$$\mathfrak{E}(a+1,b) =$$

$$= e^{-\pi i(a+b)}\left[\frac{u^a(1-u)^b}{b}\right]_{u=c}^{u=c} - \frac{a}{b}\,e^{-\pi i(a+b)}\overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}} u^{a-1}(1-u)^b\,du.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung heben sich die vom Integralzeichen freien Summanden gegenseitig auf; denn da die Variable u jeden der Punkte 0, 1 sowohl im positiven als auch im negativen Sinne umkreist, so nimmt das Product $u^a(1-u)^b$ im Endpunkte des Integrationsweges den anfänglichen Werth wieder an. Indem man sodann

$$(1-u)^b = (1-u)^{b-1} - u(1-u)^{b-1}$$

substituirt, findet man die Formel

(10) $$\mathfrak{E}(a+1,b) = -\frac{a}{a+b}\,\mathfrak{E}(a,b),$$

aus der für ein beliebiges positives ganzzahliges m die Gleichungen

(11) $$\mathfrak{E}(a+m,b) = (-1)^m \frac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+m-1)}\,\mathfrak{E}(a,b),$$

(12) $$\mathfrak{E}(a-m,b) = (-1)^m \frac{(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-m)}{(a-1)(a-2)\dots(a-m)}\,\mathfrak{E}(a,b)$$

erhalten werden. Die Gleichungen (11) und (12) unterscheiden sich nur durch den Factor $(-1)^m$ von den zwischen den Euler'schen Integralen $E(a+m,b)$ und $E(a,b)$, resp. $E(a-m,b)$ und $E(a,b)$ bestehenden Relationen.

Wird a gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null, so ist die Function $f(u)$ in der Umgebung des Punktes $u=0$ eindeutig. Alsdann heben sich in dem Integral $\mathfrak{E}(a,b)$ diejenigen Bestandtheile gegenseitig auf, die sich auf die zwei Umkreisungen des Punktes $u=1$ beziehen. Der Endwerth der Function $f(u)$ in dem ersten der Integrale (4), der gleich $e^{2\pi ib}f_0$ ist, stimmt im genannten Falle, wo $f(u)$ sich durch den Umlauf der Variable u um den Punkt $u=0$ nicht ändert, mit dem Anfangs- und Endwerth von $f(u)$ im zweiten, also auch mit dem Anfangswerth von $f(u)$ im dritten der Integrale (4) überein. Hieraus folgt, dass die Summe des ersten und des dritten Integrals gleich Null ist. Nennt man ferner K dasjenige (längs $\mathfrak{P}$ genommene) Integral

$$K = \int_c^{\overline{\bullet(0)}} f(u)\, du = e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{\overline{\bullet(0)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du,$$

an dessen unterer Grenze $u = c$ die zu integrirende Function $f(u)$ den Werth f_0 hat, so ist das zweite der Integrale (4) gleich $e^{2\pi i b} K$ und das vierte gleich $-K$. Im Falle eines ganzzahligen Argumentes a besteht also für $\mathfrak{E}(a, b)$ die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = (e^{2\pi i b} - 1)\, K = 2 i e^{\pi i b} \sin(\pi b)\, K.$$

Man hat nun zu unterscheiden, ob a positiv oder negativ, bezw. 0 ist. Für positive ganzzahlige Werthe von a verschwindet das Integral K, weil $f(u)$ dann bei $u = 0$ eindeutig und stetig bleibt. Bezeichnet also m irgend eine positive ganze Zahl, so ist

$$\mathfrak{E}(m, b) = 0 \tag{13}$$

für einen beliebigen Werth von b, und daher auch (cfr. 9)

$$\mathfrak{E}(a, m) = 0 \tag{14}$$

für einen beliebigen Werth von a. Ist dagegen a eine negative ganze Zahl, die $-m$ heissen möge, so entwickelt man, um K zu bestimmen, die Potenz $(1-u)^{b-1}$ in die Reihe

$$(1-u)^{b-1} = 1 - \frac{b-1}{1} u + \frac{(b-1)(b-2)}{1.2} u^2 - \cdots,$$

was mit der Bedingung im Einklang steht, dass in f_0 der Factor $(1-c)^{b-1}$ gleich der in (2) angegebenen Reihe sein soll. Hierdurch erhält man für $f(u)$, da $a = -m$, $e^{-\pi i a} = (-1)^m$ ist, die Entwickelung

$$f(u) = (-1)^m e^{-\pi i b}\left[u^{-m-1} - \frac{b-1}{1} u^{-m} + \cdots + (-1)^m \frac{(b-1)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m} u \quad \cdots\right],$$

die auch im Falle $m = 0$ gültig bleibt. Die Integration der Function $f(u)$ längs der geschlossenen Curve $\mathfrak{P}$ führt nun, da der mit u^{-1} multiplicirte Summandus allein ein von Null verschiedenes Resultat liefert, zu der Gleichung

$$K = \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m} e^{-\pi i b} 2\pi i$$

und im Fall $m = 0$ zu der Gleichung

$$K = e^{-\pi i b} 2\pi i.$$

Also ist

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}(0, b) &= -4\pi \sin(\pi b), \\ \mathfrak{E}(-m, b) &= -4\pi \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m} \sin(\pi b) \end{aligned}\right. \tag{15}$$

für beliebige Werthe von b und für positive ganzzahlige Werthe von m. Diesen Gleichungen kann man wegen der Relation (9) auch die Form

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}(a, 0) = -4\pi \sin(\pi a), \\ \mathfrak{E}(a, -m) = -4\pi \dfrac{(a-1)(a-2)\ldots(a-m)}{1.2\ldots m} \sin(\pi a) \end{cases}$$

geben, wo dann a einen beliebigen Werth bedeutet.

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ verschwindet, nach (13) und (14), für ein positives ganzzahliges a oder b. Dasselbe wird ferner gleich Null, sobald die Summe $a+b$ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist. Man setze zunächst voraus, dass weder a noch b ganzzahlig, aber $a+b$ gleich der negativen ganzen Zahl $-n$, resp. gleich 0 sei. Dann kann man in der Formel (11)

$$\mathfrak{E}(a, b) = (-1)^m \frac{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-1)} \mathfrak{E}(a+m, b)$$

für m den Werth $n+1$, resp. den Werth 1 wählen, wodurch der Factor $a+b+m-1$ und folglich die ganze rechte Seite der letzteren Gleichung den Werth Null annimmt. Dass $\mathfrak{E}(a, b)$ auch in dem Fall verschwindet, wo a und b ganzzahlig sind und $a+b$ eine negative ganze Zahl oder Null ist, ergiebt sich aus den Formeln (15) und (16), da dann $\sin(\pi b)$, bezw. $\sin(\pi a)$ gleich Null wird. Also bestehen die Gleichungen

$$(17)\qquad \mathfrak{E}(a, -a) = 0, \quad \mathfrak{E}(a, -n-a) = 0$$

für jeden Werth von a und für jeden ganzzahligen Werth von n.

Man bemerke, dass die Gleichungen (15) sich auch mittelst der Formeln (10) und (6a) ableiten lassen, wenn man berücksichtigt, dass das Euler'sche Integral $E(a, b)$ für $a = 1$ den Werth $\frac{1}{b}$ hat. Nach (10) ist

$$\mathfrak{E}(a, b) = -\frac{a+b}{a} \cdot \mathfrak{E}(a+1, b),$$

und für $\mathfrak{E}(a+1, b)$ ergiebt sich aus (6a), da

$$\sin[\pi(a+1]) = -\sin(\pi a)$$

ist, der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(a+1, b) = 4\sin(\pi a)\sin(\pi b)\, E(a+1, b).$$

Durch Benutzung der Reihe

$$\sin(\pi a) = \pi a \left[1 - \frac{(\pi a)^2}{1.2.3} + \frac{(\pi a)^4}{1.2.3.4.5} - \cdots\right]$$

findet man daher für $\mathfrak{E}(a, b)$ die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = -4\pi(a+b)\sin(\pi b)\left[1 - \frac{(\pi a)^2}{1.2.3} + \cdots\right] E(a+1, b),$$

welche für $a = 0$ den im Vorhergehenden ermittelten Werth

$$\mathfrak{E}(0, b) = -4\pi \sin(\pi b)$$

liefert. Da ferner für ein positives ganzzahliges m die Relation

$$\mathfrak{E}(-m, b) = \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}{1.2\ldots m}\,\mathfrak{E}(0, b)$$

besteht, die aus (11) für $a = -m$ erhalten wird, so ist auch die zweite der Gleichungen (15) durch die obige Rechnung bestätigt.

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ hat einen reellen Werth, sobald a und b reell sind. Dies folgt, wenn a und b zugleich positiv sind, unmittelbar aus der Gleichung (6a), da das Integral $E(a, b)$ dann convergent und reell ist. Auf den eben genannten Fall lässt sich aber auch der Fall negativer reeller Argumente a, b reduciren, da man mit Hülfe der Formel (11) die Grösse $\mathfrak{E}(a, b)$ durch eine Grösse $\mathfrak{E}(a+m, b+n)$, in der $a+m$, $b+n$ positiv sind, ausdrücken kann.

