Ueber die Grenzwerthe der Quotienten.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

(Nachtrag zum Aufsatze im XIV. Bande dieser Annalen S. 231.)

Bei Verfassung des genannten Artikels ist mir eine Note des Hrn. V. Rouquet (N. Annal. de Mathém. 2. Sér. T. XVI, p. 113) über den in Rede stehenden Gegenstand entgangen. Hr. Rouquet geht von einem Lemma aus, welches ich folgendermassen wiedergebe:

Lemma. *Ist die eindeutige Function $F(x)$ von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an für alle endlichen Werthe von $x > x_1$ stetig und mit einem Differentialquotienten $F'(x)$ begabt*), der für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth besitzt, so existirt bei dem nämlichen Grenzübergange auch ein Grenzwerth für den Bruch $F(x) : x$ und es ist*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} F'(x) \text{ **)}.$$

Dabei ist es nicht einmal nothwendig, dass $F(x)$ selbst für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth haben muss. Es ist z. B. für

---

*) Vergl. die Anmerkung zu Ann. XIV, S. 236.

**) Der von Hrn. Rouquet gegebene Beweis setzt voraus, dass $\lim F'(x)$ endlich sei. Er passt jedoch auch für den Fall, dass dieser Grenzwerth als *bestimmt unendlich* angenommen wird. In der That ist z. B. $\lim F'(x) = +\infty$, so sei G eine vorgegebene positive Zahl und $G' > G$ gewählt. Zufolge Voraussetzung hat man für *alle* $x > x'$ $F'(x) > G'$. Demnach nimmt die Function $F(x) - G'x + k$, wo k eine positive Constante bezeichnet, mit wachsendem x beständig zu. Nimmt man k so gross an, dass $F(x') - G'x' + k > 0$, so folgt für $x > x'$

$$\frac{F(x)}{x} > G' - \frac{k}{x}$$

und somit für *alle* x, die ausserdem noch der Bedingung

$$\frac{k}{x} < G' - G$$

genügen, $\dfrac{F(x)}{x} > G$ d. h. es ist

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

$$F(x) = \sin\sqrt{x} \quad \lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} F'(x) = 0.$$

Hr. Rouquet schliesst weiter so. Sind

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x)$$

zwei stetige Functionen von x, die beide ins Unendliche wachsen, während x einem endlichen Werthe a sich nähert oder selbst ins Unendliche wächst, so kann man y als Function von z betrachten. Da nun

(a) $$\frac{dy}{dz} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

so folgt der Satz: „Wenn in dem angegebenen Falle $\lim\{f'(x):\varphi'(x)\}$ existirt, so auch $\lim\{f(x):\varphi(x)\}$ und beide Grenzwerthe sind einander gleich."

Es trifft jedoch dieser Satz nicht immer zu. Z. B. setzt man

(b) $$f(x) = x + \sin x \cos x \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = e^{\sin x},$$

so folgt für

$$\lim x = +\infty, \quad \lim f = \lim \varphi = +\infty,$$

ferner aus

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = e^{-\sin x} \cdot \frac{2\cos x}{x + \sin x \cos x + 2\cos x} \cdot$$

$$\lim\{f'(x):\varphi'(x)\} = 0,$$

während

$$f(x):\varphi(x) = e^{-\sin x}$$

für

$$\lim x = +\infty$$

die Unbestimmtheitsgrenzen $\frac{1}{e}$ und e besitzt, so dass *kein Grenzwerth dieser Function vorhanden ist.*

Man wird demnach die Formel (a) nicht unbedingt gebrauchen dürfen. Eine selbstverständliche Voraussetzung derselben bildet die Annahme, dass man y als *eindeutige und stetige Function von* z (für alle endlichen Werthe von z, von einem bestimmten $z = z_1$ an gegen $+\infty$ oder $-\infty$) erklären könne. Dies ist, soviel bis jetzt bekannt ist, nur dann möglich, wenn man für dieselben Werthe z x als eindeutige und stetige Function von z erklären kann. Die Gleichung $z = \varphi(x)$ liefert aber eine eindeutige und stetige Umkehrung ($x = \psi(z)$) nur in einem solchen Intervalle $x = a \pm \delta (\delta > 0) \cdots a$ (bez. $x_1 \cdots \pm\infty$), in welchem $\varphi(z)$ den Sinn seiner Aenderung nicht wechselt, d. h. entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt. — Ferner hat die Formel (a) nur dann einen Sinn, wenn $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ nicht zugleich Null oder Unendlich sind. (Auch dies findet in obigem Beispiele (b) statt.)

Aus dem Lemma des Hrn. Rouquet kann demnach mit Hülfe der Formel (a) geschlossen werden:

Satz. „Wenn von den eindeutigen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, welche in dem Intervalle $a \pm \delta (\delta > 0) \cdots a$ (bez. $x_1 \cdots \pm \infty$) — mit Ausschluss des letzteren Endwerthes — endlich, stetig und mit Differentialquotienten begabt sind, die weder zugleich Null, noch zugleich Unendlich sind, — *wenigstens eine sich in dem genannten Intervalle nicht in verschiedenen Sinnen ändert und dabei für* $\lim x = a \pm 0 \, (\pm \infty)$ *den Grenzwerth* $+\infty$ *oder* $-\infty$ *besitzt: so folgt aus der Existenz des Grenzwerthes* $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ *auch die Existenz des Grenzwerthes für den Bruch* $f(x) : \varphi(x)$ *bei dem in Rede stehenden Grenzübergange* und es sind beide Grenzwerthe einander gleich:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \, .\text{``}$$

Dabei kann jedoch, falls $f(x)$ *allein* der eben erwähnten Bedingung genügt, also z. B. $\lim \varphi(x)$ endlich ist, das Zeichen der unendlichen Grenzwerthe $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ und $\lim \{f(x) : \varphi(x)\}$ verschieden sein (vgl. Ann. XIV, S. 238).

