Über Folgen linearer Operationen.

Von **Hans Hahn** in Wien.

Anläßlich eines Referats über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Grenzwerte bestimmter Integrale (sog. singuläre Integrale), das ich auf der Versammlung der Deutschen Mathematikervereinigung in Jena hielt, machte mich Herr J. Schur aufmerksam, daß die Theorie der singulären Integrale offenbar in enger Beziehung stehe zu seinen Untersuchungen über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen[1]). Ich habe nun versucht, eine allgemeine Theorie aufzustellen, in der sowohl die Theorie der singulären Integrale, als auch die Untersuchungen von J. Schur als Spezialfälle enthalten sind. Diese Theorie möchte ich im folgenden kurz darstellen.

§ 1. Die fundamentale Ungleichung.

Unter einem linearen Raume verstehen wir eine Menge $\mathfrak{A}$ von Elementen a (den Punkten des Raumes) mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist λ eine reelle Zahl und a ein Punkt von $\mathfrak{A}$, so gibt es in $\mathfrak{A}$ auch einen Punkt λa. Diese Multiplikation mit einer reellen Zahl genügt dem assoziativen Gesetz:

$$\lambda (\mu a) = (\lambda \mu) a.$$

Für $\lambda = 0$ sind alle Punkte $0 a$ identisch. Dieser Punkt heißt der Nullpunkt des Raumes und wird bezeichnet mit 0. Es ist $1 a = a$, und $(-1) a$ setzen wir $= -a$.

2. Sind a und a' Punkte von $\mathfrak{A}$, so gibt es in $\mathfrak{A}$ auch einen Punkt $a + a'$. Diese Addition der Punkte ist assoziativ, kommutativ und zur Multiplikation mit reellen Zahlen distributiv:

$$\lambda a + \mu a = (\lambda + \mu) a; \quad \lambda (a + a') = \lambda a + \lambda a'.$$

Jedem Punkte a von $\mathfrak{A}$ sei eine Zahl $D(a)$ zugeordnet mit folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $D(a) \geqq 0$, und zwar $D(a) = 0$ dann und nur dann, wenn $a = 0$.

2. $\qquad D(\lambda a) = |\lambda| D(a)$.

3. $\qquad D(a + a') \leqq D(a) + D(a')$.

[1]) J. Schur, Journ. f. Math. 151 (1920), 79.

Mit Hilfe dieser Funktion $D(a)$ können wir den Raum $\mathfrak{A}$ zu einem metrischen Raume[2]) machen durch die Abstandsdefinition:

$$r(a, a') = D(a - a').$$

Damit ist im Raume $\mathfrak{A}$ auch der Grenzbegriff festgelegt vermöge der Definition[3]):

$$\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}}\, a_\nu = a, \quad \text{wenn} \quad \lim_{\nu=\infty} D(a_\nu - a) = 0.$$

Da $D(a) = r(a, 0)$ ist und $r(a, b)$ stetig von a abhängt[4]), ist $D(a)$ eine in $\mathfrak{A}$ stetige Funktion von a. Aus $\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}}\, a_\nu = a$ und $\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}}\, a'_\nu = a'$ folgt $\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}}\,(a_\nu + a'_\nu) = a + a'$, weil ja:

$$D(a + a' - a_\nu - a'_\nu) \leqq D(a - a_\nu) + D(a' - a'_\nu).$$

Eine Punktfolge $\{a_\nu\}$ aus $\mathfrak{A}$ heißt eine Cauchysche Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ν_0 gibt, so daß:

$$D(a_\nu - a'_\nu) < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0.$$

Gibt es in $\mathfrak{A}$ zu jeder Cauchyschen Folge $\{a_\nu\}$ einen Grenzpunkt, d. h. einen Punkt a, für den:

$$\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}}\, a_\nu = a,$$

so heißt der Raum $\mathfrak{A}$ vollständig. Wir nehmen im folgenden den Raum $\mathfrak{A}$ als vollständig an.

Sei nun ein zweiter Raum $\mathfrak{C}$ gegeben, dessen Punkte wir mit c bezeichnen. Jedem Paare a, c, wo a zu $\mathfrak{A}$ und c zu $\mathfrak{C}$ gehört, sei eine reelle Zahl $U(a, c)$ zugeordnet, und zwar sei die Operation U linear in a, d. h. es sei:

$$U(\lambda a, c) = \lambda\, U(a, c); \quad U(a + a', c) = U(a, c) + U(a', c);$$

wir bezeichnen sie im folgenden als die Fundamentaloperation.

Nun führen wir im Raume $\mathfrak{C}$ eine Maßfunktion $\Delta(c)$ ein durch die Definition[5]): bei gegebenem c sei $\Delta(c)$ die obere Schranke von $|U(a, c)|$ für alle der Bedingung $D(a) = 1$ genügenden a von $\mathfrak{A}$. Da $U(-a, c) = -U(a, c)$ und $D(-a) = D(a)$, sieht man daß in dieser Definition auch $|U(a, c)|$ durch $U(a, c)$ ersetzt werden kann. Wir nennen $\Delta(c)$ die (bezüglich der Fundamentaloperation U) zu $D(a)$ polare Maßfunktion.

---

[2]) Vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 52.

[3]) Für den Grenzbegriff in $\mathfrak{A}$ verwenden wir das Zeichen $\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}}$, für Grenzwerte reeller Zahlenfolgen das Zeichen $\lim\limits_{\nu=\infty}$.

[4]) Vgl. l. c. [2]), S. 127, Satz I.

[5]) Die folgenden Überlegungen stammen im wesentlichen von E. Hell; Monatsh. f. Math. u. Phys. 31 (1921), 61 ff.

Es kann auch $\Delta(c) = +\infty$ ausfallen. Wir wollen annehmen, dies sei nicht für alle c von $\mathfrak{C}$ der Fall und lassen sodann aus $\mathfrak{C}$ alle Punkte mit unendlichem $\Delta(c)$ weg. Die übrigbleibenden Punkte von $\mathfrak{C}$ bezeichnen wir mit b, die Menge aller dieser Punkte mit $\mathfrak{B}$ und nennen sie einen (bezüglich der Fundamentaloperation U) zu $\mathfrak{A}$ polaren Raum.

Sei $a (\neq 0)$ ein Punkt von $\mathfrak{A}$. Dann genügt der Punkt $a' = \frac{1}{D(a)} a$ der Bedingung $D(a') = 1$. Nach Definition von $\Delta(b)$ ist also:

$$| U(a', b) | \leqq \Delta(b).$$

Da aber:

$$U(a', b) = \frac{1}{D(a)} U(a, b),$$

so ist:

$$| U(a, b) | \leqq D(a) . \Delta(b). \tag{1}$$

Da diese Ungleichung offenbar auch für $a = 0$ gilt, so gilt sie für alle a von $\mathfrak{A}$ und alle b von $\mathfrak{B}$. Wir nennen sie die fundamentale Ungleichung.

Sei $\Delta(b)$ eine in einem Raume $\mathfrak{B}$ definierte und endliche Funktion; für alle a von $\mathfrak{A}$ und alle b von $\mathfrak{B}$ gelte Ungleichung (1); zu jedem b von $\mathfrak{B}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein a von $\mathfrak{A}$, so daß:

$$D(a) = 1; \quad | U(a, b) | > \Delta(b) - \varepsilon;$$

dann ist $\mathfrak{B}$ ein zu $\mathfrak{A}$ polarer Raum, und $\Delta(b)$ die zu $D(a)$ polare Maßfunktion.

Für jedes b von $\mathfrak{B}$ ist $U(a, b)$ eine in $\mathfrak{A}$ stetige Operation, d. h. aus $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ folgt

$$\lim_{\nu = \infty} U(a_\nu, b) = U(a, b).$$

In der Tat, nach (1) ist:

$$| U(a_\nu, b) - U(a, b) | = | U(a_\nu - a, b) | \leqq D(a_\nu - a) . \Delta(b).$$

Wegen $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ aber ist $\lim_{\nu=\infty} D(a_\nu - a) = 0$.

§ 2. Beschränkte Operationsfolgen.

Sei $U(a, b)$ die Fundamentaloperation und $\{b_n\}$ eine Punktfolge des polaren Raumes $\mathfrak{B}$. Wir nennen die Operationsfolge $U(a, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine in $\mathfrak{A}$ beschränkte Operationsfolge, wenn für jedes einzelne a aus $\mathfrak{A}$ die Folge der Zahlen $U(a, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ beschränkt ist. Es gilt der Satz:

I. Damit die Operationsfolge $U(a, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ beschränkt sei in $\mathfrak{A}$, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge $\Delta(b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ beschränkt sei.

Die Bedingung ist hinreichend; in der Tat, ist:

$$\Delta(b_n) \leqq M \text{ für alle } n,$$

so folgt aus (1):

$$|U(a, b_n)| \leqq M . D(a).$$

Die Bedingung ist notwendig, wir haben zu zeigen: ist sie nicht erfüllt, so gibt es in $\mathfrak{A}$ ein a, für das die Folge $U(a, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht beschränkt ist.[6]

Sei also die Folge der $\Delta(b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ nicht beschränkt, d. h. es sei:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \Delta(b_\nu) = +\infty.$$

Indem wir nötigenfalls von $\{b_\nu\}$ zu einer Teilfolge übergehen, können wir ohne weiteres annehmen, es sei geradezu:

$$\lim_{\nu=\infty} \Delta(b_\nu) = +\infty. \tag{2}$$

Infolge der Definition von $\Delta(b)$ gibt es dann in $\mathfrak{A}$ eine Punktfolge $\{a_\nu\}$, so daß:

$$\lim_{\nu=\infty} U(a_\nu, b_\nu) = +\infty; \quad D(a_\nu) = 1. \tag{3}$$

Dabei können wir annehmen, für jedes einzelne a_ν sei die Folge $U(a_\nu, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ beschränkt:

$$|U(a_\nu, b_n)| < M_\nu \text{ für alle } n, \tag{4}$$

da andernfalls die Behauptung schon bewiesen wäre. Wir setzen zur Abkürzung

$$\Delta(b_\nu) = \Delta_\nu.$$

Dann gibt es immer eine mit einem beliebigen Index ν_1 beginnende,[7] wachsende Indizesfolge $\{\nu_i\}$, die den beiden Forderungen genügt:

1. $$\Delta_{\nu_{i+1}} \geqq \Delta_{\nu_i}.$$

2. Ist N_i so gewählt, daß:

$$\left| U\left(a_{\nu_1} + \frac{1}{2\,\Delta_1} a_{\nu_2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1} \Delta_{\nu_{i-1}}} a_{\nu_i}, \ b_n\right) \right| < N_i \text{ für alle } n, \tag{5}$$

[6]) Der Grundgedanke des folgenden Beweises stammt von H. Lebesgue, Ann. Toul. (3) 1 (1909), 61.

[7]) Dieser Index ν_1 werde so gewählt, daß $\Delta_{\nu_1} \neq 0$, was wegen (2) sicher möglich ist.

so ist:

$$U(a_{\nu_{i+1}}, b_{\nu_{i+1}}) > (N_i + i + 1)\, 2^i \Delta_{\nu_i}. \tag{6}$$

In der Tat, wegen (2) ist Forderung 1 befriedigt, sobald nur ν_{i+1} ($>\nu_i$) hinlänglich groß gewählt wird; aus (4) folgt, daß N_i so gewählt werden kann, daß (5) gilt; aus (3) folgt, daß dann, wenn ν_{i+1} hinlänglich groß gewählt wird, auch (6) gilt.

Wir setzen nun:

$$a_{\nu_1} + \frac{1}{2\Delta_1} a_{\nu_2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_{i-1}}} a_{\nu_i} = h_i$$

und behaupten: $\{h_i\}$ ist eine Cauchysche Punktfolge. In der Tat, bei Berücksichtigung der zweiten Gleichung (3) und von Forderung 1 findet man:

$$\begin{aligned} D(h_{i+k} - h_i) &\leqq \frac{1}{2^i \Delta_{\nu_i}} D(a_{\nu_{i+1}}) + \cdots + \frac{1}{2^{i+k-1}\Delta_{\nu_{i+k-1}}} D(a_{\nu_{i+k}}) \\ &\leqq \frac{1}{\Delta_{\nu_i}}\left(\frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{2^{i+k-1}}\right) \leqq \frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_i}} \leqq \frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_1}}, \end{aligned} \tag{7}$$

also ist $\{h_i\}$ eine Cauchysche Punktfolge.

Da nun der Raum $\mathfrak{A}$ vollständig, gibt es in ihm einen Punkt h, so daß:

$$\underset{i=\infty}{\mathrm{L}}\, h_i = h.$$

Wir setzen:

$$h = h_{i-1} + \frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_{i-1}}} a_{\nu_i} + r_i.$$

Dann ist:

$$U(h, b_{\nu_i}) \geqq \frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_{i-1}}} U(a_{\nu_i}, b_{\nu_i}) - |U(h_{i-1}, b_{\nu_i})| - |U(r_i, b_{\nu_i})|. \tag{8}$$

Hierin ist wegen (6):

$$\frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_{i-1}}} U(a_{\nu_i}, b_{\nu_i}) > N_{i-1} + i, \tag{9}$$

und wegen (5):

$$|U(h_{i-1}, b_{\nu_i})| < N_{i-1}, \tag{10}$$

endlich wegen (1):

$$|U(r_i, b_{\nu_i})| \leqq D(r_i)\, \Delta_{\nu_i}. \tag{11}$$

Aus:

$$r_i = h - h_i = \underset{k=\infty}{\mathrm{L}}\, (h_{i+k} - h_i)$$

und der Stetigkeit von D folgt:

$$D(r_i) = \lim_{k=\infty} D(h_{i+k} - h_i),$$

und somit wegen (7)

$$D(r_i) \leqq \frac{1}{2^{i-1}\Delta_{\nu_i}}.$$

Zufolge (11) ist also:

$$|U(r_i, b_{\nu_i})| \leqq \frac{1}{2^{i-1}} \leqq 1. \tag{12}$$

Nun ergeben (8), (9), (10), (12):

$$U(h, b_{\nu_i}) > i - 1,$$

also ist die Folge $U(h, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht beschränkt, und die Behauptung ist bewiesen.

§ 3. Konvergente Operationsfolgen.

Sei wieder $U(a, b)$ die Fundamentaloperation und $\{b_n\}$ eine Punktfolge des polaren Raumes. Wir nennen die Operationsfolge $U(a; b_n)$ eine in $\mathfrak{A}$ konvergente Operationsfolge, wenn für jedes a von $\mathfrak{A}$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} U(a, b_n)$ existiert. Es gilt der Satz:

II. Ist $U(a, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine in $\mathfrak{A}$ konvergente Operationsfolge, so ist

$$V(a) = \lim_{n=\infty} U(a, b_n)$$

eine in $\mathfrak{A}$ gleichmäßig stetige lineare Operation.

In der Tat, daß $V(a)$ linear ist, liegt auf der Hand.

Als konvergente Operationsfolge ist $U(a, b_n)$ gewiß auch beschränkt, nach Satz I gibt es also ein M, so daß

$$\Delta(b_n) \leqq M \quad \text{für alle } n. \tag{13}$$

Sei sodann $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, und seien a' und a'' zwei Punkte von $\mathfrak{A}$, für die:

$$D(a' - a'') < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{14}$$

Es ist:

$$V(a') - V(a'') = \lim_{n=\infty}\big(U(a', b_n) - U(a'', b_n)\big) = \lim_{n=\infty} U(a' - a'', b_n).$$

Zufolge der fundamentalen Ungleichung (1) aber ist hierin wegen (13) und (14):

$$|U(a' - a'', b_n)| \leqq D(a' - a'').\Delta(b_n) < \varepsilon.$$

Also ist auch:

$$| V(a') - V(a'') | \leqq \varepsilon,$$

womit Satz II bewiesen ist.

Wir nennen einen Teil $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ eine Grundmenge aus $\mathfrak{A}$, wenn die Menge $\mathfrak{G}'$ aller Punkte von $\mathfrak{A}$, die Linearkombinationen endlich vieler Punkte von $\mathfrak{G}$ sind (d. h. die Gestalt haben:

$$a = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_i g_i,$$

wo $g_1, g_2, \ldots, g_i$ zu $\mathfrak{G}$ gehören), in $\mathfrak{A}$ dicht ist.[8]) Dann gilt der Satz:

III. Damit die in $\mathfrak{A}$ beschränkte Operationsfolge $U(a, b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ auch konvergent sei in $\mathfrak{A}$, ist notwendig und hinreichend, daß sie in allen Punkten g einer Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}$ konvergent sei.

Die Bedingung ist notwendig: dies ist trivial. Die Bedingung ist hinreichend. In der Tat, ist die Operationsfolge $U(a, b_n)$ konvergent in $\mathfrak{G}$, so auch in der vorhin mit $\mathfrak{G}'$ bezeichneten Menge. In allen Punkten von $\mathfrak{G}'$ existiert also:

$$V(a) = \lim_{n=\infty} U(a, b_n) \tag{15}$$

und ist nach Satz II eine auf $\mathfrak{G}'$ gleichmäßig stetige Funktion. Da $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}$, kann sie in eindeutiger Weise zu einer auf ganz $\mathfrak{A}$ endlichen und stetigen Funktion $V(a)$ erweitert werden.[9])

Wir beweisen, daß dann (15) auf ganz $\mathfrak{A}$ gilt.

Sei in der Tat $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Es ist, wenn a' ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} | U(a, b_n) - V(a) | \leqq | U(a, b_n) - U(a', b_n) | + \\ + | U(a', b_n) - V(a') | + | V(a') - V(a) |. \end{aligned} \tag{16}$$

Da $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}$ und da V stetig auf $\mathfrak{A}$, kann für a' ein Punkt von $\mathfrak{G}'$ gewählt werden, für den:

$$D(a' - a) < \varepsilon; \quad | V(a') - V(a) | < \varepsilon. \tag{17}$$

Weil auf $\mathfrak{G}'$ die Beziehung (15) gilt, ist:

$$| U(a', b_n) - V(a') | < \varepsilon \quad \text{für fast alle } n. \tag{18}$$

Weil $U(a, b_n)$ nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es ein M, so daß (13) gilt. Wegen der fundamentalen Ungleichung (1) ist sodann:

$$| U(a, b_n) - U(a', b_n) | \leqq D(a - a') . \Delta(b_n) < \varepsilon . M \text{ für alle } n. \tag{19}$$

---

[8]) Vgl. l. c. [2]), S. 77.
[9]) l. c. [2]), S. 133.

Wegen (17), (18), (19) ergibt (16):

$$|U(a, b_n) - V(a)| < \varepsilon (M + 2) \quad \text{für fast alle } n.$$

Also gilt (15) auf ganz $\mathfrak{A}$, und Satz III ist bewiesen.

IV. Sei $U(a, b_n)$ eine auf $\mathfrak{A}$ konvergente Operationsfolge und $F(a)$ eine auf $\mathfrak{A}$ lineare und stetige Funktion. Damit auf ganz $\mathfrak{A}$ die Beziehung gelte:

$$\lim_{n=\infty} U(a, b_n) = F(a),$$

ist notwendig und hinreichend, daß sie in allen Punkten einer Grundmenge $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ gelte.

Die Bedingung ist notwendig; dies ist trivial.

Die Bedingung ist hinreichend; in der Tat, nach Satz II ist $V(a) = \lim_{n=\infty} U(a, b_n)$ linear und stetig auf $\mathfrak{A}$. Wegen der Linearität folgt aus der Übereinstimmung von F und V auf $\mathfrak{G}$ ihre Übereinstimmung auf der oben mit $\mathfrak{G}'$ bezeichneten Menge, und weil $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}$, folgt aus der Stetigkeit weiter die Übereinstimmung von F und V auf ganz $\mathfrak{A}$.

§ 4. Lineare Transformationen beschränkter Zahlenfolgen.

In den §§ 4—7 bedeuten sowohl die Punkte des Raumes $\mathfrak{A}$, als auch die Punkte des Raumes $\mathfrak{B}$ Folgen reeller Zahlen:

$$a = \{u_k\}; \quad b = \{v_k\};$$

und es ist:

$$\lambda a = \{\lambda u_k\}; \quad a + a' = \{u_k + u'_k\};$$

die Fundamentaloperation ist:

$$U(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k. \tag{20}$$

1. Der Raum $\mathfrak{A}_1$. Zunächst bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen beschränkten Folgen reeller Zahlen, und die Maßfunktion sei gegeben durch:

$$D(a) = \text{obere Schranke von } |u_k| \; (k = 1, 2, \ldots);$$

den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_1$. Ist $a_\nu = \{u_{\nu,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{A}_1$, so bedeutet:

$$\mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

soviel wie: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν_0, so daß:

$$|u_{\nu,k} - u_k| < \varepsilon \text{ für } \nu \geqq \nu_0 \text{ und alle } k;$$

d. h. es gelten die Beziehungen:

$$\lim_{\nu=\infty} u_{\nu,k} = u_k$$

gleichmäßig für alle k. Offenbar ist dieser Raum vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_1$ nehmen wir die Menge aller Folgen $\{v_k\}$ für die $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$ endlich ist. Für jedes a aus $\mathfrak{A}_1$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_1$ hat dann die Fundamentaloperation (20) einen Sinn, und es ist:

$$|U(a, b)| \leqq D(a) \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|.$$

Wir führen nun, wenn z irgend eine reelle Zahl bedeutet, in üblicher Weise die Bezeichnung ein:

$$\operatorname{sgn} z = 1, \text{ wenn } z \geqq 0, \quad \operatorname{sgn} z = -1, \text{ wenn } z < 0.$$

Setzen wir:

$$u_k = \operatorname{sgn} v_k,$$

so gehört $\{u_k\} = a$ zu $\mathfrak{A}_1$, und es wird:

$$D(a) = 1; \qquad U(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|.$$

Zufolge der Schlußbemerkung von § 1 haben wir daher für die polare Maßbestimmung:

$$\Delta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|.$$

Aus Satz I entnehmen wir daher:

Va. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_1$. Damit die Operationsfolge

$$U(a, b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_1$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}| \leqq M \qquad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_1$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, die nur die Zahlen 0 und 1 enthalten. In der Tat, die Menge $\mathfrak{G}'$ aller Linearkombinationen

$$a = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_i g_i$$

der Punkte von $\mathfrak{G}$ ist nichts anderes, als die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen; ist sodann $a = \{u_k\}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{A}_1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so schalte man zwischen $-D(a)$ und $D(a)$ endlich viele Zahlen.

$$-D(a) = r_0 < r_1 < \cdots \quad < r_{j-1} < r_j = D(a)$$

ein, so daß

$$r_h - r_{h-1} < \varepsilon \quad (h = 1, 2, \ldots, j)$$

und verstehe unter u'_k die dem u_k unmittelbar vorangehende Zahl r_h. Für $a' = \{u'_k\}$ ist dann:

$$D(a - a') < \varepsilon,$$

also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_1$.