In die Gleichung (6a)

$$\mathfrak{E}(a, b) = -4 \sin(\pi a) \sin(\pi b)\, E(a, b)$$

führe man statt des Euler'schen Integrals $E(a, b)$ das unendliche Product ein, durch welches dasselbe dargestellt wird,

$$E(a, b) = \frac{a+b}{ab} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\nu(a+b+\nu)}{(a+\nu)(b+\nu)}, \tag{18}$$

und substituire auch für $\sin(\pi a)$ und $\sin(\pi b)$ die unendlichen Producte

$$\sin(\pi a) = \pi a \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\nu+a)(\nu-a)}{\nu^2},$$

$$\sin(\pi b) = \pi b \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\nu+b)(\nu-b)}{\nu^2}.$$

Dann heben sich die in (18) vorkommenden Nenner fort, und man findet $\mathfrak{E}(a, b)$ gleich dem unendlichen Producte

$$\mathfrak{E}(a, b) = -4\pi^2 (a+b) \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(1-\frac{a}{\nu}\right)\left(1-\frac{b}{\nu}\right)\left(1+\frac{a+b}{\nu}\right). \tag{19}$$

Das Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ bleibt unverändert, wenn man eins der Argumente a, b durch $1-a-b$ ersetzt. Aus der Formel (19) ergiebt sich für $\mathfrak{E}(1-a-b, b)$, falls die rechte Seite als der Grenzfall eines endlichen Productes geschrieben wird, der Ausdruck

$$\mathfrak{E}(1-a-b, b) = -4\pi^2(1-a) \lim_{n=\infty} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left(1+\frac{a+b-1}{\nu}\right)\left(1-\frac{b}{\nu}\right)\left(1+\frac{1-a}{\nu}\right).$$

Aber da

$$(1-a)\prod_{\nu=1}^{\nu=n}\left(1+\frac{a+b-1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1-a}{\nu}\right)$$

$$=(1-a)\frac{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+n-1)}{1.2\ldots n}\,\frac{(2-a)(3-a)\ldots(n+1-a)}{1.2\ldots n}$$

$$=\frac{(1-a)\ldots(n-a)}{1.2\ldots n}(a+b)\frac{(a+b+1)\ldots(a+b+n)}{1.2\ldots n}\,\frac{n+1-a}{a+b+n}$$

ist, und der Quotient $\frac{n+1-a}{a+b+n}$ sich mit wachsendem n dem Werthe Eins nähert, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{E}(1-a-b,b)=-4\pi^2(a+b)\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1-\frac{a}{\nu}\right)\left(1-\frac{b}{\nu}\right)\left(1+\frac{a+b}{\nu}\right),$$

deren rechte Seite (nach (19)) gleich $\mathfrak{E}(a,b)$ ist. Wegen der Symmetrie der Grösse $\mathfrak{E}(a,b)$ in Bezug auf ihre Argumente können auch in $\mathfrak{E}(1-a-b,b)$ die Werthe a und b vertauscht werden. Es ist demnach

(20) $$\mathfrak{E}(a,b)=\mathfrak{E}(1-a-b,b)=\mathfrak{E}(a,1-a-b).$$

Bei diesem Beweise der Formel (20) wird die in (18) angegebene Entwickelung des Euler'schen Integrals $E(a,b)$ in ein unendliches Product als bekannt vorausgesetzt. Die genannte Formel soll nun noch auf eine zweite, directere Art hergeleitet werden, indem man $\mathfrak{E}(a,b)$ durch eine lineare Substitution in $\mathfrak{E}(1-a-b,b)$ überführt. Nach der am Eingang dieses Paragraphen gegebenen Definition hat man für $\mathfrak{E}(1-a-b,b)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{E}(1-a-b,b)=e^{\pi i(a-1)}\overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}}u^{-a-b}(1-u)^{b-1}\,du,$$

unter der Voraussetzung, dass an der unteren Integralgrenze der Werth

$$[u^{-a-b}(1-u)^{b-1}]_{u=c}=e^{-(a+b)\log c}\,e^{(b-1)\log(1-c)},$$

in welchem $\log c$ und $\log(1-c)$ die reellen Logarithmen bedeuten, angewendet werde. Um $\mathfrak{E}(a,b)$ in das letztere Integral umzuformen, modificirt man zunächst die Figur 1, indem man specielle Annahmen über die Gestalt der Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ macht. Mit einem Radius, der grösser als 1 ist, werde um den Punkt $u=0$ als Mittelpunkt ein Kreis $\mathfrak{T}$ gezogen, welcher die positive reelle Axe im Punkte $u=\lambda$, die negative reelle Axe im Punkte $u=\varkappa$ treffen möge. Der Werth λ giebt die Länge des Kreisradius an. Man construirt ferner im Punkte c (der auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 liegt, im Uebrigen aber beliebig ist) eine Senkrechte $\mathfrak{S}$ und nennt γ und δ die Punkte, in denen die Gerade $\mathfrak{S}$ die obere, resp. die untere Hälfte des Kreises $\mathfrak{T}$

schneidet (Fig. 2). Dann kann die Curve $\mathfrak{P}$ (Fig. 1) aus der geraden Strecke $\gamma c \delta$ und dem Kreisbogen $\delta \varkappa \gamma$, die Curve $\mathfrak{Q}$ aus $\gamma c \delta$ und dem Kreisbogen $\delta \lambda \gamma$ gebildet werden. Der Integrationsweg des Integrals

$$\mathfrak{G}(a, b) = e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{\overline{(1, 0, 1-, 0-)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1} du$$

setzt sich hiernach aus den Strecken

$$c\delta\lambda\gamma c, \quad c\gamma\varkappa\delta c, \quad c\gamma\lambda\delta c, \quad c\delta\varkappa\gamma c$$

oder, was dasselbe bedeutet, aus

$$c\delta\lambda, \quad \lambda\gamma\varkappa\delta c\gamma\lambda, \quad \lambda\delta\varkappa\gamma c$$

zusammen. Die zuerst genannte Strecke $c\delta\lambda$ darf, da der Endwerth der zu integrirenden Function gleich ihrem Anfangswerthe ist, zur letzten Strecke genommen werden, wodurch der Weg

$$\lambda\gamma\varkappa\delta c\gamma\lambda, \quad \lambda\delta\varkappa\gamma c\delta\lambda$$

erhalten wird. Um den Werth der Function $f(u)$ im Anfangspunkte λ dieses Integrationsweges zu bestimmen, giebt man ihr die Form

(21) $f(u) = e^{-\pi i(a-1)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}$.

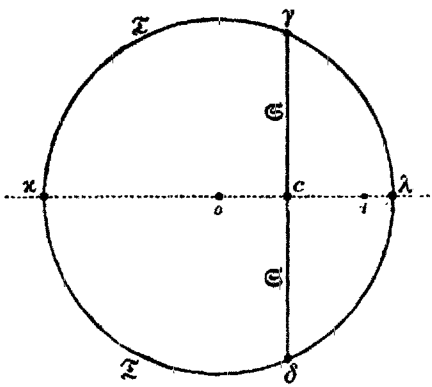

Fig. 2.

Der Anfangswerth der Potenz $(u-1)^{b-1}$ im Punkte λ ist gleich der in (7) angegebenen Constante B. Die Potenz u^{a-1} hat an der bisherigen unteren Integralgrenze $u = c$ den Werth $e^{(a-1)\log c}$, in welchem $\log c$ reell ist. Da aber $\log u$ reell bleibt, wenn die Variable u das Stück der reellen Axe von c bis λ durchläuft, so ist u^{a-1} im Punkte λ gleich der Constante

$$A' = e^{(a-1)\log\lambda},$$

in welcher $\log\lambda$ den reellen Logarithmus bedeutet. Der Anfangswerth der Function $f(u)$ im Punkte $u = \lambda$ wird folglich durch den Ausdruck

$$(22) \qquad f(\lambda) = e^{-\pi i(a-1)} A' B$$

dargestellt. Man führt nunmehr in das Integral $\mathfrak{G}(a, b)$ eine neue Variable v durch die Gleichung $u = \frac{1}{v}$ ein. Dann geht, da

$$u^{a-1}(u-1)^{b-1} = v^{2-a-b}(1-v)^{b-1}$$

ist, $\mathfrak{G}(a, b)$ in das Integral

$$\mathfrak{G}(a, b) = -e^{-\pi i(a-1)} \int v^{-a-b}(1-v)^{b-1} dv$$

über, in welchem v denjenigen Weg zu durchlaufen hat, der die Strecken $\lambda\gamma\varkappa\delta c\gamma\lambda$, $\lambda\delta\varkappa\gamma c\delta\lambda$ abbildet. Um diesen Weg der Variable v festzustellen, bemerke man zunächst, dass der Kreis $\mathfrak{T}$ in der v-Ebene einen Kreis $\mathfrak{T}_1$ mit dem Radius $\frac{1}{\lambda}$ und dem Mittelpunkte $v=0$ liefert, und dass dem positiven Umlauf längs $\mathfrak{T}$ der negative Umlauf längs $\mathfrak{T}_1$ entspricht. Wird ferner $u=u_1+iu_2$, $v=v_1+iv_2$ gesetzt, wo u_1, u_2, v_1, v_2 reell sind, so folgen aus $u=\frac{1}{v}$ die Gleichungen

$$u_1=\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2},\quad u_2=-\frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Zu der Geraden $\mathfrak{S}$, für welche $u_1=c$ ist, gehört also in der v-Ebene der durch den Nullpunkt gehende Kreis

$$\frac{v_1^2+v_2^2}{v_1}=\frac{1}{c},\quad \text{d. h.}\quad \left(v_1-\frac{1}{2c}\right)^2+v_2^2=\left(\frac{1}{2c}\right)^2.$$