Es ist übrigens nicht erforderlich, dass *beide* Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ einen Grenzwerth besitzen müssen. Man hat z. B. für

$$f(x) = \sin x, \;\; \varphi(x) = x^2, \;\; \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0, \;\; (\lim x = +\infty) \, .$$

Der eben abgeleitete Satz stimmt überein mit dem von Herrn du Bois-Reymond im XIV. Bde. dieser Annalen (S. 502) aufgestellten Satze. Es ist auch nicht schwierig, denselben auf dem von mir eingeschlagenen Wege zu erhalten, so dass er an Stelle des 4. Satzes (a. a. O. p. 238) treten kann. Es gilt nämlich der 2. Satz (a. a. O. p. 234) auch dann, wenn *von den stetigen Functionen* $f(x)$, $\varphi(x)$ *nur die letztere sich für alle endlichen Werthe von* x *von einem bestimmten* $x = x_1$ *an in demselben Sinne ändert und dabei für* $\lim x = +\infty$ *einen unendlichen Grenzwerth besitzt**).

*) Man setze in dem Beweise statt der Stelle: „Da gemäss den Voraussetzungen u. s. w." (a. a. O. p. 235 Z. 6 v. o.) das Folgende. „Es sei, während x das Intervall ph bis $ph + h$ (mit Einschluss dieser Grenzen) durchläuft, g da Maximum, k das Minimum von $f(x)$, so dass

$$k \leqq f(x_0 + ph) \leqq g \, .$$

Dann ergiebt sich wegen

$$\varphi(ph) \leqq \varphi(x_0 + ph) < \varphi(h + ph),$$

$$k - K\varphi(ph + h) < f(x_0 + ph) - K\varphi(x_0 + ph) < g - K\varphi(ph) \, .$$

Bezeichnet man mit P den grösseren u. s. w."

Bei dieser Gelegenheit mögen folgende Verbesserungen auf p. 234 angebracht werden. Z. 11 v. o. muss es heissen: „in demselben Sinne *zu ändern*" und in Formel (4) statt $\lim x = +\infty$ „$\lim r = +\infty$".

Vermittelst des Lemma des Hrn. Rouquet kann der vorstehende Satz der Differentialrechnung, wie man sieht, sehr einfach abgeleitet werden. Namentlich bedarf es hierzu nicht der von mir in § 1. meines Aufsatzes bewiesenen Hülfssätze. Dieselben sind jedoch auch abgesehen von dem Gebrauche, den ich dort von ihnen gemacht habe, von Wichtigkeit und lassen sich nicht umgekehrt aus dem genannten Satze gewinnen, wenn man nicht die Voraussetzung aufnehmen will, dass $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ für $\lim x = +\infty$ existire.*)

*) Mit Rücksicht auf eine Bemerkung des Hrn. du Bois-Reymond (Ann. XIV, p. 506) habe ich noch meine Aeusserung (a. a. O. p. 232) zu begründen, dass eine stetige Function $f(x)$, welche bei einem beliebigen Grenzübergange des x einen unendlichen Grenzwerth besitzt, *bestimmt* unendlich werden müsse. Auf diesen Satz führen die von Hrn. Weierstrass in seinen Vorlesungen angewendeten Definitionen. Hiernach sagt man z. B., die abhängige Veränderliche $f(x)$ wird beim Grenzübergange $\lim x = +\infty$ positiv unendlich, wenn sie die folgende Eigenschaft hat. Ist H eine gegebene beliebige positive Zahl, so muss eine positive Zahl G existiren, so dass für *alle* der Veränderlichen x vermöge ihrer Definition zukommenden Werthe, welche $> G$ sind, $f(x) > H$ ist. Gilt dieses aber nur bezüglich des absoluten Betrages von $f(x)$, so wird $f(x)$ unbestimmt unendlich. Daher kann eine stetige Function für $\lim x = +\infty$ nicht unbestimmt unendlich werden; denn sie müsste für Werthe von x, grösser als jede beliebige Zahl, entgegengesetzt bezeichnete Werthe annehmen, somit müsste es auch Werthe von x, grösser als jede beliebige Zahl, geben, wofür sie verschwindet. — Zu derselben Ansicht führt die Theorie der von Hrn. du Bois-Reymond erfundenen *Unbestimmtheitsgrenzen*. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x)$ z. B. für $\lim x = +\infty$ einen Grenzwerth besitze, ist die *Gleichheit* der Unbestimmtheitsgrenzen für $\lim x = +\infty$; d. h. falls sie nicht endlich sind, müssen beide $+\infty$ oder beide $-\infty$ sein. Im Falle des „Unbestimmt-Unendlich Werdens" gilt dieses zwar nicht mehr von $f(x)$ selbst, wohl aber vom absoluten Betrage von $f(x)$. Die Unbestimmtheitsgrenzen des absoluten Betrages einer solchen stetigen Function wie $x \sin x$ für $\lim x = +\infty$ sind aber 0 und $+\infty$.

Innsbruck, im August 1879.