Wir führen noch folgende Bezeichnung ein: ist $\mathfrak{M}$ irgend eine Menge natürlicher Zahlen, bestehend aus den Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots$, so setzen wir:

$$\sum_{\mathfrak{M}} v_k = v_{k_1} + v_{k_2} + \cdots + v_{k_l} + \cdots$$

Aus Satz III erhalten wir nun unmittelbar:

V*b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_1$. Damit die in $\mathfrak{A}_1$ beschränkte Operationsfolge

$$U(a, b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k \tag{21}$$

auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_1$, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Menge $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen ein endlicher Grenzwert existiere:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\mathfrak{M}} v_{nk}. \tag{22}$$

Wie wir schon in § 1 sahen, ist für jedes b aus $\mathfrak{B}_1$:

$$U(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, u_k \tag{23}$$

stetig in $\mathfrak{A}_1$. Also ergibt Satz IV:

V*c*. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{A}_1$ Damit für die in $\mathfrak{A}_1$ konvergente Operationsfolge (21 in ganz $\mathfrak{A}_1$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, u_k, \tag{24}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jede Menge $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\mathfrak{M}} v_{n\,k} = \sum_{\mathfrak{M}} v_k. \tag{25}$$

Satz V*b* und V*c* können umgeformt werden vermöge des Satzes:

VI. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_1$. Damit für jede Menge $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen ein endlicher Grenzwert (22) existiere, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Bedingungen erfüllt seien:

1. für jedes k existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$;

2. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0, so daß:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |v_{n,k}| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n. \tag{26}$$

Die Bedingungen sind hinreichend: sei in der Tat $\mathfrak{M}$ eine Menge natürlicher Zahlen und sei $\mathfrak{M}'$ die Menge derjenigen Zahlen aus $\mathfrak{M}$ die $< k_0$ sind, $\mathfrak{M}''$ die Menge der übrigen Zahlen von $\mathfrak{M}$. Wegen 1. existiert dann ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{\mathfrak{M}} v_{n\,k}$, und es gibt somit ein n_0, so daß:

$$\left| \sum_{\mathfrak{M}'} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{M}'} v_{n',k} \right| < \varepsilon \text{ für } n \geqq n_0, \quad n' \geqq n_0.$$

Wegen 2. ist

$$\left| \sum_{\mathfrak{M}''} v_{n,k} \right| \leqq \varepsilon \text{ für alle } n.$$

Also ist:

$$\left| \sum_{\mathfrak{M}} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{M}} v_{n',k} \right| < 3\,\varepsilon \text{ für } n \geqq n_0,\ n' \geqq n_0,$$

das heißt: es existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{\mathfrak{M}} v_{n,k}$.

Die Bedingungen sind notwendig. Für 1. ersieht man es, indem man unter $\mathfrak{M}$ die Menge natürlicher Zahlen versteht, die nur aus der Zahl k besteht. Den Beweis, daß auch 2. notwendig ist, führen wir indirekt, indem wir annehmen, es sei 1. erfüllt, 2. aber nicht, und zeigen, daß es dann eine Menge $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen gibt, für die kein endlicher Grenzwert (22) existiert.

Ist 2. nicht erfüllt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ von folgender Eigenschaft: wie groß N und K auch gewählt seien, es gibt ein $n_0 > N$ und ein l, so daß:

$$\sum_{k=K}^{K+l} |v_{n_0,k}| > \varepsilon. \tag{27}$$

In der Tat, andernfalls gäbe es zu jedem ε ein N und ein K, so daß:

$$\sum_{k=K}^{K+l} |v_{n,k}| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n > N \text{ und alle } l.$$

Durch den Grenzübergang $l \to \infty$ folgt daraus:

$$\sum_{k=K}^{\infty} |v_{n,k}| \leqq \varepsilon \qquad \text{für alle } n > N. \tag{28}$$

Da jede Folge $\{v_{n,k}\}$ zu $\mathfrak{B}_1$ gehört, sind alle Summen $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}|$ endlich; es gibt also ein K', so daß:

$$\sum_{k=K'}^{\infty} |v_{n,k}| \leqq \varepsilon \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots, N. \tag{29}$$

Bezeichnet k_0 die größere der beiden Zahlen K und K', so wäre also, wegen (28) und (29) auch (26) erfüllt, d. h. es würde Bedingung 2. gelten, gegen die Annahme.

Daraus schließen wir weiter: wie groß N und K auch gewählt seien, es gibt ein $n_0 > N$ und eine endliche Menge $\mathfrak{M}$ von Zahlen, $\geqq K$, so daß:

$$\Big| \sum_{\mathfrak{M}} v_{n_0,k} \Big| > \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30}$$

In der Tat, wegen (27) muß, sei es für die Menge jener k, die in (27) positive Summanden $v_{n_0 k}$ liefern, sei es für die, welche negative $v_{n_0,k}$ liefern, auch (30) erfüllt sein.

Wir gehen aus von einem beliebigen Index n_1 und einer beliebigen Menge $\mathfrak{M}_1$ natürlicher Zahlen, für die wir — wegen der Gleichförmigkeit mit dem Folgenden — auch die Bezeichnung $\mathfrak{S}_1$ einführen. Weil $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n_1,k}|$ endlich, gibt es ein k_1, größer als alle Zahlen von $\mathfrak{S}_1$ und so groß, daß

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} |v_{n_1,k}| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Ferner gibt es wegen Bedingung 1. ein $N_1 > n_1$, so daß:

$$\Big| \sum_{\mathfrak{S}_1} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{S}_1} v_{n',k} \Big| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{für } n \geqq N_1, \; n' \geqq N_1.$$

Und wieder gibt es ein $K_1 > k_1$, so daß:

$$\sum_{k=K_1}^{\infty} |v_{N_1,k}| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Wie wir gesehen haben, gibt es ein $n_2 > N_1$ und eine endliche Menge $\mathfrak{M}_2$ natürlicher Zahlen, die sämtlich $\geqq K_1$ sind (mithin auch größer als alle Zahlen von $\mathfrak{M}_1$), so daß:

$$\left|\sum_{\mathfrak{M}_2} v_{n_2,k}\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen:

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_2.$$

Zu diesem n_2 gibt es wieder ein $k_2 > K_2$ und größer als alle Zahlen von $\mathfrak{S}_2$, so daß

$$\sum_{k=k_2}^{\infty} |v_{n_2,k}| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Ferner ein $N_2 > n_2$, so daß

$$\left|\sum_{\mathfrak{S}_2} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{S}_2} v_{n',k}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{für } n \geqq N_2,\ n' \geqq N_2,$$

und sodann ein $K_2 > k_2$, so daß

$$\sum_{k=K_2}^{\infty} |v_{N_2,k}| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Indem wir so weiter schließen, sehen wir: es gibt zwei Folgen von Indizes:

$$n_1 < N_1 < n_2 < N_2 < \ldots < n_i < N_i < \ldots$$
$$k_1 < K_1 < k_2 < K_2 < \ldots < k_i < K_i < \ldots$$

und eine Folge von endlichen Mengen natürlicher Zahlen $\{\mathfrak{M}_i\}$, von folgenden Eigenschaften: Setzt man:

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_i,$$

so ist $\mathfrak{M}_{i+1}$ fremd zu $\mathfrak{S}_i$. Für $j > i$ enthält $\mathfrak{M}_j$ nur Zahlen $\geqq K_i$. Es ist:

$$\sum_{k=k_i}^{\infty} |v_{n_i,k}| < \frac{\varepsilon}{12}; \quad \sum_{k=K_i}^{\infty} |v_{N_i,k}| < \frac{\varepsilon}{12}. \tag{31}$$

$$\left|\sum_{\mathfrak{S}_i} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{S}_i} v_{n',k}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{für } n \geqq N_i,\ n' \geqq N_i. \tag{32}$$

$$\left|\sum_{\mathfrak{M}_i} v_{n_i,k}\right| > \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

Nun bilden wir die Menge:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_j + \ldots.$$

und setzen:

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{S}_i = \mathfrak{R}_i.$$

Dann ist:

$$\begin{gathered}\left|\sum_{\mathfrak{M}} v_{N_{i-1},k} - \sum_{\mathfrak{M}} v_{n_i,k}\right| \geqq \left|\sum_{\mathfrak{M}_i} v_{n_i,k}\right| - \\ - \left|\sum_{\mathfrak{S}_{i-1}} v_{N_{i-1},k} - \sum_{\mathfrak{S}_{i-1}} v_{n_i,k}\right| - \left|\sum_{\mathfrak{R}_{i-1}} v_{N_{i-1},k}\right| - \left|\sum_{\mathfrak{R}_i} v_{n_i,k}\right|.\end{gathered} \tag{34}$$

Hierin ist nach (32):

$$\left|\sum_{\mathfrak{S}_{i-1}} v_{N_{i-1},k} - \sum_{\mathfrak{S}_{i-1}} v_{n_i,k}\right| < \frac{\varepsilon}{12};$$

und da $\mathfrak{R}_{i-1}$ nur Zahlen $\geqq K_{i-1}$, und $\mathfrak{R}_i$ nur Zahlen $\geqq K_i > k_i$ enthält, ist nach (31):

$$\left|\sum_{\mathfrak{R}_{i-1}} v_{N_{i-1},k}\right| < \frac{\varepsilon}{12}; \qquad \left|\sum_{\mathfrak{R}_i} v_{n_i,k}\right| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Zusammen mit (33) also ergibt (34):

$$\left|\sum_{\mathfrak{M}} v_{N_{i-1},k} - \sum_{\mathfrak{M}} v_{n_i,k}\right| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Also kann kein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{\mathfrak{M}} v_{n,k}$ vorhanden sein. Damit ist der Beweis von Satz VI beendet.

Bemerken wir noch, daß, wenn die $v_{n,k}$ den beiden Bedingungen von Satz VI genügen, die Folge der Zahlen

$$\Delta(b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}|$$

beschränkt ist, und somit nach Satz Va die Operationsfolge $U(a, b_n)$ in $\mathfrak{A}$ beschränkt ist. In der Tat, wegen der Existenz endlicher Grenzwerte $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$ für $k = 1, 2, \ldots, k_0 - 1$ gibt es ein A, so daß:

$$|v_{n,k}| < A \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, k_0 - 1 \text{ und alle } n.$$

Wegen Bedingung 2. von Satz VI ist also:

$$\Delta(b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}| < (k_0 - 1) A + \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

Wir können nun statt Satz Vb den Satz aussprechen: [10])

VIIb. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_1$. Damit die Folge der Operationen (21) konvergent sei in $\mathfrak{A}_1$, ist notwendig und hinreichend, daß die $v_{n,k}$ den Bedingungen von Satz VI genügen.

Nun können wir Satz Vc noch ersetzen durch:

VIIc. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_1$. Damit für die in $\mathfrak{A}_1$ konvergente Operationsfolge (21) in ganz $\mathfrak{A}_1$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k \text{ für alle } k. \tag{35}$$

Die Bedingung ist notwendig; dies ist trivial.

Die Bedingung ist hinreichend; es genügt nachzuweisen, daß Bedingung (25) von Satz Vc erfüllt ist. Sei zu dem Zwecke $\mathfrak{M}'$ die Menge aller Zahlen von $\mathfrak{M}$ die $< k_0$ sind, $\mathfrak{M}''$ die aller übrigen Zahlen von $\mathfrak{M}$. Wegen Bedingung 2. von Satz VI und wegen der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$ kann k_0 so gewählt werden, daß:

$$\Big|\sum_{\mathfrak{M}''} v_k\Big| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \Big|\sum_{\mathfrak{M}''} v_{n,k}\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n.$$

Ferner ist wegen (35):

$$\Big|\sum_{\mathfrak{M}'} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{M}'} v_k\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für fast alle } n.$$

Wegen:

$$\Big|\sum_{\mathfrak{M}} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{M}} v_k\Big| \leqq \Big|\sum_{\mathfrak{M}'} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{M}'} v_k\Big| + \Big|\sum_{\mathfrak{M}''} v_{n,k}\Big| + \Big|\sum_{\mathfrak{M}''} v_k\Big|$$

ist also:

$$\Big|\sum_{\mathfrak{M}} v_{n,k} - \sum_{\mathfrak{M}} v_k\Big| < \varepsilon \text{ für fast alle } n,$$

womit (25) bewiesen ist.

---

[10]) J. Schur l. c. [1]), S. 82, Satz III.

§ 5. Lineare Transformationen konvergenter Zahlenfolgen.

2. Der Raum $\mathfrak{A}_2$. Es bestehe nunmehr der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen reeller Zahlen $\{u_k\}$, die einen endlichen Grenzwert besitzen:

$$\lim_{k=\infty} u_k = u.$$

Wie in § 4 sei die Maßfunktion gegeben durch:

$$D(a) = \text{obere Schranke von } |u_k| \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_2$.

Sei $a_\nu = \{u_{\nu,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{A}_2$, und sei:

$$\lim_{k=\infty} u_{\nu,k} = u^{(\nu)}.$$

Ist $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Punktfolge, so existieren, wie wir in § 4 sahen, endliche Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty} u_{\nu,k} = u_k,$$

und hiebei ist die Konvergenz gleichmäßig in k. Daraus folgt bekanntlich die Existenz eines endlichen Grenzwertes:

$$\lim_{\nu=\infty} u^{(\nu)} = u$$

und das Bestehen von:

$$\lim_{k=\infty} u_k = u.$$

Setzen wir also $\{u_k\} = a$, so ist auch a Punkt von $\mathfrak{A}_2$, und es ist $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$. Also ist $\mathfrak{A}_2$ vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_2$ nehmen wir auch hier die Menge aller Folgen $\{v_k\}$, für die $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k|$ endlich ist.

Setzen wir:

$$u_k = \operatorname{sgn} v_k \quad \text{für} \quad k \leqq k_0; \quad u_k = 0 \quad \text{für} \quad k > k_0,$$

so gehört $\{u_k\} = a$ zu $\mathfrak{A}_2$, und es wird:

$$D(a) = 1; \quad U(a, b) = \sum_{k=1}^{k_0} |v_k|.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben und k_0 hinlänglich groß, so ist also:

$$U(a, b) > \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| - \varepsilon.$$

Also ist auch hier die polare Maßbestimmung gegeben durch:

$$\Delta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|.$$

Aus Satz I entnehmen wir daher:

VIII*a*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_2$. Damit die Operationsfolge:

$$U(a, b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_2$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}| \leqq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_2$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen für irgend ein $k_0 (= 1, 2, \ldots)$:

$$u_k = 0 \quad \text{für } k < k_0$$
$$u_k = 1 \quad \text{für } k \geqq k_0.$$

In der Tat, die Menge $\mathfrak{G}'$ aller Linearkombinationen der Punkte von $\mathfrak{G}$ ist nichts anderes, als die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen fast alle u_k gleich sind; ist sodann $a = \{u_k\}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{A}_2$, und ist $\lim\limits_{k=\infty} u_k = u$, so schalte man zwischen $-D(a) - \varepsilon$ und $D(a) + \varepsilon$ endlich viele Zahlen

$$-D(a) - \varepsilon = z_0 < z_1 < \cdots < z_{j-1} < z_j = D(a) + \varepsilon;$$
$$z_h - z_{h-1} < \varepsilon \quad (h = 1, 2, \ldots, j); \qquad z_h \neq u \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, j)$$

ein und verstehe unter u'_k die dem u_k unmittelbar vorangehende Zahl z_h. Dann sind fast alle u'_k einander gleich und für $a' = \{u'_k\}$ wird $D(a - a') < \varepsilon$. Aus Satz III entnehmen wir daher[11]):

VIII*b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_2$. Damit die in $\mathfrak{A}_2$ beschränkte Operationsfolge (36) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_2$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $k_0 (= 1, 2, \ldots)$ ein endlicher Grenzwert existiere:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} v_{n,k}.$$

[11]) J. Schur l. c.[1]), S. 82, Satz I; T. Kojima, Tohaku Journ. 12 (1917), S. 297, Theorem I.

Bedeutet $b = \{v_k\}$ einen Punkt aus $\mathfrak{B}_2$, so ist, wie wir wissen, der Ausdruck $U(a, b)$ stetig in $\mathfrak{A}_2$; sind $a = \{u_k\}$ und $a' = \{u'_k\}$ zwei Punkte von $\mathfrak{A}_2$, für die $D(a - a') \leqq \varepsilon$, so ist auch

$$\left| \lim_{k=\infty} u_k - \lim_{k=\infty} u'_k \right| \leqq \varepsilon,$$

d. h. es ist auch $\lim\limits_{k=\infty} u_k$ eine in $\mathfrak{A}_2$ stetige Funktion von a. Wir entnehmen daher aus Satz IV:

VIII*c*. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_2$, und sei v eine beliebige Zahl. Damit für die in $\mathfrak{A}_2$ konvergente Operationsfolge (36) in ganz $\mathfrak{A}_2$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k + v \cdot \lim_{k=\infty} u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $k_0 (= 1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} v_{n,k} = v + \sum_{k=k_0}^{\infty} v_k.$$

In diesem Satze sind eine Reihe bekannter Resultate als Spezialfälle enthalten[12]).

3. Der Raum $\mathfrak{A}_3$. Es bestehe nunmehr der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen reeller Zahlen $\{u_k\}$ mit $\lim\limits_{k=\infty} u_k = 0$. Die Definition von $D(a)$ bleibe dieselbe, wie in $\mathfrak{A}_2$. Dann ist auch $\mathfrak{A}_3$ vollständig. Als polaren Raum nehmen wir wieder die Menge aller Folgen $\{v_n\}$, für die $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k|$ endlich ist. Die polare Maßbestimmung ist dann auch hier gegeben durch:

$$\Delta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|.$$

Aus Satz I entnehmen wir daher:

IX*a*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_3$. Damit die Operationsfolge

$$U(a, b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

---

[12]) J. Schur l. c. [1]), S. 82, Satz I, Gleichung (5); sind alle $v_k = 0$, so erhält man Theorem IV von T. Kojima l. c. [11]), S. 299; ist außerdem $v = 1$, so erhält man den Satz von O. Toeplitz, Prace mat.-fiz. 22 (1911), S. 113.

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_3$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}| \leq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_3$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen ein Glied $= 1$, alle übrigen $= 0$ sind. In der Tat, die Menge $\mathfrak{G}'$ aller Linearkombinationen der Punkte von $\mathfrak{G}$ besteht dann aus allen Folgen $\{u_k\}$, in denen fast alle $u_k = 0$ sind. Sei $a = \{u_k\}$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{A}_3$. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein k_0, so daß $|u_k| < \varepsilon$ für $k > k_0$. Ist $u'_k = u_k$ für $k \leq k_0$ und $u'_k = 0$ für $k > k_0$, so gehört $a' = \{u'_k\}$ zu $\mathfrak{G}'$ und es ist $D(a - a') < \varepsilon$. Also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_3$. Aus Satz III entnehmen wir daher[13]:

IX*b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_3$. Damit die in $\mathfrak{A}_3$ beschränkte Operationsfolge (37) konvergent sei in $\mathfrak{A}_3$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$ existiere.

Und aus Satz IV ergibt sich:

IX*c*. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_3$. Damit für die in $\mathfrak{A}_3$ konvergente Operationsfolge (37) in ganz $\mathfrak{A}_3$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 6. Lineare Transformationen von Zahlenfolgen endlicher Variation.

Wir bezeichnen als Variation einer Zahlenfolge $a = \{u_k\}$ den Ausdruck:

$$V(a) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k - u_{k+1}|, \tag{38}$$

und sagen, die Folge ist von endlicher Variation, wenn $V(a)$ endlich ist. Offenbar gilt:

$$V(\lambda a) = |\lambda| \,.\, V(a); \quad V(a + a') \leq V(a) + V(a').$$

Ist also a von endlicher Variation, so auch λa, sind a und a' von endlicher Variation, so auch $a + a'$.

[13]) T. Kojima l. c. [11]), Theorem II, S. 298.

Jede Folge $\{u_k\}$ endlicher Variation hat einen endlichen Grenzwert. Denn aus der Konvergenz der unendlichen Reihe in (38) folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k - u_{k+1})$, d. h. die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim_{k=\infty}(u_1 - u_k)$ mithin auch die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim_{k=\infty} u_k$.

4. Der Raum $\mathfrak{A}_4$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen $\{u_k\}$ endlicher Variation, und die Maßbestimmung sei, wenn $\lim_{k=\infty} u_k = u$ gesetzt wird, gegeben durch:

$$D(a) = V(a) + |u|.$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_4$.

Sei $a_\nu = \{u_{\nu,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{A}_4$ mit

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} a_\nu = a = \{u_k\}. \tag{39}$$

Setzen wir noch:

$$\lim_{k=\infty} u_{\nu,k} = u^{(\nu)}, \qquad \lim_{k=\infty} u_k = u,$$

so besagt (39) so viel, wie die folgenden Relationen:

$$\lim_{\nu=\infty} V(a_\nu - a) = 0; \qquad \lim_{\nu=\infty} u^{(\nu)} = u; \tag{40}$$

und da:

$$|u_{\nu,k} - u_k| \leqq |(u_{\nu,k} - u_k) - (u^{(\nu)} - u)| + |u^{(\nu)} - u| \tag{41}$$

und:

$$|(u_{\nu,k} - u_k) - (u^{(\nu)} - u)| = \left|\sum_{\lambda=k}^{\infty}\left\{(u_{\nu,\lambda} - u_\lambda) - (u_{\nu,\lambda+1} - u_{\lambda+1})\right\}\right|$$
$$\leqq V(a_\nu - a),$$

folgt aus (40) und (41):

$$\lim_{\nu=\infty} u_{\nu,k} = u_k.$$

Sei sodann $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Punktfolge aus $\mathfrak{A}_4$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es somit ein ν_0, so daß

$$D(a_\nu - a_{\nu'}) < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0.$$

Daraus folgt:

$$V(a_\nu - a_{\nu'}) < \varepsilon; \quad |u^{(\nu)} - u^{(\nu')}| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0. \tag{42}$$

Und da:

$$|u_{\nu,k} - u_{\nu',k}| \leqq |(u_{\nu,k} - u_{\nu',k}) - (u^{(\nu)} - u^{(\nu')})| + |u^{(\nu)} - u^{(\nu')}|$$

und wie vorhin:

$$|(u_{\nu,k} - u_{\nu',k}) - (u^{(\nu)} - u^{(\nu')})| \leqq V(a_\nu - a_{\nu'}),$$

folgt sofort:

$$|u_{\nu,k} - u_{\nu',k}| < 2\varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0 .$$

Also existiert für jedes k ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} u_{\nu,k} = u_k . \tag{43}$$

Wir setzen $\{u_k\} = a$. Aus der ersten Ungleichung (42) folgt:

$$\sum_{k=1}^{K} |(u_{\nu,k} - u_{\nu',k}) - (u_{\nu,k+1} - u_{\nu',k+1})| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0 ;$$

daraus durch den Grenzübergang $\nu' \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{K} |(u_{\nu,k} - u_k) - (u_{\nu,k+1} - u_{k+1})| \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0 ,$$

daraus durch den Grenzübergang $K \to \infty$:

$$V(a_\nu - a) \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0 , \tag{44}$$

und da:

$$V(a) \leqq V(a_\nu) + V(a - a_\nu),$$

gehört a zu $\mathfrak{A}_4$. Sei

$$u = \lim_{k=\infty} u_k .$$

Aus (44) folgt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} (u_{\nu,k} - u_k) - (u_{\nu,k+1} - u_{k+1})\right| = |(u_{\nu,1} - u_1) - (u^{(\nu)} - u)| \leqq \varepsilon .$$

Da hierin wegen (43):

$$|u_{\nu,1} - u_1| < \varepsilon \quad \text{für fast alle } \nu,$$

so ist auch:

$$|u^{(\nu)} - u| < 2\varepsilon \quad \text{für fast alle } \nu . \tag{45}$$

Aus (44) und (45) aber folgt:

$$D(a_\nu - a) < 3\varepsilon \quad \text{für fast alle } \nu;$$

d. h. es ist $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$, und der Raum $\mathfrak{A}_4$ ist somit vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_4$ können wir nehmen die Menge aller Folgen $b = \{v_k\}$, für die die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ konvergent ist. In der Tat ist bekanntlich, wenn $a = \{u_k\}$ zu $\mathfrak{A}_4$ und $b = \{v_k\}$ zu $\mathfrak{B}_4$ gehört, die Reihe

$$U(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k$$

konvergent. Setzen wir:

$$s_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k,$$

so ist die Folge $\{s_k\}$ beschränkt. Aus der bekannten Umformung:

$$\sum_{k=1}^{K} u_k v_k = \sum_{k=1}^{K-1} s^k (u_k - u_{k+1}) + s_K u_K$$

folgern wir durch den Grenzübergang $K \to \infty$, wenn mit S die obere Schranke der $|s_k|$ bezeichnet und $\lim_{k=\infty} u_k = u$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$|U(a, b)| \leqq S\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k - u_{k+1}| + |u|\Big) = S \,.\, D(a).$$