Derselbe umschliesst den Punkt $v=1$, da der Werth $\frac{1}{c}$, welcher die Länge des Kreisdurchmessers angiebt, grösser als 1 ist. Der Theil des Kreises, der die Sehne $\gamma c\delta$ abbildet, liegt ausserhalb des Kreises $\mathfrak{T}_1$; denn die Fläche des Kreises $\mathfrak{T}$ entspricht der Ergänzungsfläche des Kreises $\mathfrak{T}_1$. Die Punkte

$$u=c,\ u=\varkappa,\ u=\lambda,\ u=\gamma,\ u=\delta$$

mögen bezw. durch die Punkte

$$v=c_1,\ v=\varkappa_1,\ v=\lambda_1,\ v=\gamma_1,\ v=\delta_1$$

abgebildet werden. Der Punkt λ_1 liegt, da $\lambda_1=\frac{1}{\lambda}$, und λ reell und grösser als 1 ist, auf der reellen Axe zwischen 0 und 1; $\varkappa_1$ ist gleich $-\frac{1}{\lambda}$, und c_1 gleich $\frac{1}{c}$. Der Punkt γ_1 befindet sich auf der unteren, δ_1 auf der oberen Halbebene (Fig. 3). Die Variable v durchläuft hiernach den aus Kreisbogen gebildeten Weg

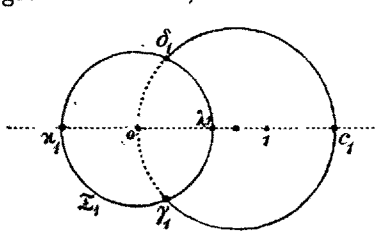

Fig. 3.

$$\lambda_1\gamma_1\varkappa_1\delta_1c_1\gamma_1\lambda_1,\quad \lambda_1\delta_1\varkappa_1\gamma_1c_1\delta_1\lambda_1,$$

der durch die vier Strecken

$$\lambda_1\gamma_1\varkappa_1\delta_1\lambda_1,\quad \lambda_1\delta_1c_1\gamma_1\lambda_1,\quad \lambda_1\delta_1\varkappa_1\gamma_1\lambda_1,\quad \lambda_1\gamma_1c_1\delta_1\lambda_1$$

ersetzt werden kann. Also umkreist die Grösse v zuerst im negativen Sinne den singulären Punkt 0, dann den singulären Punkt 1, woran sich ein positiver Umlauf um den Punkt 0 und ein positiver Umlauf um den Punkt 1 anschliessen. Man findet auf diese Weise für $\mathfrak{E}(a, b)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{E}(a, b) = -e^{-\pi i(a-1)} \int_{\lambda_1}^{(0-,1-,0,1)} v^{-a-b}(1-v)^{b-1} dv.$$

Der Werth der zu integrirenden Function $v^{-a-b}(1-v)^{b-1}$ an der unteren Grenze $v = \lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$ wird mit Hülfe der Gleichung (22) bestimmt. Substituirt man in A' und B die Werthe

$$\log \lambda = \log \frac{1}{\lambda_1} = -\log \lambda_1$$

und

$$\log(\lambda - 1) = \log \frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} = \log(1-\lambda_1) - \log \lambda_1,$$

so wird das Product $A'B$ gleich dem Ausdruck (cfr. (7))

$$A'B = e^{(2-a-b)\log\lambda_1} e^{(b-1)\log(1-\lambda_1)},$$

in welchem die reellen Werthe von $\log \lambda_1$ und $\log(1-\lambda_1)$ zu nehmen sind. Da nun nach (21)

$$f(\lambda) = e^{-\pi i(a-1)} \lambda^{a-1}(\lambda-1)^{b-1} = e^{-\pi i(a-1)} \lambda_1^{2-a-b}(1-\lambda_1)^{b-1}$$

ist, so nimmt die Gleichung (22), welche den speciellen, zur unteren Integralgrenze gehörigen Werth $f(\lambda)$ angiebt, nach Multiplication mit $e^{\pi i(a-1)}\lambda_1^{-2}$ die Gestalt

$$\lambda_1^{-a-b}(1-\lambda_1)^{b-1} = \lambda_1^{-2} A'B = e^{-(a+b)\log\lambda_1} e^{(b-1)\log(1-\lambda_1)}$$

an. Folglich kommt an der unteren Grenze des in Rede stehenden Integrals der Werth

(23) $$[v^{-a-b}(1-v)^{b-1}]_{v=\lambda_1} = e^{-(a+b)\log\lambda_1} e^{(b-1)\log(1-\lambda_1)},$$

in welchem $\log \lambda_1$ und $\log(1-\lambda_1)$ die reellen Logarithmen bedeuten, zur Anwendung. Die Variable v führt die negativen Umläufe um die Punkte 0 und 1 vor den positiven aus. Indessen kann man nach Formel (13) der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (wo $\sigma = 1 - a - b$, $\tau = b$ zu setzen ist), unter Beibehaltung des nämlichen Werthes der zu integrirenden Function an der unteren Grenze, die positiven Umläufe den negativen vorangehen lassen, wenn man gleichzeitig das Integral mit dem Factor

$$e^{-2\pi i(1-a-b)} e^{-2\pi i b} = e^{2\pi i a}$$

multiplicirt. Also ist

$$\mathfrak{E}(a, b) = -e^{\pi i(a-1)} \int_{\lambda_1}^{(0,1,0-,1-)} v^{-a-b}(1-v)^{b-1} dv.$$

Endlich dürfen (nach Formel (8) der Abh.), wenn man rechts den Factor -1 hinzufügt, die Punkte 0 und 1 bei der auf den Integrationsweg bezüglichen Angabe mit einander vertauscht werden. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{\pi i(a-1)} \int_{\lambda_1}^{(1,0,1-,0-)} v^{-a-b}(1-v)^{b-1} dv,$$

deren rechte Seite mit dem oben erwähnten Ausdruck $\mathfrak{E}(1-a-b, b)$ identisch wird, wenn man die untere Integralgrenze c durch λ_1 ersetzt. Da aber die Einführung des (ebenfalls zwischen 0 und 1 liegenden) Punktes λ_1 an Stelle von c den Werth des Integrals nicht ändert, und da nach (23) der Anfangswerth der zu integrirenden Function an der unteren Grenze $v = \lambda_1$ dem vorgeschriebenen Zweige derselben angehört (cfr. (2)), so ist hiermit die Formel (20)

$$\mathfrak{E}(a, b) = \mathfrak{E}(1-a-b, b) = \mathfrak{E}(a, 1-a-b)$$

aufs Neue bewiesen.

§ 2.

Es werde nunmehr vorausgesetzt, dass der reelle Bestandtheil der Constante a positiv sei. Dann kann man den Punkt c dicht an den Punkt 0 heranrücken lassen (Fig. 1) und die Dimensionen der Curve $\mathfrak{P}$ unendlich klein wählen. In diesem Fall bezeichnet man durch $\overline{E}(a, b)$ das Integral

$$-e^{-\pi i b} \lim_{c=0} \overline{\int_c^{*(1)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du,$$

dessen Integrationscurve einen positiven Umlauf um den Punkt $u = 1$ darstellt, und in welchem an der unteren Grenze $u = c$ die in (2) angegebenen Werthe von u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ zur Anwendung kommen sollen. Wird zur Fixirung des genannten Zweiges der zu integrirenden Function nicht die untere Grenze c, sondern der Punkt λ benutzt (Fig. 1), so hat man, nachdem

$$-e^{-\pi i b} u^{a-1}(1-u)^{b-1} = u^{a-1}(u-1)^{b-1}$$

gesetzt ist, für u^{a-1} und $(u-1)^{b-1}$ im Punkte λ die Werthe $e^{(a-1)\log \lambda}$ und $e^{(b-1)\log(\lambda-1)}$ zu nehmen, in denen $\log \lambda$ und $\log(\lambda - 1)$ die reellen Logarithmen bedeuten (§ 1). Das auf diese Weise eindeutig bestimmte Integral

$$(24)\quad \overline{E}(a, b) = -e^{-\pi i b} \overline{\int_0^{*(1)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1} du = \overline{\int_0^{*(1)}} u^{a-1}(u-1)^{b-1} du$$

steht, wenn ausser a auch b im reellen Theil positiv ist, zu dem Euler'schen Integral $E(a, b)$ in der Beziehung

$$(25)\quad \overline{E}(a, b) = (e^{\pi i b} - e^{-\pi i b}) E(a, b) = 2i \sin(\pi b) E(a, b).$$

Denn im Fall $b > 0$ kann der Integrationsweg von $\overline{E}(a, b)$ auf einen doppelt durchlaufenen Abschnitt der reellen Axe (der dicht vor dem Punkte 1 endigt) und auf einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt 1 reducirt werden, woraus die Formel (25) folgt.