Setzen wir:

$$u_k = 1 \text{ für } k \leqq K, \quad u_k = 0 \text{ für } k > K,$$

so ist:

$$D(a) = 1; \quad U(a, b) = s_K.$$

Zufolge der Schlußbemerkung von § 1 ist also die polare Maßbestimmung gegeben durch:

$$\Delta(b) = \text{obere Schranke der } |v_1 + v_2 + \cdots + v_k|.$$

Aus Satz I entnehmen wir daher:

Xa. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_4$. Damit die Operationsfolge:

$$U(a, b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{46}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_4$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß:

$$|v_{n,1}+v_{n,2}+\cdots+v_{n,k}|\leqq M \quad \text{für alle } n \text{ und alle } k. \tag{47}$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_4$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen für irgend ein k_0 $(=1, 2, \ldots)$:

$$u_k=0 \quad \text{für} \quad k<k_0; \quad u_k=1 \quad \text{für} \quad k\geqq k_0.$$

Denn die Menge $\mathfrak{G}'$ aller Linearkombinationen der Punkte von $\mathfrak{G}$ ist dann die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen fast alle u_k gleich sind; ist sodann $a=\{u_k\}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{A}_4$, so wähle man zunächst k_0 so groß, daß (wenn $\lim\limits_{k=\infty} u_k=u$):

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}|u_k-u_{k+1}|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |u_{k_0}-u|<\frac{\varepsilon}{3};$$

sodann u'_k für $k\leqq k_0$ so, daß:

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}|(u_k-u'_k)-(u_{k+1}-u'_{k+1})|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ und } |u'_{k_0}-u|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Setzt man dann $u'_k=u'_{k_0}$ für $k>k_0$, so gehört $a'=\{u'_k\}$ zu $\mathfrak{G}'$, und es ist

$$D(a-a')=\sum_{k=1}^{k_0-1}|(u_k-u'_k)-(u_{k+1}-u'_{k+1})|+\sum_{k=k_0}^{\infty}|u_k-u_{k+1}|+ \\ +|u-u'_{k_0}|<\varepsilon.$$

Also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_4$. Aus Satz III entnehmen wir daher:

X*b*. Sei $b_n=\{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_4$. Damit die in $\mathfrak{A}_4$ beschränkte Operationsfolge (46) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_4$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k_0 $(=1, 2, \ldots)$ ein endlicher Grenzwert existiere:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=k_0}^{\infty}v_{n,k}.$$

Sei $b=\{v_k\}$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}_4$ und v eine beliebige Zahl. Dann ist

$$V(a,b)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k u_k+v\cdot\lim_{k=\infty}u_k$$

eine in $\mathfrak{A}_4$ stetige Funktion von a. Also entnehmen wir aus Satz IV den Satz[14]):

Xc. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_4$, und sei v eine beliebige Zahl. Damit für die in $\mathfrak{A}_4$ konvergente Operationsfolge (46) in ganz $\mathfrak{A}_4$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k + v \cdot \lim_{k=\infty} u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $k_0\ (=1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=k_0}^{\infty} v_{n,k} = v + \sum_{k=k_0}^{\infty} v_k.$$

5. Der Raum $\mathfrak{A}_5$. Es bestehe nunmehr der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen $\{u_k\}$ endlicher Variation mit $\lim\limits_{k=\infty} u_k = 0$. Die Maßbestimmung sei gegeben durch:

$$D(a) = V(a).$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_5$. Die beim Raume $\mathfrak{A}_4$ angestellten Betrachtungen zeigen, daß auch $\mathfrak{A}_5$ vollständig ist.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_5$ können wir hier nehmen die Menge aller Folgen $\{v_k\}$, für die die Folge der Teilsummen:

$$s_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

beschränkt ist. In der Tat ist dann bekanntlich für jedes $\{u_k\}$ aus $\mathfrak{A}_5$ und jedes $\{v_k\}$ aus $\mathfrak{B}_5$ die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ konvergent. Wie in $\mathfrak{B}_4$ erhalten wir als polare Maßbestimmung

$$\Delta(b) = \text{obere Schranke der } |s_k|.$$

Aus Satz I entnehmen wir daher:

XIa. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_5$. Damit die Operationsfolge (46) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_5$, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl M, für die (47) gilt.

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_5$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen ein Glied $=1$, alle übrigen $=0$ sind.

---

[14]) Für $v_k = 0\ (k = 1, 2, \ldots)$ und $v = 1$ ist er das Seitenstück zum Satze von Toeplitz (l. c. [12])) bei Beschränkung auf Folgen endlicher Variation.

Die Menge $\mathfrak{G}'$ aller Linearkombinationen der Punkte von $\mathfrak{G}$ besteht dann aus allen Folgen $\{u_k\}$, in denen fast alle $u_k = 0$ sind, und wie bei $\mathfrak{A}_4$ erkennt man, daß $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_5$ ist. Aus Satz III entnehmen wir daher:

XI*b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_5$. Damit die in $\mathfrak{A}_5$ beschränkte Operationsfolge (46) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_5$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$ existiere.

Sei $b = \{v_k\}$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}_5$, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k u_k$ stetig in $\mathfrak{A}_5$, also folgt aus Satz IV:

XI*c*. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_5$. Damit für die in $\mathfrak{A}_5$ beschränkte Operationsfolge (46) in ganz $\mathfrak{A}_5$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k:

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k.$$

§ 7. Lineare Transformationen unendlicher Reihen.

6. Der Raum $\mathfrak{A}_6$. Nunmehr bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen reeller Zahlen $a = \{u_k\}$, für die:

$$D(a) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \tag{48}$$

endlich ist, d. h. aus allen absolut-konvergenten unendlichen Reihen. Die Maßbestimmung sei gegeben durch (48). Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_6$.

Ist $a_\nu = \{u_{\nu,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{A}_6$, so bedeutet

$$\mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

soviel wie:

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{\nu,k} - u_k| = 0. \tag{49}$$

Sei nun $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Punktfolge aus $\mathfrak{A}_6$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein ν_0, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{\nu,k} - u_{\nu',k}| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0, \ \nu' \geqq \nu_0, \tag{50}$$

mithin erst recht:

$$|u_{\nu,k} - u_{\nu',k}| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0, \ \nu' \geqq \nu_0.$$

Also existieren endliche Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty} u_{\nu,k} = u_k.$$

Aus (50) folgt zunächst für jedes K:

$$\sum_{k=1}^{K} |u_{\nu,k} - u'_{\nu,k}| \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0, \nu' \geqq \nu_0.$$

Daraus durch den Grenzübergang $\nu' \longrightarrow \infty$:

$$\sum_{k=1}^{K} |u_{\nu,k} - u_k| \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,$$

daraus durch den Grenzübergang $K \longrightarrow \infty$ die Gleichung (49). Aus dieser folgt nun wegen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |u_{\nu,k}| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{\nu,k} - u_k|$$

zunächst, daß $\{u_k\}$ zu $\mathfrak{A}_6$ gehört, sodann daß $\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}} a_\nu = a$. Also ist $\mathfrak{A}_6$ vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_6$ können wir die Menge aller beschränkten Folgen $b = \{v_k\}$ nehmen. Für jedes a aus $\mathfrak{A}_6$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_6$ hat dann die Fundamentaloperation $U(a, b)$ einen Sinn, und es ist:

$$U(a, b) \leqq V. \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|,$$

wenn V die obere Schranke der $|v_k|$ bedeutet. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein v_{k_0}, so daß:

$$|v_{k_0}| > V - \varepsilon.$$

Setzen wir nun:

$$u_{k_0} = 1, \quad u_k = 0 \quad \text{für } k \neq k_0,$$

so ist für diese Folge $a = \{u_k\}$:

$$D(a) = 1; \quad |U(a, b)| > V - \varepsilon$$

also ist durch V die polare Maßbestimmung gegeben, d. h.:

$$\Delta(b) = \text{obere Schranke der } |v_k|.$$

Aus Satz I entnehmen wir daher:

XII *a*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_6$. Damit die Operationsfolge:

$$U(a, b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k \tag{51}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_6$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$|v_{n,k}| \leqq M \quad \text{für alle } n \text{ und } k.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_6$ wird gebildet durch diejenigen Folgen $\{u_k\}$, in denen nur ein Glied $= 1$, alle anderen $= 0$ sind. Das zugehörige $\mathfrak{G}'$ ist die Menge aller Folgen, in denen fast alle Glieder $= 0$ sind. Bezeichnen wir mit a_ν diejenige Folge $\{u'_k\}$, in der

$$u'_k = u_k \quad \text{für } k < \nu; \quad u'_k = 0 \quad \text{für } k \geqq \nu,$$

so ist:

$$D(a - a_\nu) = \sum_{k=\nu}^{\infty} |u_k|,$$

also ist $\lim\limits_{\nu=\infty} D(a - a_\nu) = 0$, d. h. $\mathfrak{G}'$ ist dicht in $\mathfrak{A}_6$. Aus Satz III entnehmen wir daher:

XII *b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_6$. Damit die in $\mathfrak{A}_6$ beschränkte Operationsfolge (51) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_6$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$ vorhanden sei.

Da endlich für jedes b aus $\mathfrak{B}_6$ die Operation $U(a, b)$ stetig in $\mathfrak{A}_6$ ist, folgt aus Satz IV:

XII *c*. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_6$. Damit für die in $\mathfrak{A}_6$ konvergente Operationsfolge (51) in ganz $\mathfrak{A}_6$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k \quad \text{für alle } k.$$

7. Der Raum $\mathfrak{A}_7$. Nunmehr bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen reeller Zahlen $a = \{u_k\}$, für die:

$$D(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1) \tag{52}$$

endlich ist. Die Maßbestimmung sei gegeben durch (52). Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_7$. Ist $a_\nu \doteq \{u_{\nu,k}\}$, so bedeutet $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ soviel wie:

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{\nu,k} - u_k|^p = 0.$$

Analog wie bei $\mathfrak{A}_6$ wird nachgewiesen, daß $\mathfrak{A}_7$ vollständig ist.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_7$ können wir die Menge aller Folgen $b = \{v_k\}$ wählen, für die:

$$\Delta(b) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{53}$$

endlich ausfällt. Wegen der bekannten Ungleichung:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k\right| \leqq D(a) \cdot \Delta(b)$$

hat dann für jedes a aus $\mathfrak{A}_7$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_7$ die Fundamentaloperation $U(a, b)$ einen Sinn. Setzen wir:

$$u_k = \operatorname{sgn} v_k \frac{|v_k|^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

so wird:

$$D(a) = 1; \quad U(a, b) = \Delta(b);$$

also ist durch (53) die polare Maßbestimmung gegeben. Aus Satz I entnehmen wir daher:

XIII*a*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_7$. Damit die Operationsfolge (51) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_7$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k}|^{\frac{p}{p-1}} \leqq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_7$ wird auch hier gebildet durch die Folgen $\{u_k\}$, in denen ein Glied $= 1$, alle übrigen $= 0$ sind; man erkennt das analog wie bei $\mathfrak{A}_6$. Also:

XIII b. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_7$. Damit die in $\mathfrak{A}_7$ beschränkte Operationsfolge (51) auch konvergent sei in $\mathfrak{B}_7$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$ existiert.

Wie wir wissen, ist für jedes b aus $\mathfrak{B}_7$ die Operation $U(a, b)$ stetig in $\mathfrak{A}_7$. Also:

XIII c. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte von $\mathfrak{B}_7$. Damit für die in $\mathfrak{A}_7$ konvergente Operationsfolge (51) in ganz $\mathfrak{A}_7$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, u_k,$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k \quad \text{für alle } n.$$

8. Der Raum $\mathfrak{A}_8$. Nunmehr bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen reeller Zahlen $u = \{u_k\}$, für die die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

konvergent ist. Die Teilsummen dieser unendlichen Reihe bezeichnen wir mit:

$$s_k = \sum_{\lambda=1}^{k} u_\lambda$$

und führen die Maßbestimmung ein:

$$D(a) = \text{obere Schranke der } |s_k|. \tag{54}$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_8$.

Ist $a_\nu = \{u_{\nu,k}\}$, so bedeutet $\mathop{\mathbf{L}}\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ soviel wie: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν_0, so daß

$$\Big|\sum_{\lambda=1}^{k} (u_{\nu,\lambda} - u_\lambda)\Big| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0 \text{ und alle } k.$$

Sei $\{u_\nu\}$ eine Cauchysche Punktfolge aus $\mathfrak{A}_8$. Wir setzen:

$$s_{\nu,k} = \sum_{\lambda=1}^{k} u_{\nu,\lambda}; \qquad s^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\nu,k}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν_0, so daß:

$$|s_{\nu,k} - s_{\nu',k}| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0 \text{ und alle } k. \tag{55}$$

Für jedes k existiert daher ein endlicher Grenzwert:

$$s_k = \lim_{\nu=\infty} s_{\nu,\,k}.$$

Wir setzen:

$$u_1 = s_1 = \lim_{\nu=\infty} u_{\nu,\,1}; \qquad u_k = s_k - s_{k-1} = \lim_{\nu=\infty} u_{\nu,\,k}\ (k > 1).$$

Aus (55) folgt durch den Grenzübergang $\nu' \to \infty$:

$$|s_{\nu,\,k} - s_k| \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0 \text{ und alle } k, \tag{56}$$

d. h. die Konvergenz der $s_{\nu,\,k}$ gegen die s_k ist gleichmäßig in k. Es folgt daher die Existenz eines endlichen Grenzwertes:

$$s = \lim_{\nu=\infty} s^{(\nu)}$$

und das Bestehen von:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{k=\infty} s_k = s.$$

Die Folge $a = \{u_k\}$ gehört daher zu $\mathfrak{A}_8$, und (56) besagt das Bestehen von $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$. Also ist $\mathfrak{A}_8$ **vollständig**.

Als **polaren Raum** $\mathfrak{B}_8$ wählen wir die Menge aller Folgen $b = \{v_k\}$ endlicher Variation (§ 6). Für jedes a aus $\mathfrak{A}_8$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_8$ hat dann $U(a, b)$ einen Sinn, und es ist, wenn $v = \lim_{k=\infty} v_k$ und

$$\Delta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}| + |v| = V(b) + |v|$$

gesetzt wird:

$$|U(a, b)| \leqq D(a) \cdot \Delta(b). \tag{57}$$

Wir wählen ferner, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, k_0 so groß, daß:

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} |v_k - v_{k+1}| > V(b) - \frac{\varepsilon}{2}; \qquad |v_{k_0}| > |v| - \frac{\varepsilon}{2},$$

und setzen:

$$\operatorname{sgn}\,(v_k - v_{k+1}) = \delta_k; \qquad \operatorname{sgn}\, v_k = \varepsilon_k;$$

$$u_1 = \delta_1; \qquad u_k = \delta_k - \delta_{k-1}\ (k = 2, 3, \ldots, k_0 - 1);$$

$$u_{k_0} = \varepsilon_{k_0} - \delta_{k_0-1}; \qquad u_k = 0\ (k > k_0).$$

Dann ist für $a = \{u_k\}$ offenbar $D(a) = 1$ und

$$U(a, b) = \delta_1 v_1 + \sum_{k=1}^{k_0-1} (\delta_k - \delta_{k-1}) v_k + (\varepsilon_{k_0} - \delta_{k_0-1}) v_{k_0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_{k_0}| > \Delta(b) - \varepsilon.$$

Also ist durch $\Delta(b)$ die polare Maßbestimmung gegeben, und wir haben:

XIV *a*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_8$. Damit die Operationsfolge (51) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_8$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k} - v_{n,k+1}| + |\lim_{k=\infty} v_{n,k}| \leqq M \text{ für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_8$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen nur ein $u_k = 1$, alle übrigen $= 0$ sind. In der Tat, die zugehörige Menge $\mathfrak{G}'$ besteht dann aus denjenigen Folgen $\{u'_k\}$, in denen fast alle Glieder $= 0$ sind; in der Folge der Teilsummen $\{s'_k\}$ aber haben dann fast alle Glieder denselben Wert; sei nun $a = \{u_k\}$ ein Punkt aus $\mathfrak{A}_8$ und $\{s_k\}$ die Folge der Teilsummen der u_k; wie wir bei Betrachtung des Raumes $\mathfrak{A}_2$ gesehen haben, gibt es dann eine Folge $\{s'_k\}$, in der fast alle Glieder gleich sind, und für die:

$$|s_k - s'_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } k.$$

Ist $a' = \{u'_k\}$ die Folge, deren Teilsummen die s'_k sind, so gehört $\{u'_k\}$ zu $\mathfrak{G}'$, und es ist $D(a - a') \leqq \varepsilon$, also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_8$. Wir haben daher den Satz [15]):

XIV *b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_8$. Damit die in $\mathfrak{A}_8$ beschränkte Operationsfolge (51) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_8$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes k ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$ existiert.

---

[15]) Er enthält als Spezialfall einen von J. Hadamard bewiesenen Satz: Acta Math. 27 (1913), S. 177. Vgl. hiezu J. Schur l. c. [1]), S. 104. Man hat zu setzen:

$$v_{n,k} = \gamma_k \quad \text{für } k \leqq n$$
$$v_{n,k} = 0 \quad \text{für } k > n.$$

Gehört $b = \{v_k\}$ zu $\mathfrak{B}_8$, so ist $U(a, b)$ stetig in $\mathfrak{A}_8$, also gilt:

XIV c. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_8$. Damit für die in $\mathfrak{A}_8$ konvergente Operationsfolge (51) in ganz $\mathfrak{A}_8$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k ,$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k \quad \text{für alle } k.$$

9. Der Raum $\mathfrak{A}_9$. Nunmehr bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Folgen reeller Zahlen $a = \{u_k\}$, für die die Folge der Teilsummen $\{s_k\}$ beschränkt ist. Die Maßbestimmung sei wieder gegeben durch (54). Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_9$. Die für $\mathfrak{A}_8$ durchgeführte Argumentation, die zu (56) führt, zeigt, daß auch $\mathfrak{A}_9$ vollständig ist.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_9$ wählen wir die Menge $b = \{v_k\}$ aller Folgen endlicher Variation mit

$$\lim_{k=\infty} v_k = 0 .$$

Für jedes a aus $\mathfrak{A}_9$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_9$ hat dann $U(a, b)$ einen Sinn, und es gilt, wenn

$$\Delta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} | v_k - v_{k+1} | = V(b) \tag{58}$$

gesetzt wird, wieder (57). Setzen wir:

$$\operatorname{sgn}(v_k - v_{k+1}) = \delta_k ;$$

$$u_1 = \delta_1 ; \quad u_k = \delta_k - \delta_{k-1} \quad (k > 1),$$

so ist für $a = \{u_k\}$:

$$D(a) = 1; \quad U(a, b) = \delta_1 v_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_k - \delta_{k-1}) v_k = \sum_{k=1}^{\infty} | v_k - v_{k+1} | = \Delta(b);$$

also ist durch (58) die polare Maßbestimmung gegeben. Wir haben daher den Satz:

XV a. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_9$. Damit die Operationsfolge (51) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_9$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\sum_{k=1}^{\infty} | v_{n,k} - v_{n,k+1} | \leq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_9$ wird gebildet durch die Menge aller Folgen $\{u_k\}$, in denen die Glieder, die $\neq 0$ sind, abwechselnd die Werte 1 und -1 haben. In der Tat, bildet man zu jeder solchen Folge $\{u_k\}$ die Folge der Teilsummen $\{s_k\}$, so erhält man die sämtlichen Folgen, in denen nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen. Die Menge aller Linearkombinationen endlich vieler $\{s_k\}$ ist also die Menge aller jener Folgen $\{s'_k\}$, in denen nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen; die zu $\mathfrak{G}$ gehörige Menge $\mathfrak{G}'$ ist also die Menge aller jener Folgen $\{u'_k\}$, deren Teilsummen s'_k nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Sei nun $a = \{u_k\}$ ein Punkt aus $\mathfrak{A}_9$ und $\{s_k\}$ die Folge der Teilsummen der u_k; wie wir bei Betrachtung des Raumes $\mathfrak{A}_1$ gesehen haben, gibt es dann eine Folge $\{s'_k\}$, in der es nur endlich viele verschiedene Zahlen gibt, und für die

$$|s_k - s'_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } k.$$

Für die zugehörige Folge $a' = \{u'_k\}$ aus $\mathfrak{G}'$ ist daher $D(a - a') \leqq \varepsilon$, also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_9$, und wir haben:

XV*b*. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_9$. Damit die in $\mathfrak{A}_9$ beschränkte Operationsfolge (51) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_9$, ist notwendig und hinreichend, daß für jede (endliche oder unendliche) Folge wachsender Indizes k_i ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \sum_i (-1)^{i-1} v_{n,k_i} \tag{59}$$

vorhanden sei.

Gehört $b = \{v_k\}$ zu $\mathfrak{B}_9$, so ist $U(a, b)$ stetig in $\mathfrak{A}_9$; also gilt:

XV*c*. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_k\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_9$. Damit für die in $\mathfrak{A}_9$ konvergente Operationsfolge (51) in ganz $\mathfrak{A}_9$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k, \tag{60}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jede (endliche oder unendliche) Folge wachsender Indizes n_i:

$$\lim_{n=\infty} \sum_i (-1)^{i-1} v_{n,k_i} = \sum_i (-1)^{i-1} v_{k_i}. \tag{61}$$

Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Indizes, die einer der Ungleichungen genügen:

$$k_{2i-1} \leqq k < k_{2i},$$

zu denen, wenn die Folge der k_i endlich ist und mit einem k von ungeradem Index, etwa k_{2j-1} endet, noch hinzukommt:

$$k \geqq k_{2j-1}.$$

Dann kann in (59) auch geschrieben werden:

$$\sum_i (-1)^{i-1} v_{n,k_i} = \sum_{\mathfrak{M}} (v_{n,k} - v_{n,k+1}). \tag{62}$$

Da $\{v_{n,k}\}$ zu $\mathfrak{B}_9$ gehört, ist $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k} - v_{n,k+1}|$ endlich, d. h. $\{v_{n,k} - v_{n,k+1}\}$ gehört zu $\mathfrak{B}_1$. Aus Satz VI können wir nun folgern:

XVI. Damit die Bedingung von Satz XV b erfüllt sei, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Bedingungen erfüllt seien:

1. Für jedes k existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} v_{n,k}$.

2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k_0, so daß:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |v_{n,k} - v_{n,k+1}| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

Bedingung 2. ergibt sich unmittelbar aus Satz VI. An Stelle von 1. ergibt sich aus Satz VI zunächst die Existenz eines endlichen Grenzwertes: $\lim\limits_{n=\infty} (v_{n,k} - v_{n,k+1})$, und somit auch: $\lim\limits_{n=\infty} (v_{n,k} - v_{n,k'})$ für jedes $k' > k$. Nun folgt aber aus 2. für jedes $k' \geqq k_0$ und jedes $K > k'$:

$$\sum_{n=k'}^{K} |v_{n,k} - v_{n,k+1}| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n;$$

hieraus durch den Grenzübergang $K \to \infty$, wenn man beachtet, daß $\{v_{n,k}\}$ zu $\mathfrak{B}_9$ gehört, also $\lim\limits_{k=\infty} v_{n,k} = 0$ ist:

$$|v_{n,k'}| \leqq \varepsilon \quad \text{für } k' \geqq k_0 \text{ und alle } n. \tag{63}$$

Existiert nun ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} (v_{n,k} - v_{n,k'})$, so gibt es ein n_0, so daß:

$$|(v_{n,k} - v_{n,k'}) - (v_{n',k} - v_{n',k'})| < \varepsilon \quad \text{für } n \geqq n_0,\ n' \geqq n_0.$$

Wegen (63) folgt daraus:

$$|v_{n,k} - v_{n',k}| < 3\varepsilon \quad \text{für } n \geqq n_0,\ n' \geqq n_0,$$

d. h. die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim_{n=\infty} v_{n,k}$. Damit ist Satz XVI bewiesen.

Wie beim Beweise von Satz VIIb sehen wir, daß wenn die $\{v_{n,k}\}$ den beiden Bedingungen von Satz XVI genügen, die Folge der Zahlen:

$$\Delta(b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_{n,k} - v_{n,k+1}|$$

beschränkt ist, und somit nach Satz XVa die Operationsfolge (51) beschränkt ist in $\mathfrak{A}_9$.

An Stelle von XVb erhalten wir daher den Satz:[16])

XVIIb. Sei $b_n = \{v_{n,k}\}$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_9$. Damit die Operationsfolge (51) konvergent sei in $\mathfrak{A}_9$, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen von Satz XVI erfüllt seien.

An Stelle von XVc erhalten wir:

XVIIc. Seien $b_n = \{v_{n,k}\}$ und $b = \{v_n\}$ Punkte aus $\mathfrak{B}_9$. Damit für die in $\mathfrak{A}_9$ konvergente Operationsfolge (51) in ganz $\mathfrak{A}_9$ (60) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{n=\infty} v_{n,k} = v_k \quad \text{für alle } k. \tag{64}$$

In der Tat, es ist nur zu zeigen, daß (61) aus (64) gefolgert werden kann. Sei zu dem Zwecke $\mathfrak{M}$ die Menge aus (62), $\mathfrak{M}'$ die Menge aller Zahlen aus $\mathfrak{M}$, die $< k_0$ sind, $\mathfrak{M}''$ die Menge der übrigen Zahlen von $\mathfrak{M}$. Wegen 2. von Satz XVI kann k_0 so groß gewählt werden, daß:

$$\left|\sum_{\mathfrak{M}''} (v_{n,k} - v_{n,k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \left|\sum_{\mathfrak{M}''} (v_k - v_{k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen (64) ist

$$\left|\sum_{\mathfrak{M}'} (v_{n,k} - v_{n,k+1}) - \sum_{\mathfrak{M}'} (v_k - v_{k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für fast alle } n.$$

Daraus folgern wir sofort:

$$\left|\sum_{\mathfrak{M}} (v_{n,k} - v_{n,k+1}) - \sum_{\mathfrak{M}} (v_k - v_{k+1})\right| < \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

---

[16]) Vgl. Fußnote [15]).

Also ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_i (-1)^{i-1} v_{n,k_i} = \lim_{n=\infty} \sum_{\mathfrak{M}} (v_{n,k} - v_{n,k+1}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{M}} (v_k - v_{k+1}) = \sum_i (-1)^i v_{k_i},$$

womit (61) bewiesen ist.

§ 8. Folgen linearer Integraloperationen.

In diesem Paragraphen bedeuten sowohl die Punkte von $\mathfrak{A}$ als auch die Punkte von $\mathfrak{B}$ Funktionen einer reellen Veränderlichen x, die in einem gegebenen Intervalle $[\alpha, \beta]$ definiert sind abgesehen von Nullmengen, wobei zwei Funktionen, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden, als identisch betrachtet, d. h. durch denselben Punkt von $\mathfrak{A}$ (bzw. von $\mathfrak{B}$) repräsentiert werden.

Ist $a = f(x)$, $a_1 = f_1(x)$, so ist zu verstehen:

$$\lambda a = \lambda f(x), \; a + a_1 = f(x) + f_1(x).$$

Ist $a = f(x)$, $b = \varphi(x)$, so soll die Fundamentaloperation sein:

$$U(a, b) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

10. Der Raum $\mathfrak{A}_{10}$. Es bestehe $\mathfrak{A}$ aus allen Funktionen, die in $[\alpha, \beta]$ integrierbar sind (d. h. ein endliches Lebesguesches Integral besitzen). Die Maßfunktion sei für $a = f(x)$ gegeben durch:

$$D(a) = \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx;$$

den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{10}$.

Sei $a_\nu = f_\nu(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{A}_{10}$; dann heißt $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ soviel wie:

$$\lim_{\nu=\infty} \int_\alpha^\beta |f_\nu - f|\,dx = 0.$$

Sei nun $a_\nu = f_\nu(x)$ eine Cauchysche Punktfolge aus $\mathfrak{A}_{10}$; es gibt dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ν_0, so daß:

$$\int_\alpha^\beta |f_\nu - f_{\nu'}|\,dx < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0,\; \nu' \geqq \nu_0; \tag{65}$$

für jedes $k > 0$ ist dann der Inhalt der Menge aller Punkte von $[\alpha, \beta]$, in denen $|f_\nu - f_{\nu'}| \geqq k$ ist, $< \frac{\varepsilon}{k}$. Also konvergiert $\{f_\nu\}$ in $[\alpha, \beta]$ asymptotisch[17]) gegen eine meßbare Funktion f. Es gibt ferner in $\{f_\nu\}$ eine Teilfolge $\{f_{\nu_i}\}$ die in $[\alpha, \beta]$ wesentlich-gleichmäßig gegen f konvergiert[18]); dann konvergiert $|f_\nu - f_{\nu_i}|$ wesentlich gleichmäßig gegen $|f_\nu - f|$. Es gibt daher eine monoton-wachsende Mengenfolge $\{\mathfrak{M}_j\}$, deren Vereinigung $[\alpha, \beta]$ ist (abgesehen von einer Nullmenge), und auf deren jeder $|f_\nu - f_{\nu_i}|$ gleichmäßig gegen $|f_\nu - f|$ konvergiert; dann aber ist, bei Berücksichtigung von (65):

$$\int_{\mathfrak{M}_j} |f_\nu - f|\, dx = \lim_{i=\infty} \int_{\mathfrak{M}_j} |f_\nu - f_{\nu_i}|\, dx \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0 .$$

Daraus aber folgt:

$$\int_\alpha^\beta |f_\nu - f|\, dx \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0 . \tag{66}$$

Wegen:

$$\int_\alpha^\beta |f|\, dx \leqq \int_\alpha^\beta |f_\nu|\, dx + \int_\alpha^\beta |f_\nu - f|\, dx$$

folgt daraus weiter, daß $\int_\alpha^\beta |f|\, dx$ endlich ist, d. h. $f(x)$ gehört zu $\mathfrak{A}_{10}$. Ist $a = f(x)$, so besagt (66):

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} a_\nu = a;$$

damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{A}_{10}$ **vollständig** ist.

Als **polaren Raum** $\mathfrak{B}_{10}$ nehmen wir die Menge aller in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen $\varphi(x)$, die in $[\alpha, \beta]$ bei Vernachlässigung von Nullmengen[19]) beschränkt sind. Für jedes $a = f(x)$ aus $\mathfrak{A}_{10}$ und jedes $b = \varphi(x)$ aus $\mathfrak{B}_{10}$ hat dann die Fundamentaloperation $U(a, b)$ einen Sinn, und setzt man:

$$\begin{array}{c}\Delta(b) = \text{obere Schranke von } |\varphi| \text{ in } [\alpha, \beta] \\ \text{bei Vernachlässigung von Nullmengen,}\end{array} \tag{67}$$

so ist:

$$U(a, b) \leqq D(a) \,.\, \Delta(b).$$

---

[17]) H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 570 ff., insbesondere S. 573, Satz VI.

[18]) l. c. [17]), S. 572, Satz V.

[19]) Vgl. l. c. [17]), S. 173.

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Punkte von $[\alpha, \beta]$, in denen $|\varphi| \geqq \Delta(b) - \varepsilon$, so ist der Inhalt $\mu(\mathfrak{M}) > 0$. Setzen wir:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn} \varphi}{\mu(\mathfrak{M})} \text{ auf } \mathfrak{M}; \quad f(x) = 0 \text{ außerhalb } \mathfrak{M},$$

so wird für $a = f(x)$:

$$D(a) = 1; \qquad U(a, b) \geqq \Delta(b) - \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß durch (67) die polare Maßbestimmung gegeben ist.

Aus Satz I folgern wir daher:

XVIII *a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Funktionenfolge aus $\mathfrak{B}_{10}$. Damit die Operationsfolge:

$$U(a, b_n) = \int_\alpha^\beta f(x) \varphi_n(x) \, dx \tag{68}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{10}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß überall in $[\alpha, \beta]$, abgesehen von Nullmengen:

$$|\varphi_n(x)| \leqq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{10}$ wird gebildet durch die Menge aller Funktionen $f(x)$, die $= 1$ sind in einem Teilintervall $[\xi, \beta]$ von $[\alpha, \beta]$, sonst $= 0$. In der Tat, die die zugehörige Menge $\mathfrak{G}'$ bildenden Funktionen $f^*(x)$ haben dann folgende Gestalt: es gibt eine Zerlegung $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = \beta$, so daß $f^*(x)$ konstant ist in $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2), \cdots [x_{k-2}, x_{k-1})$, $[x_{k-1}, x_k]$. Sei nun $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}_{10}$. Wählen wir n hinlänglich groß und bezeichnen mit f_1 die Funktion, die $= f$ ist, wo $|f| < n$, und $= 0$, wo $|f| \geqq n$, so ist:

$$\int_\alpha^\beta |f - f_1| \, dx \leqq \varepsilon. \tag{69$_1$}$$

Sodann können wir zwischen $-n$ und n endlich viele Zahlen $-n = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l = n$ einschalten, so daß, wenn $\mathfrak{M}_i$ die Menge aller Punkte von $[\alpha, \beta]$ bedeutet, in denen $z_{i-1} < f_1 \leqq z_i$ und f_2 die Funktion, die $= z_i$ ist auf $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$:

$$\int_\alpha^\beta |f_1 - f_2| \, dx \leqq \varepsilon. \tag{69$_2$}$$

Sodann gibt es in jeder der Mengen $\mathfrak{M}_i$ einen abgeschlossenen Teil, so daß, wenn $f_3 = z_i$ auf $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ und $= 0$ außerhalb aller $\mathfrak{A}_i$:

$$\int_\alpha^\beta |f_2 - f_3|\, dx \leqq \varepsilon. \tag{69_3}$$

Da die abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}_i$ zu je zweien fremd sind und daher zu je zweien positiven Abstand haben, gibt es endliche Intervallsysteme $\mathfrak{S}_i \succ \mathfrak{A}_i$, so daß je zwei $\mathfrak{S}_i$ fremd, und so daß wenn $f_4 = z_i$ auf $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ und $= 0$ außerhalb aller $\mathfrak{S}_i$:

$$\int_\alpha^\beta |f_3 - f_4|\, dx \leqq \varepsilon. \tag{69_4}$$

Aus den Ungleichungen (69) aber folgt:

$$\int_\alpha^\beta |f - f_4|\, dx \leqq 4\,\varepsilon.$$

Diese Funktion f_4 aber ist (abgesehen von der endlichen Menge ihrer Unstetigkeitspunkte) eine Funktion f^* aus $\mathfrak{G}'$. Für $a = f(x)$, $a' = f^*(x)$ ist also:

$$D(a - a') \leqq 4\,\varepsilon,$$

somit ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_{10}$.

Dies ergibt:

XVIII*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{10}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{10}$ beschränkte Operationsfolge (68) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_{10}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int_\xi^\beta \varphi_n\, dx$ vorhanden sei.

Und da für jedes b aus $\mathfrak{B}_{10}$ die Operation $U(a, b)$ stetig ist in $\mathfrak{A}_{10}$, so haben wir den Satz [20]):

XVIII*c*. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{10}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{10}$ konvergente Operationsfolge (68) in ganz $\mathfrak{A}_{10}$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f \varphi_n\, dx = \int_\alpha^\beta f \varphi\, dx, \tag{70}$$

---

[20]) H. Lebesgue, Ann. Toul. (3), 1 (1909), S. 52.

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx = \int_{\xi}^{\beta} \varphi \, dx \quad \text{für alle } \xi \text{ aus } [\alpha, \beta). \tag{71}$$

11. Der Raum $\mathfrak{A}_{11}$. Es sei p eine Zahl > 1, und es bestehe $\mathfrak{A}$ aus den in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen $a = f(x)$, für die das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} |f|^p \, dx$ endlich ist. Wir setzen:

$$D(a) = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und nennen den so entstehenden metrischen Raum $\mathfrak{A}_{11}$. Hier bedeutet $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ soviel wie:

$$\lim_{\nu=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |f_\nu - f|^p \, dx = 0.$$

Ganz analog wie bei $\mathfrak{A}_{10}$ weist man nach, daß auch $\mathfrak{A}_{11}$ vollständig ist.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{11}$ wählen wir die Menge aller in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen $b = \varphi(x)$, für die $\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} dx$ endlich ist. Bekanntlich hat dann für jedes a aus $\mathfrak{A}_{11}$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_{11}$ die Fundamentaloperation $U(a, b)$ einen Sinn, und zwar ist, wenn man setzt

$$\Delta(b) = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{72}$$

nach der Cesàro-Hölderschen Ungleichung:

$$|U(a, b)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f \varphi \, dx \right| \leqq D(a) . \Delta(b).$$

Setzt man noch:

$$f = \frac{\operatorname{sgn} . \varphi . |\varphi|^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p}}},$$

so wird:

$$D(a) = 1; \qquad \Delta(b) = \int_{\alpha}^{\beta} f\varphi\, dx,$$

womit gezeigt ist, daß durch (72) die polare Maßbestimmung gegeben ist. Damit haben wir:

XIX*a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{11}$. Damit die Operationsfolge (68) beschränkt sei in $\mathfrak{B}_{11}$, ist notwendig und hinreichend, daß es ein M gibt, so daß:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi_n|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqq M \qquad \text{für alle } n.$$

Analog wie bei $\mathfrak{A}_{10}$ weist man nach, daß auch in $\mathfrak{A}_{11}$ die Menge aller Funktionen die $= 1$ sind in $[\xi, \beta]$, sonst $= 0$, eine Grundmenge bilden. Damit haben wir:

XIX*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{11}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{11}$ beschränkte Operationsfolge (68) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_{11}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes ξ aus $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int_{\xi}^{\beta} \varphi_n\, dx$ vorhanden sei.

Und da auch hier $U(a, b)$ für jedes b aus $\mathfrak{B}_{11}$ stetig ist in $\mathfrak{A}_{11}$, haben wir den Satz [21]:

XIX*c*. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{11}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{11}$ konvergente Operationsfolge (68) in ganz $\mathfrak{A}_{11}$ (70) gelte, ist notwendig und hinreichend das Bestehen von (71).

12. Der Raum $\mathfrak{A}_{12}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen $a = f(x)$, die bei Vernachlässigung von Nullmengen beschränkt sind in $[\alpha, \beta]$. Die Maßfunktion sei gegeben durch:

$$D(a) = \text{obere Schranke von } |f| \text{ in } [\alpha, \beta]$$
$$\text{bei Vernachlässigung von Nullmengen.}$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{12}$. Es ist in ihm, wenn $a_\nu = f_\nu(x)$ und $a = f(x)$ ist, $\mathbf{L}_{\nu=\infty}\, a_\nu = a$ gleichbedeutend mit: Die Funktionenfolge $\{f_\nu(x)\}$ konvergiert, abgesehen von einer Nullmenge, gleichmäßig in $[\alpha, \beta]$ gegen $f(x)$.

[21]) H. Lebesgue l. c. [20]), S. 55 (für $p = 2$).

Ist $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Folge aus $\mathfrak{A}_{12}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ν_0, so daß, abgesehen von Nullmengen, in ganz $[\alpha, \beta]$:

$$|f_\nu - f_{\nu'}| \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0, \; \nu' \geqq \nu_0.$$

Also gibt es eine in $[\alpha, \beta]$ beschränkte Funktion $a = f(x)$, so daß, abgesehen von Nullmengen:

$$|f_\nu - f| \leqq \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0.$$

Dann aber gehört f zu $\mathfrak{A}_{12}$ und es ist $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$. Also ist $\mathfrak{A}_{12}$ vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{12}$ nehmen wir die Menge aller in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen $b = \varphi(x)$, die daselbst ein endliches (Lebesguesches) Integral besitzen. Für jedes a aus $\mathfrak{A}_{12}$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_{12}$ hat dann die Fundamentaloperation $U(a, b)$ einen Sinn. Die polare Maßbestimmung ist hier gegeben durch:

$$\Delta(b) = \int_\alpha^\beta |\varphi|\, dx;$$

denn einerseits ist dann:

$$|U(a, b)| \leqq D(a) \,.\, \Delta(b),$$

anderseits wird für $f = \operatorname{sgn} \varphi$:

$$D(a) = 1; \; \int_\alpha^\beta f \varphi\, dx = \Delta(b).$$

Wir haben nun den Satz:

XX*a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{12}$. Damit die Operationsfolge (68) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{12}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß:

$$\int_\alpha^\beta |\varphi_n|\, dx \leqq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ wird hier gebildet durch die Menge aller in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. In der Tat besteht die zugehörige Menge $\mathfrak{G}'$ aus allen jenen in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Sei nun $a = f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}_{12}$. Es gibt ein A, so daß, abgesehen von Nullmengen:

$$-A < f(x) < A \quad \text{in } [\alpha, \beta].$$

Wir schalten zwischen $-A$ und A Zahlen z_i ein:

$$-A = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l = A,$$

so daß $z_i - z_{i-1} < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Wir bezeichnen mit f^* eine Funktion, die $= z_i$ ist, wo $z_{i-1} < f \leqq z_i$. Dann ist, abgesehen von Nullmengen:

$$|f(x) - f^*(x)| < \varepsilon \quad \text{in } [\alpha, \beta],$$

d. h. es ist für $a = f(x)$, $a' = f^*(x)$:

$$D(a - a') < \varepsilon,$$

und somit ist $\mathfrak{S}'$ dicht in $\mathfrak{A}_{12}$. Also haben wir:

XX*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{12}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{12}$ beschränkte Operationsfolge (68) auch konvergent sei in $\mathfrak{A}_{12}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jede meßbare Menge $\mathfrak{M}$ aus $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx$ vorhanden sei.

Da wieder $U(a, b)$ für jedes b aus $\mathfrak{B}_{12}$ stetig ist in $\mathfrak{A}_{12}$, haben wir den Satz[22]:

XX*c*. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{12}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{12}$ konvergente Operationsfolge (68) in ganz $\mathfrak{A}_{12}$ (70) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für jede meßbare Menge $\mathfrak{M}$ aus $[\alpha, \beta]$:

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, \mathfrak{M} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi \, dx.$$

Diese Sätze können noch umgeformt werden auf Grund des Satzes:

XXI. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{12}$. Damit für jede meßbare Menge $\mathfrak{M}$ aus $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n dx$ existiert, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Bedingungen erfüllt seien:

1. Für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$ existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{\xi}^{\beta} \varphi_n dx$.

2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\rho > 0$, so daß für jede meßbare Menge $\mathfrak{M}$ aus $[\alpha, \beta]$, deren Inhalt $\mu(\mathfrak{M}) < \rho$ ist, die Ungleichung gilt:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} |\varphi_n| \, dx \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

[22]) B. H. Camp, Am. Trans. 14 (1913), S. 44.

Die Bedingungen sind hinreichend. In der Tat folgt aus 1., daß auch für jedes endliche Intervallsystem $\mathfrak{S}$ aus $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert $\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx$ existiert. Sei nun $\mathfrak{M}$ eine beliebige meßbare Menge aus $[\alpha, \beta]$. Es gibt einen abgeschlossenen Teil $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$, so daß:

$$\mu(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}) < \rho, \text{ mithin } \left| \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{A}} \varphi_n \, dx \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n. \tag{73}$$

Es gibt sodann ein endliches Intervallsystem $\mathfrak{S} \succ \mathfrak{A}$, so daß:

$$\mu(\mathfrak{S} - \mathfrak{A}) < \rho, \text{ mithin } \left| \int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{A}} \varphi_n \, dx \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } n. \tag{74}$$

Weil ein endlicher Grenzwert $\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx$ existiert, gibt es ein n_0, so daß:

$$\left| \int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{S}} \varphi_{n'} \, dx \right| < \varepsilon \quad \text{für } n \geqq n_0, \ n' \geqq n_0. \tag{75}$$

Aus (73), (74), (75) folgt:

$$\left| \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi_{n'} \, dx \right| < 5\varepsilon \quad \text{für } n \geqq n_0, \ n' \geqq n_0,$$

d. h. es existiert ein endlicher Grenzwert $\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx$.

Die Bedingungen sind notwendig. Für 1. ersieht man es, indem man für $\mathfrak{M}$ das Intervall $[\xi, \beta]$ wählt. Den Beweis, daß auch 2. notwendig ist, führen wir indirekt, indem wir annehmen, es sei 2. nicht erfüllt, und zeigen, daß es dann in $[\alpha, \beta]$ eine meßbare Menge $\mathfrak{M}$ gibt, für die kein endlicher Grenzwert $\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx$ vorhanden ist.

Ist 2. nicht erfüllt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ von folgender Eigenschaft: Zu jedem Index N und zu jedem $\sigma > 0$ gibt es in $[\alpha, \beta]$ eine meßbare Menge $\mathfrak{N}$, deren Inhalt:

$$\mu(\mathfrak{N}) < \sigma$$

ist, und einen Index $n_0 > N$, so daß:

$$\int_{\mathfrak{N}} |\varphi_{n_0}| \, dx > \varepsilon. \tag{76}$$

In der Tat, andernfalls gäbe es zu jedem ε ein N und ein $\sigma > 0$, so daß für jedes meßbare $\mathfrak{M}$ aus $[\alpha, \beta]$:

$$\int |\varphi_n| \, dx \leqq \varepsilon \quad \text{wenn } n > N \text{ und } \mu(\mathfrak{M}) < \sigma.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Lebesgueschen Integrale gibt es aber zu jedem n ein σ_n, so daß

$$\int_{\mathfrak{M}} |\varphi_n|\, dx \leqq \varepsilon \qquad \text{wenn } \mu(\mathfrak{M}) < \sigma_n.$$

Bezeichnet ρ die kleinste der Zahlen $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$, so wäre also Bedingung 2. erfüllt, entgegen der Annahme.