Für das in § 1 behandelte Integral $\mathfrak{E}(a, b)$ ergiebt sich, wenn der reelle Theil von a das positive Vorzeichen hat, die Gleichung

$$\mathfrak{E}(a, b) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\, \overline{E}(a, b). \tag{26}$$

Von den in (4) erwähnten vier Integralen, deren Summe gleich $\mathfrak{E}(a,b)$ ist, fallen das zweite und das vierte fort, sobald (im Fall $a > 0$) die Curve $\mathfrak{P}$ unendlich klein genommen wird. Das erste und das dritte dieser Integrale haben dann die Summe

$$e^{-\pi i(a+b)}[1 - e^{2\pi i a}] \overline{\int_0^{(1)}} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du,$$

die, weil für u^{a-1} und $(1-u)^{b-1}$ die nämlichen Bedingungen wie in (24) gelten, in die rechte Seite der Gleichung (26) übergeht. Sind beide Argumente a, b im reellen Theil positiv, so wird aus (26) und (25) die Gleichung (6) erhalten.

Die Formel der theilweisen Integration führt zu den Gleichungen

$$\begin{cases} \overline{E}(a+1, b) = \dfrac{a}{a+b}\, \overline{E}(a, b), \\ \overline{E}(a, b+1) = -\dfrac{b}{a+b}\, \overline{E}(a, b). \end{cases}$$

Bezeichnet also m eine positive ganze Zahl, so ist

$$\begin{cases} \overline{E}(a+m, b) = \dfrac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\, \overline{E}(a,b), \\ \overline{E}(a, b+m) = (-1)^m \dfrac{b(b+1)\ldots(b+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\, \overline{E}(a, b), \end{cases} \tag{27}$$

und

$$\overline{E}(a, b-m) = (-1)^m \frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-m)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-m)}\, \overline{E}(a, b). \tag{27a}$$

Für ein positives ganzzahliges b nimmt das Integral $\overline{E}(a, b)$, da die zu integrirende Function dann in der Umgebung des Punktes $u = 1$ stetig und eindeutig bleibt, den Werth Null an. Ausserdem verschwindet $\overline{E}(a, b)$, sobald die Summe $a + b$ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null wird, wie aus (27) folgt. Man hat demnach die Gleichungen

$$\begin{cases} \overline{E}(a, m) = 0, \\ \overline{E}(a, -a) = 0, \quad \overline{E}(a, -m-a) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

in denen m irgend eine positive ganze Zahl, und a einen beliebigen Werth, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, bedeutet.

Ist b gleich einer negativen ganzen Zahl $-m$ oder gleich Null, so kommt, nachdem man in (24) die Reihe

$$u^{a-1}(1-u)^{b-1} = [1-(1-u)]^{a-1}(1-u)^{-m-1}$$

$$= (1-u)^{-m-1}\left[1 - \frac{a-1}{1}(1-u) + \cdots + (-1)^m \frac{(a-1)\ldots(a-m)}{1.2\ldots m}(1-u)^m + \cdots\right]$$

substituirt hat, für die Integration nach u nur der mit $(1-u)^{-1}$ multiplicirte Summandus in Betracht. Man findet auf diese Weise, da $e^{-\pi i b}$ gleich $(-1)^m$ wird, die Werthe

$$
(29) \qquad \begin{cases} \overline{E}(a,0) = 2\pi i, \\ \overline{E}(a,-m) = 2\pi i \dfrac{(a-1)(a-2)\dots(a-m)}{1.2\dots m}, \end{cases}
$$

die man auch aus (26) und (16) ableiten kann.

In die Gleichung (25) werde für das Euler'sche Integral $E(a,b)$ das Product (18) und für $\sin(\pi b)$ das Product

$$
\sin(\pi b) = \pi b \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\nu+b)(\nu-b)}{\nu^2}
$$

eingesetzt. Dann ergiebt sich für $\overline{E}(a,b)$ der Ausdruck

$$
(30) \qquad \overline{E}(a,b) = 2\pi i \frac{a+b}{a} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{a+b+\nu}{a+\nu}\left(1-\frac{b}{\nu}\right).
$$

Während das Integral (24) nur unter der Voraussetzung, dass der reelle Bestandtheil von a positiv ist, einen bestimmten Sinn hat, kann man die Gleichung (30) auch für negative Werthe von a gelten lassen.

Die Grösse $\overline{E}(a,b)$ bleibt unverändert, wenn man das zweite Argument b durch $1-a-b$ ersetzt. Denn aus der Formel (20)

$$
\mathfrak{E}(a,b) = \mathfrak{E}(a, 1-a-b)
$$

folgt nach Berücksichtigung von (26)

$$
(31) \qquad \overline{E}(a,b) = \overline{E}(a, 1-a-b).
$$

Um diese Eigenschaft des Integrals $\overline{E}(a,b)$ direct zu beweisen, wendet man auf den Ausdruck (24)

$$
\overline{E}(a,b) = \overline{\int_0^{(1)}} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du
$$

die Substitution $u-1 = \frac{1}{v-1}$ an. Als Weg der Variable u möge ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkte $u=1$ gewählt werden; dann erhält man als Weg der Variable v ebenfalls einen Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkte $v=1$, da die Gleichung $u-1 = e^{\vartheta i}$ in $v-1 = e^{-\vartheta i}$ übergeht. Im Punkte $u=\lambda$ (Fig. 1), der hier $u=2$ ist, wird die Function $u^{a-1}(u-1)^{b-1}$ nach der Voraussetzung gleich $e^{(a-1)\log 2}$, wo $\log 2$ den reellen Logarithmus bedeutet. Zu $u=2$ gehört der Werth $v=2$, zu $u=0$ der Werth $v=0$. Indem man bei dem Integral nach v, unter Multiplication mit dem Factor -1, den Integrationsweg umkehrt und hierdurch die negative Drehungsrichtung in die positive verwandelt, findet man

$$\overline{E}(a, b) = \int_0^{(1)} v^{a-1}(v-1)^{-a-b} dv.$$

Dieses Integral ist aber nach (24) gleich $\overline{E}(a, 1-a-b)$, da die Function $v^{a-1}(v-1)^{-a-b}$ im Punkte $v=2$ den Werth $e^{(a-1)\log 2}$, in welchem $\log 2$ reell ist, annimmt. Mithin sind $\overline{E}(a, b)$ und $\overline{E}(a, 1-a-b)$ identische Grössen.

Transformirt man das Integral (24) durch die Substitution $u = 1-w$, so ergiebt sich, da die Variable w vom Punkte 1 aus einen positiven Umlauf um den Punkt 0 macht, die Gleichung

$$(32) \qquad \overline{E}(a, b) = e^{-\pi i b} \int_1^{(0)} w^{b-1}(1-w)^{a-1} dw.$$

Für Punkte w, welche reell und der unteren Integralgrenze 1 benachbart sind, haben die Potenzen w^{b-1}, $(1-w)^{a-1}$ in (32) die Werthe $e^{(b-1)\log w}$, $e^{(a-1)\log(1-w)}$, in denen $\log w$, $\log(1-w)$ die reellen Logarithmen bedeuten.

In (24) werde ferner eine Variable t durch die Gleichung $u = \frac{1}{t}$ eingeführt. Dann ist

$$u^{a-1}(1-u)^{b-1} du = -t^{-a-b}(t-1)^{b-1} dt.$$

Zieht man in der u-Ebene um den Punkt $u=1$ als Mittelpunkt einen kleinen Kreis mit dem Radius l, so kann man in (24) den Weg der Variable u aus der doppelt durchlaufenen Strecke von $u=0$ bis $u=1-l$ und dem genannten Kreise zusammensetzen. Die Kreisfläche um $u=1$ wird in der t-Ebene durch eine Kreisfläche, die den Punkt $t=1$ enthält, abgebildet, und zwar entspricht dem positiven Umlauf um $u=1$ ein positiver Umlauf um $t=1$. Auf dem ersten Theil der Bahn der Variable t, welcher durch den Abschnitt der positiven reellen Axe von $t=\infty$ bis $t=\frac{1}{1-l}$ gebildet wird, hat man, gemäss der Definition von $\overline{E}(a, b)$, die Potenzen t^{-a-b}, $(t-1)^{b-1}$ gleich $e^{-(a+b)\log t}$, $e^{(b-1)\log(t-1)}$, wo $\log t$ und $\log(t-1)$ reell sind, zu nehmen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung wird für $\overline{E}(a, b)$ der Ausdruck

$$(32\text{a}) \qquad \overline{E}(a, b) = e^{-\pi i b} \int_\infty^{(1)} t^{-a-b}(t-1)^{b-1} dt$$

erhalten.

§ 3.