Daraus schließen wir weiter: Zu jedem Index N und jedem $\sigma > 0$ gibt es in $[\alpha, \beta]$ ein $n_0 > N$ und eine meßbare Menge $\mathfrak{M}$, so daß:

$$\mu(\mathfrak{M}) < \sigma; \qquad \left|\int_{\mathfrak{M}} \varphi_{n_0}\, dx\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

In der Tat, ist $\mathfrak{N}'$ die Menge aller Punkte der Menge $\mathfrak{N}$ in (76), in denen $\varphi_{n_0} \geqq 0$, und $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}'$, so ist

$$\int_{\mathfrak{N}} |\varphi_{n_0}|\, dx = \left|\int_{\mathfrak{N}'} \varphi_{n_0}\, dx\right| + \left|\int_{\mathfrak{N}''} \varphi_{n_0}\, dx\right|.$$

Aus (76) folgt also, daß mindestens einer der beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Ungleichung $> \frac{\varepsilon}{2}$ sein muß, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir zeigen nun: es gibt in $[\alpha, \beta]$ eine Folge zu je zweien fremder, meßbarer Mengen $\mathfrak{M}_\nu$, und dazu eine Folge wachsender Indizes n_ν, so daß:

$$\left|\int_{\mathfrak{M}_\nu} \varphi_{n_\nu}\, dx\right| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } \nu. \tag{77}$$

Zum Beweise gehen wir aus von einer meßbaren Menge $\mathfrak{N}_1$ aus $[\alpha, \beta]$ und einem Index n_1, so daß:

$$\left|\int_{\mathfrak{N}_1} \varphi_{n_1}\, dx\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wählen wir $\sigma > 0$ hinlänglich klein, so ist auch noch für jeden Teil $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}_1$, für den $\mu(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}') < \sigma$ ist:

$$\left|\int_{\mathfrak{N}'} \varphi_{n_1}\, dx\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wie bewiesen, gibt es aber einen Index $n_2 > n_1$ und eine Menge $\mathfrak{N}_2$, so daß:

$$\mu(\mathfrak{N}_2) < \sigma; \qquad \left|\int_{\mathfrak{N}_2} \varphi_{n_2}\, dx\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es ist also:

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2}\varphi_{n_1}\,dx\right|>\frac{\varepsilon}{2};\quad\left|\int\limits_{\mathfrak{N}_2}\varphi_{n_2}\,dx\right|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebenso gibt es ein $n_3>n_2$ und eine Menge $\mathfrak{N}_3$, so daß:

$$\int\limits_{\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_1(\mathfrak{N}_2\dot{+}\mathfrak{N}_3)}\varphi_{n_1}\,dx\Bigg|>\frac{\varepsilon}{2};\quad\left|\int\limits_{\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3}\varphi_{n_2}\,dx\right|>\frac{\varepsilon}{2};\quad\left|\int\limits_{\mathfrak{N}_3}\varphi_{n_3}\,dx\right|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir erhalten so eine wachsende Indizesfolge n_ν und eine Mengenfolge $\mathfrak{N}_\nu$, so daß:

$$\int\limits_{\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_1(\mathfrak{N}_2\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{N}_\nu)}\varphi_{n_1}\,dx\Bigg|>\frac{\varepsilon}{2};\quad\left|\int\limits_{\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_2(\mathfrak{N}_3\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{N}_\nu)}\varphi_{n_2}\,dx\right|>\frac{\varepsilon}{2}\Bigg|,\cdots.$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_1&=\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_1(\mathfrak{N}_2\dot{+}\mathfrak{N}_3\dot{+}\cdots);\\ \mathfrak{M}_2&=\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_2(\mathfrak{N}_3\dot{+}\mathfrak{N}_4\dot{+}\cdots);\cdots;\\ \mathfrak{M}_\nu&=\mathfrak{N}_\nu-\mathfrak{N}_\nu(\mathfrak{N}_{\nu+1}\dot{+}\mathfrak{N}_{\nu+2}\dot{+}\cdots);\cdots,\end{aligned}$$

so sind die Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ zu je zweien fremd und (77) ist erfüllt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir können nun annehmen, für jede dieser Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ existiere ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\int\limits_{\mathfrak{M}_\nu}\varphi_n\,dx$; denn würde für eine von ihnen ein solcher Grenzwert nicht existieren, so wäre schon hiedurch Bedingung 2. von Satz XXI als notwendig erwiesen.

Wir gehen aus von der Menge $\mathfrak{M}_1$ (die wir wegen der Gleichförmigkeit mit dem Folgenden auch $\mathfrak{S}_1$ nennen) und vom Index n_1 (den wir wegen der Gleichförmigkeit mit dem Folgenden auch n_{ν_1} nennen).

Es gibt ein ρ_1, so daß:

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{N}}\varphi_{n_1}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{12}\quad\text{wenn }\mu(\mathfrak{N})<\rho_1.$$

Ferner gibt es, da nach Annahme ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\int\limits_{\mathfrak{M}_{n_1}}\varphi_n\,dx$ existiert, ein $N_1>n_{\nu_1}$, so daß:

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{S}_1}\varphi_n\,dx-\int\limits_{\mathfrak{S}_1}\varphi_{n'}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{12}\quad\text{für } n\geqq N_1,\ n'\geqq N_1.$$

Nun gibt es wieder ein $\sigma_1 < \rho_1$, so daß:

$$\left|\int_{\mathfrak{N}} \varphi_{N_1}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{wenn } \mu(\mathfrak{N}) < \sigma_1 .$$

Da die Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ zu je zweien fremd und in $[\alpha, \beta]$ enthalten sind, ist die Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{M}_\nu)$ endlich; wir können daher den Index ν so groß, etwa $= \nu_2$ wählen, daß

$$n_{\nu_2} > N_1 \text{ und } \sum_{\nu=\nu_2}^{\infty} \mu(\mathfrak{M}_\nu) < \sigma_1 .$$

Wir setzen:

$$\mathfrak{M}_{n_{\nu_1}} + \mathfrak{M}_{n_{\nu_2}} = \mathfrak{S}_2 .$$

Es gibt nun wieder ein $\rho_2 < \sigma_1$, so daß:

$$\left|\int_{\mathfrak{N}} \varphi_{n_{\nu_2}}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{12} \text{ wenn } \mu(\mathfrak{N}) < \rho_2,$$

und ein $N_2 > n_{\nu_2}$, so daß:

$$\left|\int_{\mathfrak{S}_2} \varphi_n\, dx - \int_{\mathfrak{S}_2} \varphi_{n'}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{12}, \quad \text{wenn } n \geqq N_2,\ n' \geqq N_2,$$

und sodann ein $\sigma_2 < \rho_2$, so daß:

$$\left|\int_{\mathfrak{N}} \varphi_{N_2}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{12}, \text{ wenn } \mu(\mathfrak{N}) < \sigma_2 .$$

Indem wir so weiter schließen, erhalten wir eine Folge von Indizes:

$$n_{\nu_1} < N_1 < n_{\nu_2} < N_2 < \ldots < n_{\nu_i} < N_i < \ldots$$

und eine Folge von positiven Zahlen

$$\rho_1 > \sigma_1 > \rho_2 > \sigma_2 > \ldots > \rho_i > \sigma_i > \ldots$$

von folgenden Eigenschaften: Es ist

$$\sum_{\nu=\nu_i+1}^{\infty} \mu(\mathfrak{M}_\nu) < \sigma_i < \rho_i; \tag{78}$$

$$\left|\int_{\mathfrak{N}} \varphi_{n_{\nu_i}}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{12}, \text{ wenn } \mu(\mathfrak{N}) < \rho_i;$$

$$\left|\int_{\mathfrak{N}} \mathfrak{S}_{N_i}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{12}, \quad \text{wenn } \mu(\mathfrak{N}) < \sigma_i; \tag{79}$$

Setzt man:

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{M}_{\nu_1} + \mathfrak{M}_{\nu_2} + \ldots + \mathfrak{M}_{\nu_i},$$

so ist:

$$\left| \int_{\mathfrak{S}_i} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{S}_i} \varphi_{n'} \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{für } n \geqq N_i, \; n' \geqq N_i. \tag{80}$$

Ferner waren zufolge (77) die Mengen $\mathfrak{M}_\nu$ so gewählt, daß:

$$\left| \int_{\mathfrak{M}_{\nu_i}} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{81}$$

Nun bilden wir die Menge:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\nu_1} + \mathfrak{M}_{\nu_2} + \cdots + \mathfrak{M}_{\nu_i} + \cdots$$

und setzen:

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{S}_i = \mathfrak{R}_i.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{M}} \varphi_{N_{i-1}} \, dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| \geqq \left| \int_{\mathfrak{M}_{\nu_i}} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| - \\ - \left| \int_{\mathfrak{S}_{i-1}} \varphi_{N_{i-1}} \, dx - \int_{\mathfrak{S}_{i-1}} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| - \left| \int_{\mathfrak{R}_{i-1}} \varphi_{N_{i-1}} \, dx \right| - \left| \int_{\mathfrak{R}_i} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right|. \end{aligned} \tag{82}$$

Hierin ist nach (80):

$$\left| \int_{\mathfrak{S}_{i-1}} \varphi_{N_{i-1}} \, dx - \int_{\mathfrak{S}_{i-1}} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{12}. \tag{83}$$

Ferner ist wegen (78):

$$\mu(\mathfrak{R}_{i-1}) < \sigma_{i-1}; \qquad \mu(\mathfrak{R}_i) < \rho_i,$$

also nach (79):

$$\left| \int_{\mathfrak{R}_{i-1}} \varphi_{N_{i-1}} \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{12}; \qquad \left| \int_{\mathfrak{R}_i} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{12}. \tag{84}$$

Aus (81), (82), (83), (84) aber folgt:

$$\left| \int_{\mathfrak{M}} \varphi_{N_{i-1}} \, dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi_{n_{\nu_i}} \, dx \right| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Also kann kein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx$ vorhanden sein, und der Beweis von Satz XXI ist beendet.

Bemerken wir noch, daß, wenn die Funktionenfolge $\varphi_n(x)$ der Bedingung 2. von Satz XXI genügt, die Folge der Zahlen:

$$\Delta(b_n) = \int_\alpha^\beta |\varphi_n| \, dx$$

beschränkt ist, und somit nach Satz XXa die Operationsfolge $U(a, b_n)$ in $\mathfrak{A}_{12}$ beschränkt ist. In der Tat, es gibt dann ein $\rho > 0$, so daß aus $\mu(\mathfrak{N}) < \rho$ folgt:

$$\int_{\mathfrak{N}} |\varphi_n| \, dx \leqq 1 \quad \text{für alle } n. \tag{85}$$

Wählen wir k so groß, daß $\frac{1}{k}(\beta - \alpha) < \rho$, und teilen $[\alpha, \beta]$ in k gleiche Teilintervalle, so hat jedes einen Inhalt $< \rho$, und daher ist nach (85):

$$\int_\alpha^\beta |\varphi_n| \, dx \leqq k \text{ für alle } n.$$

Wir können daher statt XXb den Satz aussprechen:

XXIIb. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{12}$. Damit die Operationsfolge (68) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{12}$, ist notwendig und hinreichend, daß die $\varphi_n(x)$ den Bedingungen von Satz XXI genügen.

Nun können wir noch XXc ersetzen durch den Satz[23]):

XXIIc. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{12}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{12}$ konvergente Operationsfolge (68) in ganz $\mathfrak{A}_{12}$ (70) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$:

$$\lim_{n=\infty} \int_\xi^\beta \varphi_n \, dx = \int_\xi^\beta \varphi \, dx. \tag{86}$$

Die Bedingung ist notwendig; dies ist trivial. Die Bedingung ist hinreichend. Sei $\mathfrak{M}$ eine meßbare Menge aus $[\alpha, \beta]$. Wie zu Beginn des Beweises von Satz XXI zeigen wir: es gibt in $[\alpha, \beta]$ ein endliches Intervallsystem $\mathfrak{S}$, so daß:

$$\left| \int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx \right| < 2\varepsilon \text{ für alle } n; \quad \left| \int_{\mathfrak{S}} \varphi \, dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi \, dx \right| < 2\varepsilon. \tag{87}$$

Aus (86) folgt sofort:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx = \int_{\mathfrak{S}} \varphi \, dx,$$

[23]) H. Lebesgue l. c. [20]), S. 57.

und mithin:

$$\left|\int_{\mathfrak{S}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{S}} \varphi \, dx\right| < \varepsilon \quad \text{für fast alle } n. \tag{88}$$

Aus (87) und (88) aber folgt:

$$\left|\int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi \, dx\right| < 5\varepsilon \quad \text{für fast alle } n,$$

d. h. es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n \, dx = \int_{\mathfrak{M}} \varphi \, dx.$$

Also ist die Bedingung von Satz XX c erfüllt, und Satz XXII c ist bewiesen.

§ 9. Singuläre Integrale.

Sei $\Phi(x)$ von endlicher Variation in $[\alpha, \beta]$ und außerhalb $[\alpha, \beta]$ sei:

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha) \quad \text{für } x < \alpha; \qquad \Phi(x) = \Phi(\beta) \quad \text{für } x > \beta.$$

Dann gehört zu $\Phi(x)$ eine (zumindest im σ-Körper aller Borelschen Mengen definierte) absolut-additive Mengenfunktion $\delta(\mathfrak{M}, \Phi)$, der Zuwachs von Φ auf $\mathfrak{M}$ [24]). Ersetzt man in der Lebesgueschen Theorie der Integration den Inhalt durch die Mengenfunktion $\delta(\mathfrak{M}, \Phi)$, so erhält man den Begriff der Stieltjesschen Integrale $\int_{\mathfrak{M}} f \, d\Phi$. Ist $\mathfrak{M}$ das abgeschlossene Intervall $[\alpha', \beta']$ und ist

$$\Phi(\alpha' - 0) = \Phi(\alpha'); \qquad \Phi(\beta' + 0) = \Phi(\beta'),$$

so schreiben wir:

$$\int_{[\alpha', \beta']} f \, d\Phi = \int_{\alpha'}^{\beta'} f \, d\Phi.$$

Ist $\mathfrak{M}$ die aus dem einzigen Punkte x bestehende Menge $\mathfrak{E}_x$, so wird:

$$\int_{\mathfrak{E}_x} f \, d\Phi = f(x) \, \delta(\mathfrak{E}_x, \Phi) = f(x) \left(\Phi(x+0) - \Phi(x-0)\right).$$

[24]) H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, Kap. VII.

In den §§ 9—12 bedeuten sowohl die Punkte von $\mathfrak{A}$, wie die von $\mathfrak{B}$ Funktionen, die in $[\alpha, \beta]$ definiert sind. Als Fundamentaloperation gilt in § 9 die Operation:

$$U(a, b) = \int_\alpha^\beta f \varphi \, dx.$$

13. **Der Raum $\mathfrak{A}_{13}$.** Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen in $[\alpha, \beta]$ definierten Funktionen $a = f(x)$, die überall in $[\alpha, \beta]$ endliche einseitige Grenzwerte besitzen, und für die insbesondere:

$$\begin{gathered} f(\alpha + 0) = f(\alpha); \quad f(\beta - 0) = f(\beta); \\ f(x) = \lambda f(x - 0) + (1 - \lambda) f(x + 0) \quad \text{für alle } x \text{ von } (\alpha, \beta), \end{gathered} \tag{89}$$

wo λ eine von x unabhängige Zahl bedeutet.

Die Maßfunktion in $\mathfrak{A}$ sei:

$D(a) =$ obere Schranke von $|f|$ in $[\alpha, \beta]$ bei Vernachlässigung abzählbarer Mengen.

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{13}$. Es ist in ihm, wenn $a_\nu = f_\nu(x)$ und $a = f(x)$ ist, die Relation $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ gleichbedeutend mit: die Funktionenfolge $f_\nu(x)$ konvergiert in $[\alpha, \beta]$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Ist $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Folge aus $\mathfrak{A}_{13}$, so konvergieren die Funktionen $f_\nu(x)$ *gleichmäßig* in $[\alpha, \beta]$ gegen eine Funktion $f(x)$, die somit auch überall einseitige Grenzwerte besitzt und den Gleichungen (89) genügt, somit zu $\mathfrak{A}_{13}$ gehört; also ist $\mathfrak{A}_{13}$ *vollständig*.

Als *polaren Raum* $\mathfrak{B}_{13}$ nehmen wir die Menge aller in $[\alpha, \beta]$ meßbaren Funktionen $b = \varphi(x)$, die in $[\alpha, \beta]$ ein endliches (Lebesguesches) Integral besitzen. Für jedes a aus $\mathfrak{A}_{13}$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_{13}$ hat dann die Fundamentaloperation $U(a, b)$ einen Sinn. Die *polare Maßbestimmung* ist gegeben durch:

$$\Delta(b) = \int_\alpha^\beta |\varphi| \, dx; \tag{90}$$

denn einerseits ist dann:

$$|U(a, b)| \leqq D(a) \, . \, \Delta(b);$$

sei anderseits $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben und φ eine Funktion aus $\mathfrak{B}_{13}$. Es gibt ein $\rho > 0$, so daß:

$$\int_{\mathfrak{N}} |\varphi| \, dx < \varepsilon \text{ wenn } \mu(\mathfrak{N}) < \rho.$$

Ist $\mathfrak{M}$ die (meßbare) Menge aller Punkte von $[\alpha, \beta]$, in denen $\varphi(x) \geqq 0$, so gibt es einen abgeschlossenen Teil $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$, so daß $\mu(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}) < \rho$. Ist $g(x) = 1$ auf $\mathfrak{A}$, sonst $= -1$, so ist:

$$\left| \int_\alpha^\beta |\varphi| \, dx - \int_\alpha^\beta g \cdot \varphi \, dx \right| < 2\varepsilon.$$

Es gibt sodann ein endliches Intervallsystem $\mathfrak{S} \succ \mathfrak{A}$, so daß $\mu(\mathfrak{S} - \mathfrak{A}) < \rho$. Ist $g^* = 1$ auf $\mathfrak{S}$, sonst $= -1$, so ist:

$$\left| \int_\alpha^\beta g \varphi \, dx - \int_\alpha^\beta g^* \varphi \, dx \right| < 2\varepsilon.$$

Durch Abänderung der Werte der Funktion g^* in ihren endlich vielen Unstetigkeitspunkten können wir daraus eine Funktion f aus $\mathfrak{A}_{13}$ machen. Dann ist für $a = f$:

$$\left| U(a, b) - \int_\alpha^\beta |\varphi| \, dx \right| < 4\varepsilon.$$

Ferner ist $D(a) = 1$, da es bei Bildung von $D(a)$ auf die Werte von f in seinen abzählbar vielen Unstetigkeitspunkten nicht ankommt. Damit ist gezeigt, daß durch (90) wirklich die polare Maßbestimmung gegeben ist.

Wir haben also den Satz:

XXIIIa. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{13}$. Damit die Operationsfolge

$$U(a, b_n) = \int_\alpha^\beta f \varphi_n \, dx \tag{91}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{13}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\int_\alpha^\beta |\varphi_n| \, dx \leqq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{13}$ wird gebildet durch die Funktionen, die, wenn ξ zu (α, β) gehört, gegeben sind durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < \xi \\ 1 \text{ für } x > \xi \end{cases} \quad f(\xi) = 1 - \lambda, \tag{92}$$

zusammen mit der Konstanten 1.

In der Tat, die zugehörige Menge $\mathfrak{G}'$ wird dann gebildet durch alle streckenweise konstanten Funktionen[25]), die die Bedingungen (89) erfüllen. Nach einem bekannten Satze[26]) gibt es nun zu jeder Funktion f aus $\mathfrak{A}_{13}$ eine Zerlegung

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta \tag{93}$$

des Intervalls $[\alpha, \beta]$ und zu jedem Teilintervall (x_{i-1}, x_i) eine konstante c_i, so daß

$$|f - c_i| < \varepsilon \quad \text{in } (x_{i-1}, x_i).$$

Setzt man nun:

$$f^*(x) = c_i \text{ in } (x_{i-1},\ x_i)\ (i = 1, 2, \ldots, n);\ f^*(\alpha) = c_0,\ f^*(\beta) = c_n$$

und bestimmt die Funktionswerte $f^*(x_i)$ aus (89), so gehört f^* zu $\mathfrak{G}'$ und es ist, wie aus (89) folgt:

$$|f(x_i) - f^*(x_i)| \leqq (|\lambda| + |1 - \lambda|)\varepsilon.$$

Für $a = f$, $a' = f^*$ ist also:

$$D(a - a') \leqq (|\lambda| + |1 - \lambda|)\varepsilon,$$

und somit ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_{13}$.

Damit haben wir:

XXIII*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{13}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{13}$ beschränkte Operationsfolge (91) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{13}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx$ vorhanden sei.

Ist Φ von endlicher Variation, so gilt für je zwei Funktionen f_1 und f_2 aus $\mathfrak{A}_{13}$, die in $[\alpha, \beta]$ der Ungleichung $|f_1 - f_2| \leqq \varepsilon$ genügen:

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_1 \, d\Phi - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_2 \, d\Phi \right| \leqq \varepsilon V_{\alpha}^{\beta}(\Phi),$$

---

[25]) Eine Funktion f hat eine Eigenschaft „streckenweise" im Intervall $[\alpha^*, \beta^*]$, wenn es eine Zerlegung

$$\alpha^* = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta^*$$

dieses Intervalls gibt, so daß f die fragliche Eigenschaft in jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) hat.

[26]) l. c. [24]), S. 217, Satz V.

wo $V_\alpha^\beta(\Phi)$ die Variation von Φ in $[\alpha, \beta]$ bedeutet. Also ist auch $\int_\alpha^\beta f\,d\,\Phi$ stetig in $\mathfrak{A}_{13}$. Das ergibt, wenn man beachtet, daß für die Funktion (92):

$$\int_\alpha^\beta f\,d\,\Phi = \Phi(\beta) - \Phi(\xi+0) + (1-\lambda)\big(\Phi(\xi+0) - \Phi(\xi-0)\big) =$$
$$= \Phi(\beta) - \lambda\,\Phi(\xi+0) - (1-\lambda)\,\Phi(\xi-0)$$

ist, den Satz:

XXIII*c*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{13}$, und sei $\Phi(x)$ von endlicher Variation in $[\alpha, \beta]$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{13}$ konvergente Operationsfolge (91) in ganz $\mathfrak{A}_{13}$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx = \int_\alpha^\beta f\,d\,\Phi, \tag{94}$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} \int_\xi^\beta \varphi_n\,dx = \Phi(\beta) - \lambda\,\Phi(\xi+0) - (1-\lambda)\,\Phi(\xi-0)$$
$$\text{für alle } \xi \text{ aus } (\alpha, \beta); \tag{95}$$
$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n\,dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Am wichtigsten ist der Spezialfall, daß Φ gegeben ist durch:

$\Phi(x) = 0$ für $x < x_0$; $\Phi(x) = 1$ für $x > x_0$ $(\alpha < x_0 < \beta)$;

dann wird aus (94):

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx = f(x_0), \tag{96}$$

und die Bedingungen (95) reduzieren sich dann auf:

$$\lim_{n=\infty} \int_\xi^\beta \varphi_n\,dx = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \xi < x_0 \\ 0 & \text{wenn } \xi > x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{x_0}^\beta \varphi_n\,dx = 1 - \lambda;$$

es ist also $\int_\alpha^\beta f\varphi_n\,dx$ ein sogenanntes „singulares Integral", das für jedes $f(x)$ aus $\mathfrak{A}_{13}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.[27])

Ein anderer wichtiger Spezialfall[28]) ist der, daß $\Phi = 0$.

14. Der Raum $\mathfrak{A}_{14}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen jenen in $[\alpha, \beta]$ definierten Funktionen $a = f(x)$, die in jedem Punkte von $[\alpha, \beta]$ endliche einseitige Grenzwerte besitzen und in allen Punkten einer Menge $\mathfrak{M}$, deren Komplement in $[\alpha, \beta]$ dicht ist, stetig sind. Die Maßbestimmung in $\mathfrak{A}$ sei gegeben durch:

$$D(a) = \text{ obere Schranke von } |f| \text{ in } [\alpha, \beta].$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{14}$. Wie bei $\mathfrak{A}_{13}$ sehen wir, daß er vollständig ist.

Die Wahl des polaren Raumes $\mathfrak{B}_{14}$ bleibt dieselbe wie bei $\mathfrak{A}_{13}$ und als polare Maßbestimmung ergibt sich auch hier wieder (90); man erkennt dies, wie bei $\mathfrak{A}_{13}$, wenn man beachtet, daß man das dort mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete Intervallsystem auch so wählen kann, daß die Endpunkte seiner Intervalle nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören; die dort mit g^* bezeichnete Funktion gehört dann zu $\mathfrak{A}_{14}$. Damit haben wir den Satz:

XXIV a. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{14}$. Damit die Operationsfolge (91) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{14}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\int_\alpha^\beta |\varphi_n|\,dx \leqq M \text{ für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{14}$ wird gebildet durch die Funktionen $f(x)$, die gegeben sind durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < \xi \\ 1 \text{ für } x > \xi \end{cases}; \; f(\xi) \text{ beliebig,} \tag{97}$$

wo ξ ein beliebiger, nicht zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Punkt von $[\alpha, \beta]$ ist, wozu, falls α zu $\mathfrak{M}$ gehört, noch die Konstante 1 kommt.

In der Tat, die zugehörige Menge $\mathfrak{G}'$ wird dann gebildet durch alle streckenweise konstanten Funktionen, die in allen Punkten von $\mathfrak{M}$ stetig sind. Sei nun $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}_{14}$. Wir bilden zu ihr die Zerlegung (93), wobei wir offenbar annehmen können, daß die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören. Zu jedem Teilintervall (x_{i-1}, x_i) gibt es eine Konstante c_i, so daß:

$$|f - c_i| < \varepsilon \quad \text{in } (x_{i-1}, x_i).$$

[27]) Vgl. H. Lebesgue l. c. [20]), S. 78.
[28]) H. Lebesgue l. c. [20]), S. 60.