Man ziehe in der u-Ebene um den Punkt $u = 0$ als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius k und betrachte ein Integral

$$\int e^u u^{a-1} du,$$

in welchem die Variable u zuerst den Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis $-k$, dann den genannten Kreis (im positiven Sinne) durchläuft und vom Punkte $-k$ längs der negativen reellen Axe zu $-\infty$ zurückkehrt. In dem Schnittpunkte $u = k$ des Kreises mit der positiven reellen Axe werde für die Potenz u^{a-1} der Werth $e^{(a-1)\log k}$, in welchem $\log k$ den reellen Logarithmus bedeutet, genommen. Das hierdurch definirte Integral soll durch $\overline{\Gamma}(a)$ bezeichnet werden. Man hat für dasselbe (nach § 1 der Abh.) den abgekürzten Ausdruck

$$\overline{\Gamma}(a) = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^u u^{a-1} du. \tag{33}$$

Der horizontale Strich über dem Buchstaben Γ soll, wie der Strich über dem rechts stehenden Integralzeichen, auf die geschlossene Integrationscurve hindeuten.

Die Grösse des Kreisradius k hat auf den Werth des Integrals (33) keinen Einfluss. Denn wenn man den gewählten Kreis durch irgend einen concentrischen ersetzt, so liegt auf der von den zwei Kreisen begrenzten ringförmigen Fläche kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function. Ebenso kann statt des oben angeführten Weges jede beliebige, sich selbst nicht schneidende Curve, die in $-\infty$ beginnt und endigt und den Punkt $u = 0$ umschliesst, als Integrationsweg von $\overline{\Gamma}(a)$ genommen werden.

Substituirt man in (33) $u = -v$, so ergiebt sich, da die Variable v von $+\infty$ aus einen positiven Umlauf um den Punkt 0 ausführt, die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(a) = -\overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-v}(-v)^{a-1} dv.$$

Hierin ist

$$(-v)^{a-1} = e^{-\pi i(a-1)} v^{a-1} = -e^{-\pi i a} v^{a-1}$$

zu setzen, wenn man bestimmt, dass für die Potenz v^{a-1} im Punkte $v = k$ der Werth $e^{(a-1)\log k}$, wo $\log k$ reell ist, zur Anwendung kommen soll. Denn da zu v^{a-1} der Factor $e^{\pi i(a-1)}$ hinzutritt, wenn v im positiven Sinne längs des Halbkreises vom Punkte k zum Punkte $-k$ übergeht, so ist nach obiger Gleichung die Potenz $(-v)^{a-1}$ im

Punkte $v = -k$ gleich dem Producte aus $e^{-\pi i(a-1)} e^{(a-1)\log k}$ und $e^{\pi i(a-1)}$, d. h. gleich $e^{(a-1)\log k}$ (wo $\log k$ reell), was der für u^{a-1} aufgestellten Bedingung entspricht. Demnach ist $\bar{\Gamma}(a)$ gleich dem Ausdruck

$$(34) \qquad \bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-v} v^{a-1}\, dv,$$

in welchem für ein reelles a die positiven reellen Werthe von v^{a-1} auf der zuerst durchlaufenen Strecke der positiven reellen Axe zu nehmen sind.

Ist der reelle Bestandtheil von a positiv, so besteht zwischen $\bar{\Gamma}(a)$ und dem Euler'schen Integrale zweiter Art

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{a-1}\, du$$

die Relation

$$(35) \qquad \bar{\Gamma}(a) = (e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\Gamma(a) = 2i \sin(\pi a)\Gamma(a).$$

Denn in diesem Falle darf man den Kreisradius k unendlich klein wählen, wodurch das Integral (34) sich in das Product $(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})\Gamma(a)$ verwandelt, da das Kreisintegral zu vernachlässigen ist, und die Potenz v^{a-1} durch den Umlauf um $v = 0$ den Factor $e^{2\pi i a}$ aufnimmt.

Das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ stellt eine transcendente ganze Function von a dar. Der Beweis, dass die unendlich entfernten Strecken des Integrationsweges nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe des Integrals liefern, wird für $\bar{\Gamma}(a)$ in derselben Art wie für das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ geführt. Auf den im Endlichen liegenden Theilen des Integrationsweges von $\bar{\Gamma}(a)$ hat aber die zu integrirende Function $e^u u^{a-1}$, da ein bestimmter Zweig der Potenz u^{a-1} gewählt worden ist, stets einen eindeutigen endlichen Werth. Also ist $\bar{\Gamma}(a)$ in der That für jedes endliche a stetig und eindeutig.

Durch theilweise Integration ergiebt sich für $\bar{\Gamma}(a+1)$ die Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a+1) = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^u u^a\, du = [e^u u^a]_{u=-\infty}^{u=-\infty} - a \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^u u^{a-1}\, du,$$

aus welcher, da der vom Integralzeichen freie Summandus verschwindet, die Formel

$$(36) \qquad \bar{\Gamma}(a+1) = -a\bar{\Gamma}(a)$$

folgt. Durch wiederholte Benutzung derselben erhält man die weiteren Gleichungen

$$(37) \qquad \bar{\Gamma}(a+m) = (-1)^m a(a+1)\cdots(a+m-1)\bar{\Gamma}(a),$$

$$(38) \qquad \bar{\Gamma}(a-m) = (-1)^m \frac{\bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-m)},$$

in denen m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Die Anwendungen, welche das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ bei den linearen Differentialgleichungen findet, beruhen zum grossen Theile auf der zu (37) analogen Formel

$$\Gamma(a+m) = a(a+1)\cdots(a+m-1)\,\Gamma(a).$$

Bei gewissen Differentialgleichungen, die sich durch bestimmte Integrale lösen lassen, wird nämlich, wenn man zu den Reihenentwickelungen übergeht und m den Stellenzeiger nennt, durch die erwähnte Formel der Factor $a(a+1)\cdots(a+m-1)$ in den Zähler des allgemeinen Terms der Reihe eingeführt, während $\Gamma(a)$ als Factor vor die ganze Reihe tritt. Diese Anwendungen erfahren nun eine Ausdehnung, falls man (durch Aenderung des Integrationsweges) das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ an die Stelle des Euler'schen Integrals $\Gamma(a)$ treten lässt. Denn hierdurch wird es möglich, mit Hülfe der Gleichung (38) Factoren von der Form $(a-1)(a-2)\cdots(a-m)$ in den Nenner des allgemeinen Terms der Reihe zu bringen. Letzteres ist bei dem Euler'schen Integral nicht ausführbar, da mit wachsendem m die Differenz $a-m$ negativ, also das Integral $\Gamma(a-m)$ divergent wird.

Die zwei geradlinigen Integrale, die in $\bar{\Gamma}(a)$ enthalten sind, heben sich gegenseitig auf, sobald a ganzzahlig, mithin $e^u u^{a-1}$ in der ganzen u-Ebene eindeutig wird. Ist a zugleich positiv, so verschwindet auch das übrigbleibende Kreisintegral. Ist dagegen a gleich einer negativen ganzen Zahl $-m$, bezw. gleich 0, so kommt, wenn e^u gleich $1+\frac{u}{1}+\cdots$ gesetzt wird, in der Entwickelung der zu integrirenden Function die Potenz u^{-1} vor, und zwar mit dem Coefficienten $\frac{1}{1.2\ldots m}$, bezw. 1. Demnach ergeben sich die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}(m) = 0, \tag{39}$$

$$\bar{\Gamma}(0) = 2\pi i, \quad \bar{\Gamma}(-m) = \frac{2\pi i}{1.2\ldots m}, \tag{40}$$

in denen m wiederum irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet. Die Grösse $\bar{\Gamma}(a)$ wird unendlich klein, wenn der reelle Theil von a sich dem Werthe $-\infty$ nähert. Dies folgt für ein ganzzahliges Argument aus (40) und für ein nichtganzzahliges aus (38).

Führt man in (35) für das Euler'sche Integral $\Gamma(a)$ und für $\sin(\pi a)$ die unendlichen Producte

$$\Gamma(a) = \lim_{(n=\infty)}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\,n^a\right],$$

$$\sin(\pi a) = \pi a \lim_{(n=\infty)} \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{(\nu+a)(\nu-a)}{\nu^2}$$

ein, so entsteht für $\bar{\Gamma}(a)$ die Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a) = 2\pi i \lim_{(n=\infty)}\left[\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-a)}{1.2\ldots n}\,n^a\right]. \tag{41}$$

Aus (35) leitet man ferner die Formeln

(42) $$\bar{\Gamma}(a)\,\bar{\Gamma}(1-a) = -4\pi \sin(\pi a),$$

(43) $$\bar{\Gamma}(a) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)}$$

ab, da $\sin(\pi[1-a]) = \sin(\pi a)$, und

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

ist. Endlich werde die Gleichung, welche die Euler'schen Integrale erster und zweiter Art mit einander verbindet,

$$E(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

durch $(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})(e^{\pi i b} - e^{-\pi i b})$ multiplicirt. Dann ergiebt sich, nach Berücksichtigung von (6) und (35), die Formel

(44) $$\mathfrak{E}(a, b) = \frac{\bar{\Gamma}(a)\,\bar{\Gamma}(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

§ 4.

Die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

(45) $$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)\,x - \varrho]\,\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

ist in § 3 der vorstehenden Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" im allgemeinen Falle durch bestimmte Integrale, deren Integrationswege aus Doppelumläufen bestehen, gelöst worden. Es wurde daselbst eine Linie $\mathfrak{A}$ vom Punkte 0 zum Punkte x, eine Linie $\mathfrak{B}$ vom Punkte 1 zum Punkte x, eine Linie $\mathfrak{C}$ vom Punkte 0 zum Punkte 1 gezogen, und die Umkreisung dieser Linien durch die Integrationsvariable u in analoger Weise wie die Umkreisung der einzelnen singulären Punkte (§ 1 der Abh.) bezeichnet. Als Lösungen der Differentialgleichung (45) ergaben sich (l. c. (53) und (54)) die bestimmten Integrale

(46) $$\bar{\int_c}^{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)}\Phi(u, x)\,du, \quad \bar{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}\Phi(u, x)\,du,$$

(47) $$\bar{\int_c}^{(\mathfrak{B},0,\mathfrak{B}-,0-)}\Phi(u, x)\,du, \quad \bar{\int_c}^{(x,1,x-,1-)}\Phi(u, x)\,du,$$

(48) $$\bar{\int_c}^{(\mathfrak{C},x,\mathfrak{C}-,x-)}\Phi(u, x)\,du, \quad \bar{\int_c}^{(1,0,1-,0-)}\Phi(u, x)\,du,$$

in denen $\Phi(u, x)$ die Function

(49) $$\Phi(u, x) = (u-x)^{-\beta}\,u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1},$$

und c eine beliebige, von 0 und 1 verschiedene Constante bedeutet.

Die Integrale (46) sind die zwei Hauptintegrale der Differentialgleichung für die Umgebung des Punktes $x=0$. Um dieselben nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln, setzt man den Abstand der Punkte x und 0 von einander als klein voraus. Bei dem ersten Integral (46) möge der Punkt c auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 angenommen werden. Zieht man durch c einerseits einen Kreis $\mathfrak{P}$, der den Punkt 0 zum Mittelpunkt hat und die Linie $\mathfrak{A}$ umschliesst, andererseits einen Kreis $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte 1 (Fig. 4), so kann der Integrationsweg des ersten Integrals (46) kurz durch

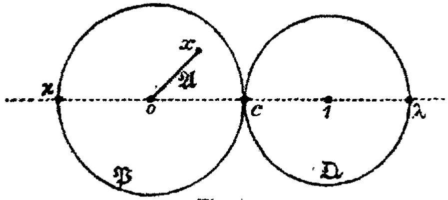

Fig. 4.

$$\mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^-,\ \mathfrak{Q}^-$$

bezeichnet werden (§ 1 der Abh.). Jeder der Punkte dieses Integrationsweges hat vom Punkte 0 einen grösseren Abstand als der Punkt x, d. h. es ist mod. $\frac{x}{u} < 1$. In Folge dessen besteht für den in (49) vorkommenden Factor $(u-x)^{-\beta}$ die convergente Entwickelung

$$(50)\qquad (u-x)^{-\beta} = u^{-\beta}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-\beta}$$
$$= u^{-\beta}\left[1+\frac{\beta}{1}\,\frac{x}{u}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{u^2}+\cdots\right].$$

Substituirt man diesen Ausdruck in das betrachtete Integral, so treten in den einzelnen Summanden die Potenzen von x vor die Integralzeichen, und die zu integrirenden Functionen werden von x unabhängig. Als singuläre Punkte, die von u umkreist werden, sind dann nur noch die Punkte 0 und 1 vorhanden. Man erhält daher für das erste Integral (46) die Reihe

$$\bar{\int_c}^{(0,1,0-,1-)} u^{-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\left[1+\frac{\beta}{1}\,\frac{x}{u}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{u^2}+\cdots\right]du$$
$$= G_0+\frac{\beta}{1}\,G_1 x+\cdots+\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}\,G_m x^m+\cdots,$$

in der G_m das constante Integral

$$G_m = \bar{\int_c}^{(0,1,0-,1-)} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. An der unteren Integralgrenze $u=c$ möge im ersten Integral (46) die Potenz $u^{\beta-\varrho}$ gleich $e^{(\beta-\varrho)\log c}$, ferner die in (50) vorkommende Potenz $u^{-\beta}$ gleich $e^{-\beta\log c}$ sein, wo unter $\log c$ der reelle Werth verstanden wird; die Potenz $(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$ soll, wenn u zum ersten Male im Punkte λ eintrifft (Fig. 4), den Werth $e^{(\varrho-\alpha-1)\log(\lambda-1)}$, in welchem $\log(\lambda-1)$ reell ist, annehmen. Diese Bestimmungen übertragen sich auf das Integral G_m. Werden in dem Integrationswege von G_m (unter Beibehaltung des Anfangswerthes der zu integrirenden Function) die Punkte 0 und 1 hinsichtlich der Reihenfolge der Umkreisungen mit einander vertauscht, so tritt nur der Factor -1 zu dem Integral hinzu (Gl. (8) der Abh.). Indem man ausserdem mit $e^{\pi i(\varrho+m-1)}$, $=(-1)^m e^{\pi i(\varrho-1)}$, multiplicirt, hat man die Gleichung

$$(-1)^m e^{\pi i(\varrho-1)} G_m = e^{\pi i(\varrho+m)} \int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} u^{-\varrho-m} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du,$$

deren rechte Seite nach § 1, Formel (8a), gleich $\mathfrak{E}(1-\varrho-m, \varrho-\alpha)$ ist. Somit ergiebt sich

$$G_m = (-1)^m e^{\pi i(1-\varrho)} \mathfrak{E}(1-\varrho-m, \varrho-\alpha).$$

Ist ϱ gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl $-n$, so haben, nach (13), die Coefficienten $G_0, G_1, \ldots G_n$ den Werth Null, während die Coefficienten G_{n+1} etc. durch die Formeln (15) bestimmt werden. In diesem speciellen Falle beginnt die oben erhaltene Reihe mit der Potenz x^{n+1}, d. h. $x^{1-\varrho}$, und wird (abgesehen von einem constanter Factor) mit der durch das zweite Integral (46) ausgedrückten particulären Lösung identisch; die Differentialgleichung (45) hat dann bekanntlich in der Umgebung des Punktes $x=0$ im Allgemeinen noch ein logarithmisches Integral, worauf indessen hier nicht eingegangen werden soll. In allen übrigen Fällen kann man für $\mathfrak{E}(1-\varrho-m, \varrho-\alpha)$ nach (12) das Product

$$\mathfrak{E}(1-\varrho-m, \varrho-\alpha) = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)} \mathfrak{E}(1-\varrho, \varrho-\alpha$$

setzen, so dass

$$G_0 = e^{\pi i(1-\varrho)} \mathfrak{E}(1-\varrho, \varrho-\alpha),$$

$$G_m = e^{\pi i(1-\varrho)} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)} \mathfrak{E}(1-\varrho, \varrho-\alpha)$$

wird. Auf diese Weise findet man für das erste Integral (46) den Ausdruck

$$(51) \quad \int_c^{\overline{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)}} \Phi(u,x)\,du = e^{\pi i(1-\varrho)} \mathfrak{E}(1-\varrho, \varrho-\alpha) F(\alpha, \beta; \varrho; x),$$

wo $F(\alpha, \beta; \varrho; x)$ die Gauss'sche hypergeometrische Reihe

$$(52) \quad F(\alpha,\beta;\varrho;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\varrho} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)} x^2 + \cdots$$

bedeutet.

Abgesehen von dem soeben erwähnten Falle, dass ϱ eine negative ganze Zahl oder Null ist, nimmt die auf der rechten Seite von (51) stehende Constante $\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha)$, welche man nach (20) auch $\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \alpha)$ oder $\mathfrak{E}(\alpha,\ \varrho-\alpha)$ schreiben kann, den Werth Null an, wenn α oder $\varrho-\alpha$ eine positive ganze Zahl ist. Das erste Integral (46) verschwindet dann identisch; es tritt aber ein Integral mit einfacherer Integrationscurve an seine Stelle. Man setze zunächst voraus, dass $\varrho-\alpha$, aber nicht α, eine positive ganze Zahl sei. In diesem Falle wird statt des ersten Integrals (46) das Integral

$$\overline{\int_1^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u,x)\,du$$

genommen, das der Gleichung (45) genügt (s. d. Abh.), und das convergirt, sobald der reelle Theil von $\varrho-\alpha$ positiv ist. Der Integrationsweg desselben, der aus einem einmaligen Umlauf um die Linie $\mathfrak{A}$ besteht, kann als ein Kreis mit dem Mittelpunkte $u=0$ und mit einem Radius, der den Werth 1 nicht völlig erreicht, gedacht werden, so dass für den in $\Phi(u,x)$ enthaltenen Factor $(u-x)^{-\beta}$ wiederum die Entwickelung (50) gilt. Indem man G_m' als das Integral

$$G_m' = \overline{\int_1^{(0)}} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

definirt, findet man

$$\overline{\int_1^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u,x)\,du =$$
$$= G_0' + \frac{\beta}{1} G_1' x + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1\,.\,2\ldots m} G_m' x^m + \cdots.$$

Die Grösse G_m' ist nach (32), wenn man für $(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$ das Product aus $e^{\pi i(\varrho-\alpha-1)}$ und $(1-u)^{\varrho-\alpha-1}$ setzt und die Anfangswerthe von $u^{-\varrho-m}$ und $(1-u)^{\varrho-\alpha-1}$ in der für (32) angegebenen Art bestimmt, gleich dem Ausdruck

$$G_m' = (-1)^m e^{-\pi i\alpha}\,\overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho-m)$$

oder, wegen (27a),

$$G_m' = e^{-\pi i\alpha}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)}\,\overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho).$$

Man gelangt daher zu der Gleichung

$$(53)\qquad \overline{\int_1^{(\mathfrak{A})}} \Phi(u,x)\,du = e^{-\pi i\alpha}\,\overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho)\,F(\alpha,\beta;\ \varrho;\ x),$$

in welcher der reelle Bestandtheil von $\varrho-\alpha$ nach der Voraussetzung positiv sein soll. Die Constante $\overline{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\varrho)$, die nach (31) mit $\overline{E}(\varrho-\alpha,\ \alpha)$ identisch ist, verschwindet nur, wenn $1-\varrho$ oder wenn α eine positive ganze Zahl wird.