Wir setzen:

$$f^*(x) = c_i \text{ in } (x_{i-1}, x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$f^*(x_i) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$f^*(\alpha) = \begin{cases} c_0 & \text{wenn } \alpha \text{ zu } \mathfrak{M} \text{ gehört} \\ f(\alpha) & \text{wenn } \alpha \text{ nicht zu } \mathfrak{M} \text{ gehört} \end{cases}$$

$$f^*(\beta) = \begin{cases} c_n & \text{wenn } \beta \text{ zu } \mathfrak{M} \text{ gehört} \\ f(\beta) & \text{wenn } \beta \text{ nicht zu } \mathfrak{M} \text{ gehört.} \end{cases}$$

Dann gehört f^* zu $\mathfrak{G}'$ und es ist $|f(x) - f^*(x)| \leqq \varepsilon$ in $[\alpha, \beta]$, d. h. wenn $a = f(x)$, $a' = f^*(x)$:

$$D(a - a') \leqq \varepsilon.$$

Also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_{14}$. Damit haben wir:

XXIV*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{14}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{14}$ beschränkte Operationsfolge (91) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{14}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige ξ aus (α, β) und für $\xi = \alpha$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx$ vorhanden sei.

Bedeutet $\Phi(x)$ eine Funktion endlicher Variation, die stetig ist in allen nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Punkten, so gilt für alle Funktionen (97):

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f \, d\Phi = \Phi(\beta) - \Phi(\xi).$$

Wir haben also hier den Satz:

XXIV*c*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{14}$, und sei $\Phi(x)$ eine Funktion endlicher Variation, die stetig ist in allen nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Punkten. Damit für die in $\mathfrak{A}_{14}$ konvergente Operationsfolge (91) in ganz $\mathfrak{A}_{14}$ (94) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für alle nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörigen ξ aus (α, β) und für $\xi = \alpha$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx = \Phi(\beta) - \Phi(\xi). \tag{98}$$

Der wichtigste Spezialfall[29]) ist hier der, daß $\mathfrak{M}$ aus einem einzigen Punkte x_0 aus (α, β) besteht und Φ gegeben ist durch:

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{für } x < x_0; \quad \Phi(x) = 1 \quad \text{für } x > x_0.$$

[29]) H. Lebesgue l. c. [20]), S. 69.

Aus (94) wird dann wieder (96) und die Bedingung (98) reduziert sich dann auf:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \xi < x_0 \\ 0 & \text{wenn } \xi > x_0 \end{cases}.$$

Also ist $\int_{\alpha}^{\beta} f \varphi_n \, dx$ ein singuläres Integral, daß für jedes $f(x)$ aus $\mathfrak{A}_{14}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

15. Der Raum $\mathfrak{A}_{15}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen in $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktionen $a = f(x)$ und die Maßbestimmung sei gegeben durch:

$$D(a) = \quad \text{Maximum von} \quad |f| \text{ in } [\alpha, \beta]. \tag{99}$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{15}$. Wie bei $\mathfrak{A}_{13}$ sehen wir, daß er vollständig ist.

Die Wahl des polaren Raumes $\mathfrak{B}_{15}$ bleibt dieselbe wie bei $\mathfrak{A}_{13}$, und auch hier wieder ist die polare Maßbestimmung gegeben durch (90). Denn gehen wir wieder aus von der bei $\mathfrak{A}_{13}$ verwendeten Funktion g^*. Sei $\mathfrak{S}$ das bei Definition von g^* auftretende endliche Intervallsystem. Indem wir seine Intervalle ein wenig vergrößern, entstehe daraus das Intervallsystem $\mathfrak{S}'$. Es sei

$$\mu(\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}) < \rho,$$

wobei ρ dieselbe Bedeutung hat, wie bei Definition von g^*. Nun gibt es eine stetige Funktion f, für die $|f| \leqq 1$, und die in $\mathfrak{S}$ und außerhalb $\mathfrak{S}'$ mit g^* übereinstimmt. Für sie ist:

$$D(a) = 1; \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f \varphi \, dx - \int_{\alpha}^{\beta} g^* \varphi \, dx \right| \leqq 2 \int_{\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}} |\varphi| \, dx < 2\varepsilon,$$

mithin:

$$D(a) = 1; \quad \left| U(a, b) - \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi| \, dx \right| < 6\varepsilon,$$

also ist wirklich $\Delta(\varphi)$ die polare Maßbestimmung.

Wir haben also den Satz:

XXV *a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{15}$. Damit die Operationsfolge (91) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{15}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi| \, dx \leqq M \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{15}$ wird gebildet durch die Funktionen $f(x)$, die gegeben sind durch:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x<\xi \\ x-\xi & \text{für } x \geqq \xi \end{cases} \quad (\alpha \leqq \xi < \beta),$$

zusammen mit der Konstanten 1[30]. In der Tat, die zugehörige Menge $\mathfrak{G}'$ besteht dann aus allen in $[\alpha, \beta]$ stetigen, streckenweise linearen Funktionen $f^*(x)$, und zu jeder Funktion $a=f(x)$ aus $\mathfrak{A}_{15}$ gibt es daher eine Funktion $a'=f^*(x)$ aus $\mathfrak{G}'$, so daß:

$$|f-f^*|<\varepsilon \quad \text{in} \quad [\alpha, \beta], \quad \text{d. h.} \quad D(a-a')<\varepsilon.$$

Also ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_{15}$. Damit haben wir:

XXV*b*. Sei $b_n=\varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{15}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{15}$ beschränkte Operationsfolge (91) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{15}$, ist notwendig und hinreichend, daß ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_n\,dx$ und für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\int\limits_{\xi}^{\beta}(x-\xi)\varphi_n\,dx$ vorhanden sei.

XXV*c*. Sei $b_n=\varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{15}$ und sei $\Phi(x)$ von endlicher Variation in $[\alpha, \beta]$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{15}$ konvergente Operationsfolge (91) in ganz $\mathfrak{A}_{15}$ (94) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi_n\,dx=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha);$$

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{\xi}^{\beta}(x-\xi)\varphi_n\,dx=\int\limits_{[\xi,\beta]}(x-\xi)\,d\,\Phi \quad \text{für } \alpha \leqq \xi < \beta.$$

16. Der Raum $\mathfrak{A}_{16}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen in $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktionen $a=f(x)$, die in einer gegebenen abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ aus $[\alpha, \beta]$ verschwinden.[31] Die Maßbestimmung sei auch hier gegeben durch (99). Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{16}$.

Sei $\mathfrak{M}'$ das Komplement von $\mathfrak{M}$ zu $[\alpha, \beta]$. Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{16}$ wählen wir die Menge aller auf $\mathfrak{M}'$ meßbaren Funktionen $b=\varphi(x)$, die auf $\mathfrak{M}'$ ein endliches (Lebesguesches) Integral besitzen. Die polare Maßbestimmung ist gegeben durch:

$$\Delta(b)=\int\limits_{\mathfrak{M}'}|\varphi|\,dx. \tag{100}$$

[30]) Eine andere Grundmenge liefern die Potenzen $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.
[31]) Natürlich muß $\mathfrak{M}$ echter Teil von $[\alpha, \beta]$ sein.

In der Tat gilt jedenfalls:

$$|U(a, b)| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f \varphi \, dx\right| = \left|\int_{\mathfrak{M}'} f \varphi \, dx\right| \leqq D(a) \cdot \Delta(b).$$

Sei sodann $b = \varphi(x)$ irgend eine Funktion aus $\mathfrak{B}_{16}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\rho > 0$, so daß, wenn $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}'$:

$$\int_{\mathfrak{N}} |\varphi| \, dx < \varepsilon \quad \text{für } \mu(\mathfrak{N}) < \rho.$$

Wir definieren eine (meßbare) Funktion $g^{*}(x)$ durch folgende Festsetzungen: Ist $\mathfrak{M}_1$ der Teil von $\mathfrak{M}'$, wo $\varphi(x) \geqq 0$, so sei:

$$g(x) = 1 \text{ auf } \mathfrak{M}_1; \quad g(x) = -1 \text{ auf } \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_1; \quad g(x) = 0 \text{ auf } \mathfrak{M}.$$

Es gibt einen abgeschlossenen Teil $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{M}_1$ und einen abgeschlossenen Teil $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_1$, so daß:

$$\mu(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{A}_1) < \rho; \quad \mu(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{A}_2) < \rho.$$

Die drei abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{M}$ sind zu je zweien fremd, haben daher zu je zweien p o s i t i v e n Abstand. Es gibt daher ein endliches Intervallsystem $\mathfrak{S}_1 \succ \mathfrak{A}_1$ und ein endliches Intervallsystem $\mathfrak{S}_2 \succ \mathfrak{A}_2$, die untereinander und zu $\mathfrak{M}$ fremd sind, und für die

$$\mu(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{A}_1) < \rho$$
$$\mu(\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{A}_2) < \rho.$$

Dann gibt es weiter eine stetige, der Ungleichung $|f| \leqq 1$ genügende Funktion, die $= 1$ ist auf $\mathfrak{S}_1$, $= -1$ auf $\mathfrak{S}_2$ und $= 0$ auf $\mathfrak{M}$. Sie gehört zu $\mathfrak{A}_{16}$, und es ist $D(a) = 1$. Ferner ist:

$$\left|\int_{\mathfrak{M}'} |\varphi| \, dx - \int_{\alpha}^{\beta} f . \varphi \, dx\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} (g - f) \varphi \, dx\right| \leqq 2 \left\{ \int_{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{A}_1} |\varphi| \, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{A}_1} |\varphi| \, dx + \int_{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{A}_2} |\varphi| \, dx + \int_{\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{A}_2} |\varphi| \, dx \right\} < 8\,\varepsilon.$$

Wir haben also:

$$D(a) = 1; \quad |\Delta(b) - U(a, b)| < 8\,\varepsilon;$$

damit ist gezeigt, daß tatsächlich durch (99) die polare Maßbestimmung gegeben ist.

Wir haben also den Satz:

XXVI*a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{16}$. Damit die Operationsfolge (91) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{16}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}'} |\varphi_n|\, dx \leqq \mu \quad \text{für alle } n.$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{16}$ wird gebildet durch folgende Funktionen f: sei ξ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}'$, und es gebe in $\mathfrak{M}$ sowohl Punkte $< \xi$, wie Punkte $> \xi$; für jedes $h > 0$, das so klein ist, daß in $(\xi - h, \xi + h)$ kein Punkt von $\mathfrak{M}$ liegt, bilden wir die Funktion:

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } x \leqq \xi - h \text{ und } x \geqq \xi + h \\ x - \xi + h \text{ in } [\xi - h, \xi] \\ \xi + h - x \text{ in } [\xi, \xi + h]. \end{cases} \tag{101}$$

Sei sodann ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}'$, und es gebe in $\mathfrak{M}$ keinen Punkt $< \xi$; dann bilden wir die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \xi - x & \text{für } x \leqq \xi \\ 0 & \text{für } x \geqq \xi \end{cases}. \tag{102}$$

Sei endlich ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}'$, und es gebe in $\mathfrak{M}$ keinen Punkt $> \xi$; dann bilden wir die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq \xi \\ x - \xi & \text{für } x \geqq \xi \end{cases}. \tag{103}$$

Die Gesamtheit aller Funktionen (101), (102), (103) [32]) bildet eine Grundmenge $\mathfrak{G}$.

In der Tat, seien α^* und β^* zwei Punkte von $\mathfrak{M}$, die das zu $\mathfrak{M}$ komplementäre Intervall (α^*, β^*) begrenzen. Es werde durch die Zerlegung:

$$\alpha^* = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{l-1} < x_l = \beta^*$$

in l gleiche Teile zerlegt. Jede für $x \leqq \alpha^*$ und $x \geqq \beta^*$ verschwindende, stetige Funktion f^*, die in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ linear ist, ist dann Linearkombination endlich vieler Funktionen (101), gehört somit zu $\mathfrak{G}'$. Gehört α nicht zu $\mathfrak{M}$ und ist α' der erste Punkt von $\mathfrak{M}$, so ist jede in $[\alpha, \alpha']$ stetige, streckenweise lineare, für $x \geqq \alpha'$ verschwindende Funktion f^{**} Linearkombination von endlich vielen Funktionen (102), gehört somit zu $\mathfrak{G}'$. Gehört endlich β nicht zu $\mathfrak{M}$ und ist β' der letzte Punkt von $\mathfrak{M}$,

[32]) Gehört α zu $\mathfrak{M}$, so gibt es keine Funktionen (102), gehört β zu $\mathfrak{M}$, so gibt es keine Funktionen (103).

so ist jede in $[\beta', \beta]$ stetige, streckenweise lineare, für $x \leq \beta'$ verschwindende Funktion f^{***} Linearkombination endlich vieler Funktionen (103) und gehört somit zu $\mathfrak{G}'$.

Sei nun α' der erste, β' der letzte Punkt von $\mathfrak{M}$, und seien (α_ν, β_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die sämtlichen bezüglich $[\alpha', \beta']$ zu $\mathfrak{M}$ komplementären Intervalle[33]), zu denen noch, wenn $\alpha < \alpha'$, das Intervall $[\alpha, \alpha')$ und wenn $\beta' < \beta$, das Intervall $(\beta', \beta]$ hinzukommen. Ist f eine Funktion aus $\mathfrak{A}_{16}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so ist:

$$|f| < \varepsilon \quad \text{in fast allen } [\alpha_\nu, \beta_\nu]. \tag{104}$$

Seien $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die endlich vielen $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, in denen nicht (104) gilt. Zu jedem von ihnen gibt es unter den oben beschriebenen Funktionen f^* eine, etwa f_ν^* $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so daß:

$$|f - f_\nu^*| < \varepsilon \quad \text{in } [\alpha_\nu, \beta_\nu] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist $\alpha < \alpha'$ bzw. $\beta' < \beta$, so gibt es unter den oben beschriebenen Funktionen f^{**} bzw. f^{***}, eine solche für die:

$$|f - f^{**}| < \varepsilon \quad \text{in } [\alpha, \alpha'] \quad \text{bzw.} \quad |f - f^{***}| < \varepsilon \quad \text{in } [\beta', \beta].$$

Dann ist: [34])

$$\bar{f} = f_1 + f_2 \cdots + f_\nu + f^{**} + f^{***}$$

eine Funktion aus $\mathfrak{G}'$, für die

$$|f - \bar{f}| < \varepsilon \quad \text{in } [\alpha, \beta].$$

Für $a = f(x)$, $a' = \bar{f}(x)$ ist also $D(a - a') < \varepsilon$, und somit ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{A}_{16}$. Also ist in der Tat $\mathfrak{G}$ eine Grundmenge, und wir haben die Sätze:

XXVI*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{16}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{16}$ beschränkte Operationsfolge (91) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{16}$, ist notwendig und hinreichend, daß (wenn α' und β' den ersten bzw. letzten Punkt von $\mathfrak{M}$ bezeichnen) für jedes Intervall $(\xi - h, \xi + h)$ aus $[\alpha', \beta']$, das keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthält, ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{\xi-h}^{\xi} (x - \xi + h)\, \varphi_n\, dx + \int_{\xi}^{\xi+h} (\xi + h - x)\, \varphi_n\, dx \right\} \tag{105}$$

existiere, ferner[35]) für jedes ξ aus $(\alpha, \alpha']$ ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\xi} (\xi - x)\, \varphi_n\, dx, \tag{106}$$

---

[33]) Vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 109.

[34]) In der folgenden Summe fehlt f^{**} bzw. f^{***}, wenn $\alpha = \alpha'$ bzw. $\beta' = \beta$.

[35]) Die den Grenzwert (106) bzw. (107) betreffende Bedingung entfällt, wenn $\alpha' = \alpha$ bzw. $\beta' = \beta$.

für jedes ξ aus $[\beta', \beta)$ ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\beta} (x - \xi)\, \varphi_n \, dx . \tag{107}$$

XXVI*c*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{16}$ und sei $\Phi(x)$ von endlicher Variation. Damit für die in $\mathfrak{A}_{16}$-konvergente Operationsfolge (91) insbesondere (94) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß die Grenzwerte[35] (105), (106), (107) gleich seien:

$$\int_{(\xi-h,\,\xi)} (x - \xi + h)\, d\Phi + \int_{(\xi,\,\xi+h)} (\xi + h - x)\, d\Phi +$$

$$+ h\bigl(\Phi(\xi+0) - \Phi(\xi-0)\bigr); \qquad \int_{[\alpha,\,\xi)} (\xi - x)\, d\Phi; \qquad \int_{(\xi,\,\beta]} (x - \xi)\, d\Phi .$$

§ 10. Singuläre Stieltjessche Integrale.

Die Sätze von § 9 sind einer Erweiterung fähig, die zu stande kommt, indem man die Fundamentaloperation und die polaren Räume anders wählt. Als Fundamentaloperation $U(a, b)$ wählen wir hier, wenn $a = f(x)$, $b = \Phi(x)$, das Stieltjessche Integral:

$$U(a, b) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d\Phi(x) .$$

Wir kehren zurück zur Betrachtung des Raumes $\mathfrak{A}_{13}$.

17. Der Raum $\mathfrak{A}_{13}$. Für $\mathfrak{A}$ wählen wir wieder den metrischen Raum $\mathfrak{A}_{13}$, wobei wir nur annehmen wollen, daß in (89) $0 \leqq \lambda \leqq 1$ sei. Als polaren Raum $\mathfrak{B}'_{13}$ wählen wir diesmal die Menge aller Funktionen $b = \Phi(x)$, die in $[\alpha, \beta]$ von endlicher Variation sind, außerhalb $[\alpha, \beta]$ gegeben sind durch:

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha) \quad \text{für } x \leqq \alpha; \qquad \Phi(x) = \Phi(\beta) \quad \text{für } x \geqq \beta, \tag{108}$$

und in ihren Unstetigkeitspunkten (mit Ausnahme von β) die Bedingung erfüllen[36]:

$$\Phi(x) = \Phi(x - 0) . \tag{109}$$

---

[35]) Die den Grenzwert (106) bzw. (107) betreffende Bedingung entfällt, wenn $\alpha' = \alpha$ bzw. $\beta' = \beta$.

[36]) Dies wird nur der Einfachheit halber festgesetzt und bedeutet keinerlei Einschränkung; denn bei der zu Beginn von § 9 gegebenen Definition der Integrale $\int f\, d\Phi$ hängen diese in keiner Weise von den Werten ab, die die Funktion $\Phi(x)$ in ihren Unstetigkeitspunkten annimmt, da die Mengenfunktion $\delta(\Phi)$ von diesen Werten gänzlich unabhängig ist. Vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I. S. 495, Satz XIV, aus dem sofort folgt:

$$\delta(\Phi, \mathfrak{E}_c) = \Phi(c+0) - \Phi(c-0).$$

Als **polare Maßbestimmung** erhalten wir hier:

$$\Delta(b) = V_\alpha^\beta(\Phi), \tag{110}$$

wo $V_\alpha^\beta(\Phi)$ die Variation von Φ in $[\alpha, \beta]$ bedeutet. In der Tat, zunächst ist:

$$|U(a, b)| = \left| \int_\alpha^\beta f \, d\Phi \right| \leqq D(a) \,.\, \Delta(b).$$

Sei sodann $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Es gibt wegen (109) eine Zerlegung

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta \tag{111}$$

des Intervalls $[\alpha, \beta]$, in der $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ **Stetigkeitspunkte** von $\Phi(x)$ sind, und für die[37]:

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| > V_\alpha^\beta(\Phi) - \varepsilon. \tag{112}$$

Wir definieren nun eine Funktion $f(x)$ durch:

$$f(x) = \operatorname{sgn}.\big(\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})\big) \quad \text{in} \quad (x_{i-1}, x_i) \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Setzen wir noch die Werte von $f(x)$ in den Punkten $x_i \, (i = 0, 1, \cdots, n)$ geeignet fest, so gehört $a = f(x)$ zu $\mathfrak{A}_{13}$, es ist $D(a) = 1$ und es ist bei Beachtung von (108) und (112) sowie der Stetigkeit von Φ in allen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$\int_\alpha^\beta f \, d\Phi = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{[x_{i-1}, x_i)} f \, d\Phi + \int_{[x_{n-1}, x_n]} f \, d\Phi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| > V_\alpha^\beta(\Phi) - \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß durch (110) die polare Maßbestimmung gegeben ist. Und wir haben die Sätze:

XXVII *a*. **Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}'_{13}$. Damit die Operationsfolge:**

$$U(a, b_n) = \int_\alpha^\beta f \, d\Phi_n \tag{113}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{13}$, ist notwendig und hinreichend, daß es ein M gibt, so daß:

$$|V_\alpha^\beta(\Phi_n)| \leqq M \quad \text{für alle } n. \tag{114}$$

---

[37]) H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 501, Satz VII.

XXVII *b*. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}'_{13}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{13}$ beschränkte Operationsfolge (113) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{13}$, ist notwendig und hinreichend, daß ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}\left(\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\alpha)\right)$$

und für jedes ξ aus (α, β) ein endlicher Grenzwert[38]):

$$\lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \lambda\Phi_n(\xi+0) - (1-\lambda)\Phi_n(\xi)\right\}$$

vorhanden sei.

XXVII *c*. Seien $b_n = \Phi_n(x)$ und $b = \Phi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{13}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{13}$ konvergente Operationsfolge (113) in ganz $\mathfrak{A}_{13}$ gelte:

$$\lim_{n=\infty}\int_\alpha^\beta f\,d\Phi_n = \int_\alpha^\beta f\,d\Phi, \tag{115}$$

ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{n=\infty}\left(\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\alpha)\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

und für jedes ξ aus (α, β):

$$\lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \lambda\Phi_n(\xi+0) - (1-\lambda)\Phi_n(\xi)\right\} =$$
$$= \Phi(\beta) - \lambda\Phi(\xi+0) - (1-\lambda)\Phi(\xi).$$

In den Sätzen XXVII sind die Sätze XXIII als Spezialfälle enthalten; man hat nur zu setzen:

$$\int_\alpha^x \varphi_n(x)\,dx = \Phi_n(x). \tag{116}$$

18. Der Raum $\mathfrak{A}_{14}$. Sei $\mathfrak{A}$ wieder der Raum $\mathfrak{A}_{14}$. Der polare Raum $\mathfrak{B}'_{14}$ sei identisch mit dem eben verwendeten Raume $\mathfrak{B}'_{13}$. Als polare Maßbestimmung ergibt sich auch hier wieder (110). Man erkennt dies wie in 17., indem man beachtet, daß die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ der Zerlegung (111) so gewählt werden können[39]), daß sie nicht zur Menge $\mathfrak{M}$ der für alle Funktionen von $\mathfrak{A}_{14}$ vorgeschriebenen Stetigkeitspunkte gehören.

---

[38]) Für die durch (92) definierte Funktion $f(x)$ ist:

$$\int_\alpha^\beta f\,d\Phi = \Phi(\beta) - \Phi(\xi+0) + (1-\lambda)\left(\Phi(\xi+0) - \Phi(\xi-0)\right).$$

[39]) Vgl. l. c. [37]).

Wir haben daher den Satz:

XXVIII *a*. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}'_{14}$. Damit die Operationsfolge (113) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{14}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gibt, so daß (114) gilt.

Beachtet man weiter, daß für jede Funktion (97) gilt:

$$\int_\alpha^\beta f\,d\Phi_n = \Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi+0) + f(\xi)\left\{\Phi_n(\xi+0) - \Phi_n(\xi-0)\right\}, \quad (117)$$

beachten wir ferner, daß hierin $f(\xi)$ ganz beliebig ist, und daß wegen (109): $\Phi(\xi - 0) = \Phi(\xi)$, so sehen wir, daß aus dem Bestehen eines endlichen Grenzwertes von (117) auch das Bestehen endlicher Grenzwerte von $\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi + 0)$ und von $\Phi_n(\xi + 0) - \Phi_n(\xi)$, somit auch von $\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi)$ folgt, und erhalten den Satz:

XXVIII *b*. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}'_{14}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{14}$ beschränkte Operationsfolge (113) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{14}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige ξ aus $[\alpha, \beta]$ endliche Grenzwerte:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi+0)\right\} \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi)\right\},$$

und falls α zu $\mathfrak{M}$ gehört, auch ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty}\left(\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\alpha)\right)$$

vorhanden seien.

XXVIII *c*. Seien $b_n = \Phi_n(x)$ und $b = \Phi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}'_{14}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{14}$ konvergente Operationsfolge (113) in ganz $\mathfrak{A}_{14}$ (115) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige ξ von $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi+0)\right\} &= \Phi(\beta) - \Phi(\xi+0); \\ \lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi)\right\} &= \Phi(\beta) - \Phi(\xi), \end{aligned} \quad (118)$$

und falls α zu $\mathfrak{M}$ gehört:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\alpha)\right\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \quad (118\,a)$$

Vermöge (116) sind wieder die Sätze XXIV in den Sätzen XXVIII als Spezialfälle enthalten.

Von besonderem Interesse ist auch hier wieder der Fall, daß $\mathfrak{M}$ nur aus dem Punkte x_0 von (α, β) besteht und:

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{für } x \leqq x_0; \quad \Phi(x) = 1 \quad \text{für } x > x_0. \tag{119}$$

Dann reduziert sich (118) auf:

$$\lim_{n=\infty} \{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi + 0)\} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \xi < x_0 \\ 0 & \text{wenn } \xi > x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{n=\infty} \{\Phi_n(\xi + 0) - \Phi_n(\xi)\} = 0 \quad \text{für } \xi \neq x_0.$$

Wir können hier aber auch den Fall betrachten, daß $\mathfrak{M}$ gänzlich leer ist, und $\Phi(x)$ wieder gegeben durch (119). Dann reduziert sich (118) auf:

$$\lim_{n=\infty} \{\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi + 0)\} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \xi < x_0 \\ 0 & \text{wenn } \xi \geqq x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{n=\infty} \{\Phi_n(\xi + 0) - \Phi_n(\xi)\} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \xi \neq x_0 \\ 1 & \text{wenn } \xi = x_0. \end{cases}$$

Treffen wir noch insbesondere für $\Phi_n(x)$ folgende Wahl: Seien $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)}$ Punkte aus (α, β), sei $\Phi_n(x)$ konstant in jedem der Intervalle $[\alpha, x_1^{(n)})$, $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$, $\ldots$, $(x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)})$, $(x_{k_n}^{(n)}, \beta]$ und sei

$$\Phi_n(x_i^{(n)} + 0) - \Phi_n(x_i^{(n)} - 0) = \Phi_n(x_i^{(n)} + 0) - \Phi_n(x_i^{(n)}) = \\ = \varphi_i^{(n)} \; (i = 1, 2, \cdots, k_n),$$

wo die $\varphi_i^{(n)}$ gegebene Konstante bedeuten. Dann wird:

$$V_\alpha^\beta(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}|;$$

$$\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi + 0) = \sum_{(\xi, \beta)} \varphi_i^{(n)};$$

$$\Phi_n(\xi + 0) - \Phi_n(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \xi \neq x_i^{(n)} \; (i = 1, 2, \cdots, k_n) \\ \varphi_i^{(n)} & \text{wenn } \xi = x_i^{(n)}, \end{cases}$$

und man erhält Sätze, die ich in einer früheren Arbeit [40]) „Über das Interpolationsproblem" entwickelt habe.

Auf das Studium von Folgen Stieltjesscher Integrale $\int_\alpha^\beta f \, d\Phi_n$, in denen f zu umfassenderen Räumen $\mathfrak{A}$ gehört, sei für diesmal nicht eingegangen.

---

[40]) H. Hahn, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 119 ff.

§ 11. Folgen verallgemeinerter Stieltjesscher Integrale $\int_\alpha^\beta f\,d\Phi_n$.

Die sich an die Lebesguesche Integraldefinition anschließende Definition Stieltjesscher Integrale $\int f\,d\Phi$, an die wir zu Beginn von § 9 erinnert haben, ist nur anwendbar, wenn $\Phi(x)$ von endlicher Variation ist, denn nur dann kann von der als „Zuwachs von Φ" bezeichneten Mengenfunktion $\delta(\mathfrak{M}, \Phi)$ gesprochen werden. Knüpfen wir aber an die Riemannsche Integraldefinition an, so können Integrale $\int f\,d\Phi$ auch definiert werden, wenn $\Phi(x)$ nicht von endlicher Variation ist.

Wir setzen im folgenden voraus, es habe $\Phi(x)$ überall in $[\alpha, \beta]$ einseitige Grenzwerte; für $x \leqq \alpha$ sei $\Phi(x) = \Phi(\alpha)$, für $x \geqq \beta$ sei $\Phi(x) = \Phi(\beta)$. Mit $\omega(x)$ bezeichnen wir die Schwankung [41]) von $\Phi(x)$ im Punkte x. Es gibt dann bei gegebenen $\varepsilon > 0$ in $[\alpha, \beta]$ nur endlich viele Punkte, in denen $\omega(x) \geqq \varepsilon$ ist. In der Tat, gäbe es ihrer unendlich viele, so müßten sie einen Häufungspunkt besitzen, was der vorausgesetzten Existenz einseitiger Grenzwerte von $\Phi(x)$ widerspricht. Ferner beweisen wir folgenden Hilfssatz:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ von folgender Eigenschaft: ist im Teilintervall $[x', x'']$ von $[\alpha, \beta]$ durchweg:

$$\omega(x) < \varepsilon, \tag{120}$$

und ist $x'' - x' < \delta$, so gilt auch für die Schwankung $\Lambda_{x'}^{x''}$ von $\Phi(x)$ in $[x', x'']$:

$$\Lambda_{x'}^{x''} < \varepsilon.$$

In der Tat, andernfalls gäbe es in $[\alpha, \beta]$ zu jedem ν ein Teilintervall $[x'_\nu, x''_\nu]$, in dem durchweg (120) gilt, und für das:

$$x''_\nu - x'_\nu < \frac{1}{\nu}, \quad \Lambda_{x'_\nu}^{x''_\nu} \geqq \varepsilon. \tag{121}$$

Aus $\{x'_\nu\}$ könnte eine konvergente Teilfolge $\{x'_{\nu_i}\}$ herausgegriffen werden:

$$\lim_{i=\infty} x'_{\nu_i} = \xi;$$

wegen der ersten Ungleichung (121) ist dann auch:

$$\lim_{i=\infty} x''_{\nu_i} = \xi.$$

Der Punkt ξ kann nur endlich vielen dieser Intervalle $\{x'_{\nu_i}, x''_{\nu_i}\}$ angehören, da sonst wegen der zweiten Ungleichung (121):

$$\omega(\xi) \geqq \varepsilon$$

[41]) Vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, Kap. III, § 2.

wäre; mindestens eine der beiden Ungleichungen:

$$x'_{\nu_i} < x''_{\nu_i} < \xi \quad \text{oder} \quad \xi < x'_{\nu_i} < x''_{\nu_i}$$

muß also für unendlich viele i erfüllt sein. Wegen der zweiten Ungleichung (121) steht das aber in Widerspruch mit der Voraussetzung, daß $\Phi(x)$ im Punkte ξ einseitige Grenzwerte besitzt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Sei nun $f(x)$ von endlicher Variation in $[\alpha, \beta]$. Sei Z die Zerlegung.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

des Intervalls $[\alpha, \beta]$ und ξ_i ein Punkt aus (x_{i-1}, x_i). Wir bilden die Summe:

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Big(\Phi(x_i - 0) - \Phi(x_{i-1} + 0)\Big) + \\ + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Big(\Phi(x_i + 0) - \Phi(x_i - 0)\Big).$$

Wir werden zeigen: ist $\{Z_\nu\}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $[\alpha, \beta]$ und kommt jeder Unstetigkeitspunkt von $\Phi(x)$ in fast allen Z_ν als Zerlegungspunkt vor — wir wollen dann sagen: $\{Z_\nu\}$ ist eine zu $\Phi(x)$ gehörige ausgezeichnete Zerlegungsfolge —, so existiert, wie immer ξ_i in (x_{i-1}, x_i) gewählt sein mag, ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} S(Z_\nu)$. In bekannter Weise kann dann gezeigt werden, daß dieser Grenzwert für alle zu $\Phi(x)$ gehörigen ausgezeichneten Zerlegungsfolgen und alle Wahlen der Punkte ξ_i derselbe ist, und wir definieren dann:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, d\,\Phi(x) = \lim_{\nu=\infty} S(Z_\nu).$$

An Stelle von $S(Z)$ bilden wir zunächst:

$$S_0(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i - 0)\Big(\Phi(x_i - 0) - \Phi(x_{i-1} + 0)\Big) + \\ + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Big(\Phi(x_i + 0) - \Phi(x_i - 0)\Big),$$

und zeigen: für jede zu $\Phi(x)$ gehörige ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{Z_\nu\}$ ist:

$$\lim_{\nu=\infty}\Big(S_0(Z_\nu) - S(Z_\nu)\Big) = 0. \tag{122}$$

Es ist:

$$S_0(Z) - S(Z) = \tag{123}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(x_i - 0)\right)\left(\Phi(x_i - 0) - \Phi(x_{i-1} + 0)\right).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; sei k die Anzahl der Unstetigkeitspunkte $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_k$ von $\Phi(x)$, in denen $\omega(x) \geqq \varepsilon$. Es gibt ein ν_0, so daß für $\nu \geqq \nu_0$ die Punkte $\bar{\xi}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ unter den Zerlegungspunkten von Z_ν vorkommen. Sei Z eine solche Zerlegung Z^ν $(\nu \geqq \nu_0)$. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß

$$\left.\begin{array}{ll} |\Phi(\bar{\xi}_j - 0) - \Phi(x)| \leqq \dfrac{\varepsilon}{k} & \text{für } \bar{\xi}_j - \delta < x < \bar{\xi}_j \\ |\Phi(x) - \Phi(\bar{\xi}_j + 0)| \leqq \dfrac{\varepsilon}{k} & \text{für } \bar{\xi}_j < x < \bar{\xi}_j + \delta \end{array}\right| \; (j = 1, 2, \cdots, k).$$

Ist ν_0 hinlänglich groß, so hat für $\nu \geqq \nu_0$ die Zerlegung Z_ν eine Norm $< \delta$. Ist Σ' die Summe derjenigen (höchstens $2k$) Summanden in (123), die von einem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ herrühren, das einen der k Punkte $\bar{\xi}_j$ enthält, und ist M so groß, daß:

$$|f(x)| \leqq M \quad \text{in } [\alpha, \beta],$$

so ist:

$$|\Sigma'| \leqq 4 M \varepsilon. \tag{124}$$

Sei Σ'' die Summe der übrigen Summanden in (123), die also von Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ herrühren, die keinen der Punkte $\bar{\xi}_j$ enthalten. In einem solchen Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist durchwegs $\omega(x) < \varepsilon$. Ist ν_0 hinlänglich groß, so ist für $\nu \geqq \nu_0$ die Norm von Z_ν auch kleiner als die Zahl δ des oben bewiesenen Hilfssatzes. Für jedes in Σ'' auftretende Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist dann zufolge des Hilfssatzes:

$$|\Phi(x_i + 0) - \Phi(x_{i-1} - 0)| \leqq \varepsilon,$$

und somit ist:

$$\left|\sum{}''\right| \leqq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(x_i - 0)| \leqq \varepsilon\, V_\alpha^\beta(f). \tag{125}$$

Aus (124) und (125) aber haben wir:

$$|S_0(Z_\nu) - S(Z_\nu)| \leqq \varepsilon \left(4M + V_\alpha^\beta(f)\right) \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0.$$

Damit ist (122) bewiesen.

Es wird also genügen, zu zeigen, daß für jede zu $\Phi(x)$ gehörige ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{Z_\nu\}$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} S_0(Z_\nu)$ existiert.

Sei nun $Z^{(i)}$ eine Unterzerlegung von Z, die aus Z entsteht, indem in ein einziges Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ von Z endlich viele Zerlegungspunkte

$$x_{i-1} = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l = x_i$$

eingeschaltet werden. Es ist:

$$\begin{gathered}
S_0(Z^{(i)}) - S_0(Z) = \Big\{f(z_1 - 0)\big(\Phi(z_1 - 0) - \Phi(z_0 + 0)\big) + \\
+ f(z_1)\big(\Phi(z_1 + 0) - \Phi(z_1 - 0)\big) + f(z_2 - 0)\big(\Phi(z_2 - 0) - \\
- \Phi(z_1 + 0)\big) + f(z_2)\big(\Phi(z_2 + 0) - \Phi(z_2 - 0)\big) + \cdots + \\
+ f(z_l - 0)\big(\Phi(z_l - 0) - \Phi(z_{l-1} + 0)\big)\Big\} - f(x_i - 0)\big(\Phi(x_i - 0) - \\
- \Phi(x_{i-1} + 0)\big) = \big(f(z_1 - 0) - f(x_i - 0)\big)\big(\Phi(z_1 - 0) - \\
- \Phi(z_0 + 0)\big) + \big(f(z_1) - f(x_i - 0)\big)\big(\Phi(z_1 + 0) - \Phi(z_1 - 0)\big) + \\
+ \cdots + \big(f(z_{l-1}) - f(x_i - 0)\big)\big(\Phi(z_{l-1} + 0) - \Phi(z_{l-1} - 0)\big) + \\
+ \big(f(z_l - 0) - f(x_i - 0)\big)\big(\Phi(z_l - 0) - \Phi(z_{l-1} + 0)\big).
\end{gathered}$$

Wenden wir hierauf die bekannte Ungleichung an:

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{m} u_\mu v_\mu\Big| \leqq \sigma\Big\{\sum_{\mu=1}^{m-1} |u_\mu - u_{\mu+1}| + |u_m|\Big\}, \tag{126}$$

wo σ die größte unter den Zahlen $|v_1|$, $|v_1 + v_2|$, $\cdots$, $|v_1 + v_2 + + \cdots + v_m|$ bedeutet, so erhalten wir, wenn M_i so gewählt wird, daß:

$$|\Phi(x) - \Phi(x_{i-1} + 0)| \leqq M_i \quad \text{in} \quad (x_{i-1}, x_i),$$

die Ungleichung:

$$\begin{gathered}
|S_0(Z^{(i)}) - S_0(Z)| \leqq M_i\{|f(z_1) - f(z_1 - 0)| + \\
+ |f(z_2 - 0) - f(z_1)| + \cdots + |f(z_{l-1}) - f(z_{l-1} - 0)| + \\
+ |f(z_l - 0) - f(z_{l-1})| \leqq M_i V_{x_{i-1}}^{x_i}(f).
\end{gathered} \tag{127}$$

Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, k die Anzahl der Unstetigkeitspunkte $\bar{\xi}_j$ von $\Phi(x)$, in denen $\omega(x) \geqq \varepsilon$, und ν_0 so groß gewählt, daß für $\nu \geqq \nu_0$ die $\bar{\xi}_j$ unter den Zerlegungspunkten von Z_ν

vorkommen. Sei wieder Z eine solche Zerlegung Z_ν. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß für je zwei Punkte x' und x'' aus $(\bar{\xi}_j - \delta, \bar{\xi}_j)$ gilt:

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| \leqq \varepsilon.$$

Ist ν_0 so groß, daß für $\nu \geqq \nu_0$ die Zerlegung Z_ν eine Norm $< \delta$ hat, so ist in (127), wenn x_i einer der Punkte $\bar{\xi}_j$ ist, $M_i \leqq \varepsilon$, und mithin:

$$|S_0(Z^{(i)}) - S_0(Z)| \leqq \varepsilon\, V_{x_{i-1}}^{x_i}(f). \tag{128}$$

Sei ν_0 auch so groß, daß für $\nu \geqq \nu_0$ die Norm der Zerlegung Z_ν kleiner als das δ des Hilfssatzes ist. Ist x_i keiner der Punkte $\bar{\xi}_j$, so ist für jedes (hinlänglich kleine) $h > 0$ in $[x_{i-1} + h, x_i]$ durchweg $\omega(x) < \varepsilon$, daher nach dem Hilfssatze $\Lambda_{x_{i-1}+h}^{x_i} < \varepsilon$, daher:

$$|\Phi(x) - \Phi(x_{i-1} + 0)| \leqq \varepsilon \quad \text{in} \quad (x_{i-1}, x_i).$$

Also folgt aus (127):

$$|S_0(Z^{(i)}) - S_0(Z)| \leqq \varepsilon\, V_{x_{i-1}}^{x_i}(f). \tag{129}$$

Sei ν_0 hinlänglich groß, und Z_ν eine aus der zu $\Phi(x)$ gehörigen ausgezeichneten Zerlegungsfolge $\{Z_\nu\}$ herausgegriffene Zerlegung mit $\nu \geqq \nu_0$; sei ferner Z' eine beliebige Unterzerlegung von Z. Mit $Z^{(i)}$ bezeichnen wir diejenige Unterzerlegung von Z, die aus Z entsteht, indem man zu Z die nach (x_{i-1}, x_i) fallenden Zerlegungspunkte von Z' hinzufügt. Dann ist:

$$S_0(Z') - S_0(Z) = \sum_{i=1}^{n} \left(S_0(Z^{(i)}) - S_0(Z)\right).$$

Für höchstens k Summanden gilt dann (128), für die übrigen (129), so daß wir haben:

$$|S_0(Z') - S_0(Z)| \leqq \varepsilon\, V_\alpha^\beta(f). \tag{130}$$

Seien nun $\nu \geqq \nu_0$ und $\nu' \geqq \nu_0$. Die Produktzerlegung $Z_\nu Z_{\nu'}$ ist sowohl Unterzerlegung von Z_ν als von $Z_{\nu'}$. Also ist nach (130):

$$|S_0(Z_\nu Z_{\nu'}) - S_0(Z_\nu)| < \varepsilon\, V_\alpha^\beta(f);$$

$$|S_0(Z_\nu Z_{\nu'}) - S_0(Z_{\nu'})| < \varepsilon\, V_\alpha^\beta(f),$$

und somit auch:

$$|S_0(Z_\nu) - S_0(Z_{\nu'})| < 2\,\varepsilon\, V_\alpha^\beta(f) \qquad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0, \ \nu' \geqq \nu_0.$$

Damit ist die Existenz eines endlichen Grenzwertes $\lim\limits_{\nu=\infty} S_0(Z_\nu)$ und also auch die Existenz des Integrals $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi(x)$ nachgewiesen.

Offenkundig ändert sich der Wert dieses Integrals nicht, wenn man zu $\Phi(x)$ eine additive Konstante hinzufügt; wir beschränken also die Allgemeinheit nicht, wenn wir ein- für allemal festsetzen:

$$\Phi(\alpha) = 0.$$

Wählen wir sodann M so, daß:

$$|\Phi(x)| \leqq M \text{ in } [\alpha, \beta],$$

so erhalten wir unter Benützung von (126):

$$|S_0(Z)| \leqq M \sum_{i=1}^{n} \{|f(x_i - 0) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_i - 0)|\} + \\ + M|f(\beta)|,$$

und daraus durch Grenzübergang:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi(x)\right| \leqq M\{V_\alpha^\beta(f) + |f(\beta)|\}. \tag{131}$$

In diesem Paragraphen wählen wir als Fundamentaloperation für $a = f(x)$, $b = \Phi(x)$:

$$U(a, b) = \int_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi(x).$$

19. Der Raum $\mathfrak{A}_{17}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Funktionen $f(x)$ endlicher Variation, und die Maßbestimmung sei gegeben durch:

$$D(a) = V_\alpha^\beta(f) + |f(\beta)|. \tag{132}$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{17}$. Es ist in ihm die Relation $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$ $\big($wo $a = f(x)$, $a_\nu = f_\nu(x)\big)$ gleichbedeutend mit dem gleichzeitigen Bestehen von:

$$\lim_{\nu=\infty} V_\alpha^\beta(f - f_\nu) = 0; \quad \lim_{\nu=\infty} f_\nu(\beta) = f(\beta).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; es ist dann:

$$V_\alpha^\beta(f - f_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |f_\nu(\beta) - f(\beta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für fast alle } \nu. \tag{133}$$

Aus der ersten dieser Ungleichungen folgt weiter:

$$\left|f(x) - f_\nu(x) - \big(f(\beta) - f_\nu(\beta)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in } [\alpha, \beta],$$

und daraus zusammen mit der zweiten Ungleichung (133):

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{in } [\alpha, \beta] \quad \text{für fast alle } \nu.$$

Aus $\underset{\nu=\infty}{\mathbf{L}} a_\nu = a$ folgt also, daß die $f_\nu(x)$ gleichmäßig in $[\alpha, \beta]$ gegen $f(x)$ konvergieren.

Sei nun $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Folge aus $\mathfrak{A}_{17}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein ν_0, so daß:

$$D(a_\nu - a_{\nu'}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d. h.} \quad V_\alpha^\beta(f_\nu - f_{\nu'}) < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$|f_\nu(\beta) - f_{\nu'}(\beta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0, \quad \nu' \geqq \nu_0.$$

Wie soeben folgt daraus:

$$|f_\nu - f_{\nu'}| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_0, \quad \nu' \geqq \nu_0 \text{ in } [\alpha, \beta];$$

es gibt mithin eine Funktion $f(x)$, gegen die die $f_\nu(x)$ gleichmäßig in $[\alpha, \beta]$ konvergieren. Da $\{a_\nu\}$ eine Cauchysche Folge, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem i ein ν_i, so daß:

$$D(a_{\nu_i} - a_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^i} \quad \text{für } \nu > \nu_i, \tag{134}$$

wobei noch ohne weiteres die Folge $\{\nu_i\}$ als wachsend angenommen werden kann. Aus (134) folgt:

$$V_\alpha^\beta(f_{\nu_i} - f_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^i}; \quad |f_{\nu_i}(\beta) - f_\nu(\beta)| < \frac{\varepsilon}{2^i} \quad \text{für } \nu > \nu_i.$$

Nun ist:

$$f(x) - f_{\nu_1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{\nu_{i+1}}(x) - f_{\nu_i}(x)\right),$$

und somit [42]):

$$V_\alpha^\beta(f - f_{\nu_1}) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} V_\alpha^\beta(f_{\nu_{i+1}} - f_{\nu_i}) < \varepsilon,$$

$$|f(\beta) - f_{\nu_1}(\beta)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |f_{\nu_{i+1}}(\beta) - f_{\nu_i}(\beta)| < \varepsilon,$$

und daher auch, wenn $a = f(x)$ gesetzt wird:

$$D(a - a_{\nu_1}) < 2\varepsilon. \tag{135}$$

Für $\nu > \nu_1$ ist aber wegen (134)

$$D(a_\nu - a_{\nu_1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

---

[42]) Vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 490, Satz VI.

was zusammen mit (135) ergibt:

$$D(a - a_\nu) < 3\varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq \nu_1;$$

also ist $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}}\, a_\nu = a$, d. h. der Raum $\mathfrak{A}_{17}$ ist vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{17}$ wählen wir die Menge aller Funktionen $\Phi(x)$, die überall in $[\alpha, \beta]$ endliche einseitige Grenzwerte besitzen, außerhalb $[\alpha, \beta]$ gegeben sind durch

$$\Phi(x) = 0 \text{ für } x \leqq \alpha,$$
$$\Phi(x) = \Phi(\beta) \text{ für } x > \beta,$$

und in ihren Unstetigkeitspunkten (mit Ausnahme von β) der Bedingung genügen

$$\Phi(x) = \Phi(x - 0).$$

Das Hinzufügen dieser Bedingung bedeutet keinerlei Einschränkung, da der Wert des Integrals $\int_\alpha^\beta f\, d\Phi$ ganz unabhängig ist von den Werten, die die Funktion Φ in ihren Unstetigkeitspunkten annimmt.