Da die Function $\Phi(u, x)$ auf die Form

$$\Phi(u, x) = u^{-\alpha-1}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{\varrho-\alpha-1}$$

gebracht werden kann (cfr. (49)), so nähert sich das Product $u\Phi(u, x)$ mit unbegrenzt wachsendem u dem Werthe Null, wenn der reelle Theil der Constante α positiv ist. In diesem Falle ist das Integral

$$\overline{\int_{\infty}}^{(1)} \Phi(u, x)\, du$$

convergent; dasselbe unterscheidet sich nur durch einen constanten Factor von dem ersten Integral (46) (cfr. Gl. (34) der Abh.), an dessen Stelle es angewendet wird, wenn α ganzzahlig und positiv ist. Der Integrationsweg beginne und endige im unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe. Man darf, da x zur Umgebung des Punktes 0 gehören soll, mod. $x <$ mod. u annehmen, also für $(u - x)^{-\beta}$ wieder die Reihe (50) substituiren. Hierdurch ergiebt sich

$$\overline{\int_{\infty}}^{(1)} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= G_0'' + \frac{\beta}{1} G_1'' x + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1 \cdot 2 \ldots m} G_m'' x^m + \cdots,$$

wo

$$G_m'' = \overline{\int_{\infty}}^{(1)} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

gesetzt ist. Aber aus (32a) folgt

$$\overline{E}(\alpha+m, \varrho-\alpha) = e^{-\pi i(\varrho-\alpha)} \overline{\int_{\infty}}^{(1)} u^{-\varrho-m}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du.$$

Daher erhält man für G_m'', wenn der in (32a) angewendete Zweig der zu integrirenden Function gewählt wird, den Ausdruck

$$G_m'' = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\, \overline{E}(\alpha+m, \varrho-\alpha),$$

der durch (27) in

$$G_m' = e^{\pi i(\varrho-\alpha)} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)}\, \overline{E}(\alpha, \varrho-\alpha)$$

übergeht. Auf diese Weise entsteht für das obige Integral die Gleichung

$$(54) \qquad \overline{\int_{\infty}}^{(1)} \Phi(u, x)\, du = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\, \overline{E}(\alpha, \varrho-\alpha)\, F(\alpha, \beta; \varrho; x),$$

in der α eine im reellen Theile positive Constante bezeichnet.

Ist sowohl der reelle Theil von α als auch der von $\varrho - \alpha$ positiv, so convergirt bekanntlich das Integral

$$(55)\qquad \int_1^\infty \Phi(u, x)\, du = \int_1^\infty (u-x)^{-\beta} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du,$$

das für mod. $x < 1$ mit dem Producte

$$E(\alpha, \varrho - \alpha)\, F(\alpha, \beta; \varrho; x)$$

identisch wird.

Bei dem zweiten Integral (46)

$$\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} \Phi(u, x)\, du = \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} (u-x)^{-\beta} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

möge der Punkt c, welcher die untere Grenze bildet, auf der Verbindungslinie der Punkte 0 und x angenommen werden (Fig. 5). Man zieht durch c zwei geschlossene Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in der Art, dass $\mathfrak{P}$ den Punkt 0, $\mathfrak{Q}$ den Punkt x umschliesst, während der Punkt 1

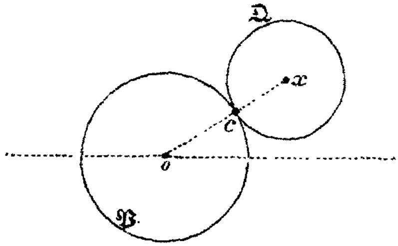

Fig. 5.

ausserhalb beider Curven bleibt; dann kann der Weg der Variable u kurz durch $\mathfrak{Q}+$, $\mathfrak{P}+$, $\mathfrak{Q}-$, $\mathfrak{P}-$ bezeichnet werden. Das Integral wird durch die Substitution $u = vx$ umgeformt, aus der

$$\Phi(u, x)\, du = (-1)^{\varrho-\alpha-\beta+1} x^{1-\varrho} v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}(1-vx)^{\varrho-\alpha-1}\, dv$$

folgt, und die Potenz $(1 - vx)^{\varrho-\alpha-1}$ in die Reihe

$$1 - \frac{\varrho-\alpha-1}{1} vx + \frac{(\varrho-\alpha-1)(\varrho-\alpha-2)}{1\,.\,2} v^2x^2 - \cdots$$

entwickelt. Den Punkten $u = 0$ und $u = x$ entsprechen die Punkte $v = 0$ und $v = 1$; die Fig. 5 liefert daher in der v-Ebene eine Figur von der Art der Fig. 1. Der Ausgangspunkt der von v durchlaufenen Curve heisse c_1; derselbe liegt auf der reellen Axe zwischen 0 und 1. Man hat hiernach, wenn $(-1)^{\varrho-\alpha-\beta+1}$ durch $e^{\pi i(\varrho-\alpha-\beta+1)}$ ersetzt wird, die Gleichung

$$e^{\pi i(\alpha+\beta-\varrho-1)} x^{\varrho-1} \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= \overline{\int_{c_1}}^{(1,0,1-,0-)} v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}\left[1 + \frac{\alpha-\varrho+1}{1} vx + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1\,.\,2} v^2x^2 + \cdots\right] dv.$$

An der unteren Integralgrenze c_1 mögen für $v^{\beta-\varrho}$, $(1-v)^{-\beta}$ die

Werthe $e^{(\beta-\varrho)\log c_1}$, $e^{-\beta\log(1-c_1)}$, in denen $\log c_1$ und $\log(1-c_1)$ reell sind, genommen werden. Dann ist nach (3)

$$\overline{\int_{c_1}^{*(1,0,1-,0-)}} v^{\beta-\varrho+m}(1-v)^{-\beta}\,dv = e^{\pi i(m-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+m+1,\ 1-\beta),$$

wofür man nach (11), unter der Voraussetzung, dass $\varrho-1$ nicht eine positive ganze Zahl ist, das Product

$$e^{-\pi i\varrho}\,\frac{(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)\ldots(\beta-\varrho+m)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(m+1-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta)$$

schreiben kann. Die Reihenentwickelung für das zweite Integral (46) lautet also

$$(56)\qquad \overline{\int_{c}^{*(x,0,x-,0-)}}\Phi(u,x)\,du =$$

$$= e^{\pi i(1-\alpha-\beta)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta)x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1,\beta-\varrho+1;\,2-\varrho;\,x),$$

woselbst F das in (52) angegebene Functionszeichen bedeutet.

Die zwei Integrale (46) stellen eine und dieselbe particuläre Lösung der Gleichung (45) dar, sobald die Constante ϱ ganzzahlig ist. Dies gilt nicht allein in dem früher erwähnten Fall, dass ϱ eine negative ganze Zahl oder Null ist, sowie im Fall $\varrho = 1$, sondern auch, wenn $\varrho - 1$ gleich einer positiven ganzen Zahl wird. Von den soeben genannten Coefficienten $\mathfrak{E}(\beta-\varrho+m+1,\ 1-\beta)$, die nach (20) gleich $\mathfrak{E}(\varrho-m-1,\ 1-\beta)$ sind, nehmen, wenn $\varrho-1$ gleich der positiven ganzen Zahl n ist, die n ersten, welche für $m = 0, 1, \ldots n-1$ erhalten werden, den Werth Null an. In Folge dessen wird das Anfangsglied der Entwickelung des zweiten Integrals (46) nach steigenden Potenzen von x gleich einer Constanten, und eine einfache Rechnung zeigt, dass, abgesehen von einem constanten Factor, die zwei Integrale (46) dann identisch sind. Als Ergänzung derselben tritt (specielle Fälle ausgenommen) ein logarithmisches Integral hinzu.

Ist $\beta-\varrho+1$ oder $1-\beta$ eine positive ganze Zahl, so verschwindet das zweite Integral (46) für beliebige Werthe von x. An Stelle desselben kann man jedoch, als particuläre Lösung der Gleichung (45), das Integral

$$(57)\qquad \overline{\int_{0}^{*(x)}}\Phi(u,x)\,du$$

anwenden, sobald der reelle Theil von $\beta-\varrho+1$, und das Integral

$$(58)\qquad \overline{\int_{x}^{*(0)}}\Phi(u,x)\,du,$$

sobald der reelle Theil von $1-\beta$ positiv ist. Auch in (57) und (58) substituirt man $u = vx$ und entwickelt die Potenz $(1-vx)^{\varrho-\alpha-1}$ nach dem binomischen Satze. Die Rechnung wird der zuvor angestellten völlig analog. Man erhält die Gleichungen

$$e^{\pi i(\alpha+\beta-\varrho-1)}\, x^{\varrho-1} \overline{\int_0^{(x)}} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= \overline{\int_0^{(1)}} v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}\left[1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1}\, v x+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2}\, v^2 x^2+\cdots\right] dv,$$

$$e^{\pi i(\alpha+\beta-\varrho-1)}\, x^{\varrho-1} \overline{\int_x^{(0)}} \Phi(u, x)\, du =$$

$$= \overline{\int_1^{(0)}} v^{\beta-\varrho}(1-v)^{-\beta}\left[1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1}\, v x+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2}\, v^2 x^2+\cdots\right] dv$$

und setzt in der ersten, gemäss (24) und (27),

$$\overline{\int_0^{(1)}} v^{\beta-\varrho+m}(1-v)^{-\beta}\, dv = e^{-\pi i \beta}\, \overline{E}(\beta-\varrho+m+1,\ 1-\beta) =$$

$$= e^{-\pi i \beta}\, \frac{(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)\ldots(\beta-\varrho+m)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(m+1-\varrho)}\, \overline{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta),$$

in der zweiten, gemäss (32) und (27),

$$\overline{\int_1^{(0)}} v^{\beta-\varrho+m}(1-v)^{-\beta}\, dv = e^{\pi i(\beta-\varrho+m+1)}\, \overline{E}(1-\beta,\ \beta-\varrho+m+1) =$$

$$= e^{\pi i(\beta-\varrho+1)}\, \frac{(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)\ldots(\beta-\varrho+m)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(m+1-\varrho)}\, \overline{E}(1-\beta,\ \beta-\varrho+1).$$

Hiernach ist das Integral (57) gleich dem Product

$$e^{\pi i(\varrho-\alpha-2\beta+1)}\, \overline{E}(\beta-\varrho+1, 1-\beta)\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1; 2-\varrho; x),$$

und das Integral (58) gleich dem Product

$$e^{-\pi i \alpha}\, \overline{E}(1-\beta,\ \beta-\varrho+1)\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1; 2-\varrho; x).$$

Die Betrachtung der Integrale (47) und (48) soll auf den allgemeinen Fall beschränkt werden. Die Integrale (47) sind die Hauptintegrale der Gleichung (45) in der Umgebung des Punktes $x = 1$. Bei dem ersten derselben werde die untere Grenze c auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 (wie in Fig. 4), bei dem zweiten auf der Verbindungslinie der Punkte 1 und x angenommen. Man entwickelt in dem erstgenannten Integrale die Potenz $(u-x)^{-\beta}$ in die Reihe

$$(u-x)^{-\beta} = [u-1-(x-1)]^{-\beta} = (u-1)^{-\beta}\left(1-\frac{x-1}{u-1}\right)^{-\beta}$$

$$= (u-1)^{-\beta}\left[1+\frac{\beta}{1}\,\frac{x-1}{u-1}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x-1}{u-1}\right)^2+\cdots\right],$$

die convergent ist, da mod. $(x-1) <$ mod. $(u-1)$ vorausgesetzt werden darf, und gelangt hierdurch, nach Anwendung der Formeln (8a) und (12), zu der Gleichung

$$(59)\qquad \overline{\int_c}^{(\mathfrak{B},\,0,\,\mathfrak{B}-,\,0-)} \Phi(u,x)\,du =$$
$$= e^{\pi i(\beta-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\varrho-\alpha-\beta)\,F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\varrho+1;1-x).$$

In das zweite Integral (47) führt man eine neue Variable v durch die Substitution $u-1=v(x-1)$ ein, worauf $[1-v(1-x)]^{\beta-\varrho}$ nach steigenden Potenzen von $1-x$ entwickelt wird. Dann ergiebt sich mit Hülfe der Formeln (3) und (11), bei passender Bestimmung des Anfangswerthes der zu integrirenden Function, die Gleichung

$$(60)\qquad \overline{\int_c}^{(x,\,1,\,x-,\,1-)} \Phi(u,x)\,du =$$
$$= e^{\pi i(1-\beta)}\,\mathfrak{E}(\varrho-\alpha,1-\beta)(1-x)^{\varrho-\alpha-\beta}\,F(\varrho-\alpha,\varrho-\beta;\varrho-\alpha-\beta+1;1-x).$$

Die zwei Ausdrücke (48) stellen die Hauptintegrale der Gleichung (45) für das Gebiet der grossen Werthe von x dar. In dem ersten dieser Integrale,

$$\overline{\int_c}^{(\mathfrak{C},\,x,\,\mathfrak{C}-,\,x-)} \Phi(u,x)\,du,$$

möge als untere Grenze c ein Punkt der Verbindungslinie der Punkte 0 und x gewählt werden. Man zieht, wie in Figur 5, durch den Punkt c einerseits einen Kreis $\mathfrak{P}$ mit dem Mittelpunkte 0, andererseits einen Kreis $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte x, setzt aber hier mod. $c>1$ voraus, so dass der Punkt 1 und die Linie $\mathfrak{C}$ vom Kreise $\mathfrak{P}$ umschlossen werden. Dann geben die Umläufe $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{Q}^+$, $\mathfrak{P}^-$, $\mathfrak{Q}^-$ den Integrationsweg des genannten Integrals an. Da für die Punkte u dieses Weges mod. u stets grösser als 1 ist, so kann in dem Producte

$$\Phi(u,x) = u^{-\alpha-1}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\varrho-\alpha-1}$$

die Potenz $\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\varrho-\alpha-1}$ in die Reihe

$$1-\frac{\varrho-\alpha-1}{1}\,\frac{1}{u}+\frac{(\varrho-\alpha-1)(\varrho-\alpha-2)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{u^2}-\cdots$$

entwickelt werden. Durch Anwendung der Substitution $u=vx$ erhält man demnach

$$\Phi(u,x)\,du = x^{-\alpha}\,v^{\beta-\alpha-1}(v-1)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{vx}\right)^{\varrho-\alpha-1}dv =$$
$$= (-1)^{-\beta}\,x^{-\alpha}\,v^{\beta-\alpha-1}(1-v)^{-\beta}\left[1-\frac{\varrho-\alpha-1}{1}\,\frac{1}{vx}+\cdots\right]dv.$$

Wird der letztere Ausdruck nach v integrirt, gemäss der obigen Angabe, so sind in den einzelnen Summanden die Werthe 0 und 1 die singulären Punkte, welche von der Variable v umkreist werden. Auf diese Weise findet man für das erste Integral (48) den Ausdruck

$$(61)\qquad \overline{\int_c}^{(\mathfrak{G},\, x,\, \mathfrak{G}-,\, x-)} \Phi(u,x)\,du =$$
$$= e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\,\mathfrak{E}(\beta-\alpha,\ 1-\beta)\,x^{-\alpha}\,F\Big(\alpha,\ \alpha-\varrho+1;\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{x}\Big).$$

Für das zweite Integral (48),

$$\overline{\int_c}^{(1,\, 0,\, 1-,\, 0-)} \Phi(u,x)\,du,$$

kann man die Figur 4 zu Grunde legen und die untere Grenze c als Punkt der reellen Axe zwischen 0 und 1 wählen; nur muss x jetzt als ein ausserhalb der Curven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ befindlicher Punkt vorausgesetzt werden. Man nimmt mod. x als so gross an, dass für jeden Punkt u des Integrationsweges mod. $u <$ mod. x ist, und entwickelt die Potenz $(u-x)^{-\beta}$, $= (-x)^{-\beta}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{-\beta}$, in die Reihe

$$(-1)^{-\beta}\,x^{-\beta}\left(1+\frac{\beta}{1}\,\frac{u}{x}+\frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\,\frac{u^2}{x^2}+\cdots\right).$$

Dann entsteht, nach Berücksichtigung von (8a) und (11), die Gleichung

$$(62)\qquad \overline{\int_c}^{(1,\, 0,\, 1-,\, 0-)} \Phi(u,x)\,du =$$
$$= e^{-\pi i\varrho}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ \varrho-\alpha)\,x^{-\beta}\,F\Big(\beta,\ \beta-\varrho+1;\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{x}\Big).$$

Verschwinden einzelne der Integrale (47) und (48) identisch, — in welchen Fällen die auf den rechten Seiten von (59) bis (62) stehenden respectiven Grössen $\mathfrak{E}$ ein positives ganzzahliges Argument erhalten, — so hat man an ihrer Stelle die zu (53), (54) etc. analogen Integrale als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (45) anzuwenden.