Setzen wir:

$$\Delta(b) = \text{obere Schranke von } |\Phi(x)| \text{ in } [\alpha, \beta], \tag{136}$$

so ist wegen (131) für jedes a aus $\mathfrak{A}_{17}$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_{17}$:

$$|U(a, b)| \leqq D(a)\, \Delta(b).$$

Sei sodann $b = \Phi(x)$ irgend ein Punkt aus $\mathfrak{B}_{17}$, und sei ξ ein Wert aus $[\alpha, \beta]$, für den:

$$|\Phi(\xi)| > \Delta(b) - \varepsilon.$$

Ist $\xi < \beta$, so wählen für $a = f(x)$ folgende Funktion:

$$f(x) = 1 \quad \text{für } x < \xi; \quad f(x) = 0 \quad \text{für } x \geqq \xi. \tag{137}$$

Dann gehört a zu $\mathfrak{A}_{17}$, und es ist:

$$D(a) = 1; \quad |U(a, b)| = |\Phi(\xi - 0)| = |\Phi(\xi)| > \Delta(b) - \varepsilon.$$

Ist $\xi = \beta$, so wählen wir $f(x) = 1$ in $[\alpha, \beta]$ und erhalten wieder:

$$D(a) = 1; \quad |U(a, b)| = |\Phi(\beta)| > \Delta(b) - \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß durch (136) die polare Maßbestimmung gegeben ist.

Wir haben also den Satz:

XXIXa. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{17}$. Damit die Operationsfolge:

$$U(a, b_n) = \int_\alpha^\beta f(x)\, d\,\Phi_n(x) \tag{138}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{17}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, so daß:

$$|\Phi_n(x)| \leqq M \quad \text{für alle } x \text{ von } [\alpha, \beta] \text{ und alle } n. \tag{139}$$

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{17}$ wird gebildet von allen stetigen Funktionen endlicher Variation zusammen mit den Funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < \xi \\ 1 \text{ für } x > \xi \end{cases}; \quad f(\xi) \text{ beliebig} \quad (\alpha \leqq \xi \leqq \beta). \tag{140}$$

Denn sei nun $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}_{17}$. Sie kann zerlegt werden in:[43])

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

wo $f_1(x)$ stetig und $f_2(x)$ die Funktion der Sprünge. Sowohl f_1 als f_2 sind von endlicher Variation. Also gehört f_1 zu $\mathfrak{G}$, und um zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ eine Grundmenge ist, genügt es zu zeigen: Es gibt, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, eine Linearkombination f^* endlich vieler Funktionen (140), so daß für $a = f_2$, $a' = f^*$:

$$D(a - a') < \varepsilon. \tag{141}$$

Nun hat f_2 folgende Gestalt:[44])

$$f_2(x) = f(\alpha + 0) - f(\alpha) + \sum_{(\alpha, x)} \{f(x_\nu + 0) - f(x_\nu - 0)\} + \\ + f(x) - f(x - 0), \tag{142}$$

wobei mit x_ν die Unstetigkeitspunkte von f bezeichnet sind, und das Zeichen $\sum\limits_{(\alpha, x)}$ andeutet, daß über alle nach (α, x) fallenden Unstetigkeitspunkte zu summieren ist. Da die über alle Unstetigkeitspunkte x_ν von (α, β) erstreckte Reihe:

$$\sum_\nu \{|f(x_\nu + 0) - f(x_\nu)| + |f(x_\nu) - f(x_\nu - 0)|\}$$

[43]) Vgl. l. c. [42]), S. 507, Satz III.
[44]) Vgl. l. c. [42]), S. 507.

konvergent ist[45]), kann ν_0 so bestimmt werden, daß:

$$\sum_{\nu > \nu_0} \left\{ |f(x_\nu + 0) - f(x_\nu)| + |f(x_\nu) - f(x_\nu - 0)| \right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{143}$$

Lassen wir in (142) unter dem Summenzeichen alle Glieder mit einem Index $> \nu_0$ weg, so entstehe die Summe:

$$\sum_{(\alpha, x)}' \left\{ f(x_\nu + 0) - f(x_\nu - 0) \right\}.$$

Wir setzen:

$$f^*(x) = f(\alpha + 0) - f(\alpha) + \sum_{(\alpha, x)}' \left\{ f(x_\nu + 0) - f(x_\nu - 0) \right\} +$$
$$+ \vartheta \big(f(x) - f(x - 0) \big),$$

wo $\vartheta = 1$ für $x = x_1, x_2, \cdots, x_{\nu_0}, \beta$, sonst $= 0$. Dann ist f^* konstant in jedem Intervall, das keinen der Punkte $x_1, x_2, \cdots, x_{\nu_0}$ enthält, und mithin Linearkombination endlich vieler Funktionen (140). Ferner ist:

$$f_2(x) - f^*(x) = \sum_{(\alpha, x)}'' \left\{ f(x_\nu + 0) - f(x_\nu - 0) \right\} +$$
$$+ (1 - \vartheta) \big(f(x) - f(x - 0) \big),$$

wo in Σ'' nur die x_ν mit $\nu > \nu_0$ aufzunehmen sind. Daraus folgt sofort bei Beachtung von (143)[46]):

$$V_\alpha^\beta (f_2 - f^*) = \sum_{\nu > \nu_0} \left\{ |f(x_\nu + 0) - f(x_\nu)| + |f(x_\nu) - f(x_\nu - 0)| \right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_2(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{in } [\alpha, \beta].$$

Damit aber ist (141) nachgewiesen.

Für die Funktion (140) ist:[47])

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi_n(x) = \Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi + 0) + f(\xi) \big(\Phi_n(\xi + 0) - \Phi_n(\xi) \big).$$

Soll also für jede Funktion (140) ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi_n(x)$ existieren, so muß, da $f(\xi)$ beliebig ist, sowohl ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \big(\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\xi + 0) \big)$ als auch ein

---

[45]) l. c. [42]), S. 505, Satz I.

[46]) Vgl. l. c. [42]), S. 509, Satz V und V α.

[47]) Wenn $\xi < \beta$. Für $\xi = \beta$ tritt an Stelle des letzten Gliedes:

$$f(\beta) \big(\Phi_n(\beta) - \Phi_n(\beta - 0) \big).$$

endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\left(\Phi_n(\xi+0)-\Phi_n(\xi)\right)$, mithin auch ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\left(\Phi_n(\beta)-\Phi_n(\xi)\right)$ existieren. Setzen wir hierin insbesondere $\xi=\alpha$ und beachten, daß $\Phi_n(\alpha)=0$, so sehen wir, daß ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\Phi_n(\beta)$, mithin auch endliche Grenzwerte $\lim\limits_{n=\infty}\Phi_n(\xi+0)$ und $\lim\limits_{n=\infty}\Phi_n(\xi)$ existieren müssen. Bei Beachtung von [47]) sehen wir ebenso, daß ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\Phi_n(\beta-0)$ existieren muß.

Sei nun f eine beliebige stetige Funktion endlicher Variation. Nach Definition ist:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,d\,\Phi_n(x)=\lim_{\nu=\infty} S_0(Z_\nu), \tag{144}$$

wo Z_ν eine zu Φ_n gehörige ausgezeichnete Zerlegungsfolge durchläuft. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ kann geschrieben werden:

$$S_0(Z)=f(x_0)\left(\Phi_n(x_0+0)-\Phi_n(x_0)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\Phi_n(x_i+0)-\Phi_n(x_{i-1}+0)\right),$$

oder unter Benützung einer bekannten Umformung unter Beachtung von $\Phi_n(x_0)=\Phi_n(\alpha)=0$:

$$S_0(Z)=-\sum_{i=1}^{n}\Phi_n(x_{i-1}+0)\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)+\Phi_n(\beta)f(\beta).$$

Läßt man wieder Z die ausgezeichnete Zerlegungsfolge Z_ν durchlaufen, so ergibt also (144):

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,d\,\Phi_n(x)=\Phi_n(\beta)f(\beta)-\int_\alpha^\beta \Phi_n(x)\,d f(x),$$

wo nun das rechts auftretende Integral ein gewöhnliches Stieltjessches Integral ist.

Setzen wir:

$$x+V_\alpha^x(f)=t(x)=t,$$

und bezeichnen die sich daraus ergebende Umkehrfunktion mit $x=x(t)$. Sei $t(\alpha)=\sigma$, $t(\beta)=\tau$, und $[t',t'']$ ein beliebiges Teilintervall von $[\sigma,\tau]$, und $[x',x'']$ das vermöge $x=x(t)$ entsprechende Teilintervall von $[\alpha,\beta]$. Dann ist:

$$\left|f\left(x(t'')\right)-f\left(x(t')\right)\right|=\left|f(x'')-f(x')\right|\leqq V_{x'}^{x''}(f)\leqq\left|t''-t'\right|;$$

also ist die Funktion $f(x(t))$ eine in $[\sigma, \tau]$ totalstetige Funktion t. Also kann geschrieben werden:

$$\int_\alpha^\beta \Phi_n(x)\, d f(x) = \int_\sigma^\tau \Phi_n(x(t))\, d f(x(t)) = \int_\sigma^\tau \Phi_n(x(t)) \frac{d}{dt} f(x(t))\, dt,$$

wo das rechtsstehende Integral ein Lebesguesches Integral ist. Da nun, wie wir sahen, überall in $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x),$$

also überall in $[\sigma, \tau]$ ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(x(t)) = \Phi(x(t))$$

existiert, so folgt nach einem bekannten Satze über Lebesguesche Integrale aus (139):

$$\lim_{n=\infty} \int_\sigma^\tau \Phi_n(x(t)) \frac{d}{dt} f(x(t))\, dt = \int_\sigma^\tau \Phi(x(t)) \frac{d}{dt} f(x(t))\, dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \Phi(x)\, d f(x).$$

Wir können daher die Sätze aussprechen:

XXIX b. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{17}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{17}$ beschränkte Operationsfolge (138) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{17}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes x aus $[\alpha, \beta)$ endliche Grenzwerte $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(x)$, $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(x+0)$, sowie endliche Grenzwerte $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(\beta)$, $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(\beta-0)$ existieren.

XXIX c. Seien $b_n = \Phi_n(x)$ und $b = \Phi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{17}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{17}$ konvergente Operationsfolge (138) in ganz $\mathfrak{A}_{17}$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi_n(x) = \int_\alpha^\beta f(x)\, d\Phi(x), \tag{145}$$

ist notwendig und hinreichend, daß in $[\alpha, \beta)$:

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x);\quad \lim_{n=\infty} \Phi_n(x+0) = \Phi(x+0); \tag{146}$$
$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(\beta) = \Phi(\beta);\quad \lim_{n=\infty} \Phi_n(\beta-0) = \Phi(\beta-0).$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall [48]) ist der, daß

$$\Phi_n(x) = \int_\alpha^x \varphi_n(x)\,dx; \quad \Phi(x) = 0, \tag{147}$$

wo die $\varphi_n(x)$ integrierbare Funktionen bedeuten; dann wird:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,d\,\Phi_n(x) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

und es reduziert sich Bedingung (139) von Satz XXIX a auf:

$$\left|\int_\alpha^x \varphi_n(x)\,dx\right| \leq M \text{ für alle } x \text{ aus } [\alpha, \beta] \text{ und alle } n; \tag{148}$$

aus (145) von Satz XXIX c wird:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f\,\varphi_n\,dx = 0,$$

und aus (146):

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^x \varphi_n(x)\,dx = 0, \quad \text{für } \alpha < x \leq \beta.$$

Einen anderen Spezialfall [49]) erhält man, indem man $\Phi_n(x)$ und $\Phi(x)$ wählt wie am Schlusse von § 10.

20. Der Raum $\mathfrak{A}_{18}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen jenen Funktionen endlicher Variation $a = f(x)$, die in allen Punkten einer Menge $\mathfrak{M}$, deren Komplement in $[\alpha, \beta]$ dicht ist, stetig sind. Die Maßbestimmung in $\mathfrak{A}$ sei wieder gegeben durch (132). Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{18}$. Wie bei $\mathfrak{A}_{17}$ erkennen wir, daß er vollständig ist, indem wir noch beachten, daß, wenn $a_\nu = f_\nu(x)$ eine Cauchysche Folge aus $\mathfrak{A}_{18}$ ist, die $f_\nu(x)$ gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion konvergieren, die somit — ebenso wie die $f_\nu(x)$ — in allen Punkten von $\mathfrak{M}$ stetig ist. Der polare Raum $\mathfrak{B}_{18}$ kann identisch mit $\mathfrak{B}_{17}$ gewählt werden. Als polare Maßbestimmung ergibt sich dann wieder (136), wenn man beachtet, daß in (137) für ξ ein nicht zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Punkt gewählt werden kann. Wir haben also den Satz:

XXX a. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{18}$. Damit die Operationsfolge (138) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{18}$, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl M gebe, für die (139) gilt.

[48]) H. Lebesgue l. c. [20]), S. 65.
[49]) H. Hahn l. c. [40]), S. 137.

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{18}$ wird gebildet durch die stetigen Funktionen endlicher Variation zusammen mit denjenigen Funktionen (140), für die ξ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört. Das gibt die Sätze:

XXX*b*. Sei $b_n = \Phi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{18}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{18}$ beschränkte Operationsfolge (138) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{18}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige x aus (α, β) endliche Grenzwerte $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(x)$ und $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(x+0)$, sowie ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(\beta)$ und, falls β nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(\beta-0)$ existiere.

XXX*c*. Seien $b_n = \Phi_n(x)$ und $b = \Phi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{18}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{18}$ konvergente Operationsfolge (138) in ganz $\mathfrak{A}_{18}$ (145) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für alle nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörigen x aus (α, β) die Gleichungen (146) gelten, ferner: $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(\beta) = \Phi(\beta)$, und falls β nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört: $\lim\limits_{n=\infty} \Phi_n(\beta-0) = \Phi(\beta-0)$.

Als besonders wichtigen Spezialfall [50]) heben wir den hervor, wo $\mathfrak{M}$ aus einem einzigen Punkte ξ von (α, β) besteht, die $\Phi_n(x)$ gegeben sind durch (147) und $\Phi(x)$ durch:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leqq \xi \\ 1 \text{ für } x > \xi. \end{cases}$$

Aus (145) wird dann:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f \varphi_n \, dx = f(\xi),$$

aus (139) wird (148), und aus (146):

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^x \varphi_n \, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } x < \xi \\ 1 \text{ für } x > \xi. \end{cases}$$

§ 12. Folgen verallgemeinerter Stieltjesscher Integrale $\int\limits_\alpha^\beta \varphi_n \, dF$.

In diesem Paragraphen wählen wir als Fundamentaloperation für $a = F(x)$, $b = \varphi(x)$:

$$U(a, b) = \int_\alpha^\beta \varphi(x) \, dF(x).$$

---

[50]) H. Lebesgue l. c. [20]), S. 50.

21. Der Raum $\mathfrak{A}_{19}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen Funktionen $a = F(x)$, die überall in $[\alpha, \beta]$ endliche einseitige Grenzwerte besitzen, außerhalb $[\alpha, \beta]$ gegeben sind durch:

$$F(x) = 0 \text{ für } x \leqq \alpha; \quad F(x) = F(\beta) \text{ für } x > \beta,$$

und in ihren Unstetigkeitspunkten (mit Ausnahme von β) der Bedingung genügen:

$$F(x) = F(x-0).$$

Die Maßbestimmung sei gegeben durch:

$$D(a) = \text{obere Schranke von } |F| \text{ in } [\alpha, \beta]. \tag{149}$$

Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{19}$. Wie bei $\mathfrak{A}_{13}$ sehen wir, daß er vollständig ist.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{19}$ wählen wir die Menge aller Funktionen endlicher Variation $b = \varphi(x)$. Setzen wir:

$$\Delta(b) = V_\alpha^\beta(\varphi) + |\varphi(\beta)|, \tag{150}$$

so ist zufolge (131) für jedes a aus $\mathfrak{A}_{19}$ und jedes b aus $\mathfrak{B}_{19}$:

$$|U(a, b)| \leqq D(a) \,.\, \Delta(b). \tag{151}$$

Sei nun $b = \varphi(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{B}_{19}$. Es gibt eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$, so daß:

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| > V_\alpha^\beta(\varphi) - \varepsilon. \tag{152}$$

Dabei kann ohne weiteres angenommen werden, daß in je zwei aufeinanderfolgenden Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ die Differenzen $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})$ entgegengesetztes Zeichen haben, da aufeinanderfolgende Teilintervalle, in denen dies nicht zutrifft, in eines zusammengezogen werden können, ohne daß dadurch die Summe auf der linken Seite von (152) geändert wird. Dann aber ist:

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| = \left|\varphi(\alpha) + 2\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \varphi(x_i) + (-1)^n \varphi(\beta)\right|,$$

und somit:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\varphi(\beta)| = \\ &= \left|\varphi(\alpha) + 2\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \varphi(x_i) + \lambda(-1)^n \varphi(\beta)\right|, \end{aligned} \tag{153}$$

wo λ den Wert 0 oder 2 hat. Wir setzen nun:

$$\left.\begin{aligned} &F(\alpha)=0;\ F(x)=(-1)^{i-1} \text{ in } (x_{i-1}, x_i]\ (i=1,2,\ldots,n-1); \\ &F(x)=(-1)^{n-1} \text{ in } (x_{n-1}, x_n);\ \ F(\beta)=(-1)^{n-1}(1-\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Dann gehört $F(x)$ zu $\mathfrak{A}_{19}$, für $a=F(x)$ ist $D(a)=1$, und es wird:

$$\int_\alpha^\beta \varphi\, dF = \varphi(\alpha) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \varphi(x_i) + \lambda(-1)^n \varphi(\beta),$$

und somit wegen (153) und (152) für $a=F(x)$, $b=\varphi(x)$:

$$|U(a,b)| > \Delta(b) - \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß durch (150) die polare Maßbestimmung gegeben ist.

Wir haben also den Satz:

XXXI*a*. Sei $b_n=\varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{19}$. Damit die Operationsfolge:

$$U(a,b_n)=\int_\alpha^\beta \varphi_n\, dF \tag{155}$$

beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{19}$, ist notwendig und hinreichend, daß es ein M gibt, so daß:

$$V_\alpha^\beta(\varphi_n) + |\varphi_n(\beta)| \leqq M \quad \text{für alle } n. \tag{156}$$

Wie bei $\mathfrak{A}_{13}$ sehen wir, daß eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{19}$ gegeben ist durch die Funktionen:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq \xi \\ 1 & \text{für } x > \xi \end{cases} \quad \alpha \leqq \xi < \beta, \tag{157}$$

und die Funktion:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x < \beta \\ 1 & \text{für } x \geqq \beta. \end{cases} \tag{158}$$

Für diese Funktionen ist:

$$\int_\alpha^\beta \varphi\, dF = \varphi(\xi) \quad (\alpha \leqq \xi \leqq \beta).$$

Somit haben wir:

XXXI*b*. Sei $b_n=\varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{19}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{19}$ beschränkte Operationsfolge (155) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{19}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes x aus $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x)$ vorhanden sei.

XXXI*c*. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{19}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{19}$ konvergente Operationsfolge (155) in ganz $\mathfrak{A}_{19}$ gelte:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n \, dF = \int_\alpha^\beta \varphi \, dF \tag{159}$$

ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta). \tag{160}$$

Von besonderem Interesse ist hier der Fall:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x < x_0 \\ 0 \text{ für } x \geqq x_0 \end{cases} \qquad (\alpha < x_0 < \beta).$$

Dann geht (159) über in:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n \, dF = F(x_0), \tag{161}$$

und aus (160) wird:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x < x_0 \\ 0 \text{ für } x \geqq x_0. \end{cases}$$

22. Der Raum $\mathfrak{A}_{20}$. Es bestehe der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen denjenigen Funktionen $a = F(x)$ von $\mathfrak{A}_{19}$, die in einer gegebenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ von (α, β), deren Komplement in $[\alpha, \beta]$ dicht ist, stetig sind. Die Maßbestimmung sei wieder gegeben durch (149). Den so entstehenden metrischen Raum bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_{20}$. Er ist vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{20}$ nehmen wir die Menge aller derjenigen Funktionen endlicher Variation $b = \varphi(x)$, die in keinem Punkte von $\mathfrak{M}$ eine äußere Sprungstelle[51]) besitzen. Hat $\Delta(b)$ wieder die Bedeutung (150), so gilt wieder (151).

Sei nun $b = \varphi(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{B}_{20}$. Es gibt dann eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$, in der kein Zerlegungspunkt zu $\mathfrak{M}$ gehört, und für die (152) gilt[52]). Wie bei $\mathfrak{A}_{19}$ erkennen wir sodann, daß die polare Maßbestimmung durch (150) gegeben ist, und können den Satz aussprechen:

---

[51]) Vgl. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 499.
[52]) Vgl. l. c. [51]), S. 500, Satz V.

XXXII*a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{20}$. Damit die Operationsfolge (155) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{20}$, ist notwendig und hinreichend, daß es ein M gibt, so daß (156) gilt.

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ ist hier gegeben durch diejenigen Funktionen (157), für die ξ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, zusammen mit der Funktion (158). Somit haben wir:

XXXII*b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{20}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{20}$ beschränkte Operationsfolge (155) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{20}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige x aus $[\alpha, \beta]$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x)$ vorhanden sei.

XXXII*c*. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{20}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{20}$ konvergente Operationsfolge (155) in ganz $\mathfrak{A}_{20}$ (159) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige x aus $[\alpha, \beta]$:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

23. Der Raum $\mathfrak{A}_{21}$. Es bestehe nun der Raum $\mathfrak{A}$ aus allen in $[\alpha, \beta]$ stetigen, in α verschwindenden Funktionen $a = F(x)$. Für $x < \alpha$ setzen wir wieder $F(x) = 0$, für $x > \beta$ setzen wir $F(x) = F(\beta)$. Die Maßbestimmung sei wieder gegeben durch (149). Den so entstehenden metrischen Raum nennen wir $\mathfrak{A}_{21}$. Er ist vollständig.

Als polaren Raum $\mathfrak{B}_{21}$ nehmen wir die Menge aller in α und β stetigen Funktionen endlicher Variation $b = \varphi(x)$, die in $[\alpha, \beta]$ keine äußere Sprungstelle besitzen. Hat $\Delta(b)$ die Bedeutung (150), so gilt wieder (151).

Sei nun $b = \varphi(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{B}_{21}$. Es gibt dann eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$, in der sämtliche Zerlegungspunkte Stetigkeitspunkte von φ sind, und für die (152) gilt. Dann haben wir wieder (153). Nun wählen wir ein $h > 0$ so klein, daß:

$$\alpha = x_0 < x_0 + h < x_1 < x_1 + h < x_2 < \cdots$$
$$< x_{n-1} + h < x_n - h < x_n = \beta,$$

und definieren eine Funktion $a = F_h(x)$ durch:

$$F_h(x) = \frac{1}{h}(x - \alpha) \text{ in } [\alpha, \alpha + h],$$

$$F_h(x) = (-1)^{i-1} \text{ in } [x_{i-1} + h, x_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$F_h(x) = (-1)^{i-1}\left(1 - \frac{2}{h}(x - x_i)\right) \text{ in } [x_i, x_i + h] \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$F_h(x) = (-1)^{n-1} \text{ in } [x_{n-1} + h, \beta - h],$$

$$F_h(x) = (-1)^{n-1}\left(1 - \lambda - \frac{\lambda}{h}(x - \beta)\right) \text{ in } [\beta - h, \beta].$$

Dann gehört $F_h(x)$ zu $\mathfrak{A}_{21}$, und es ist $D(a) = 1$. Ferner ist, weil $F(x)$ stetig ist:

$$\int_\alpha^\beta \varphi\, d F_h = \int_\alpha^{\alpha+h} \varphi\, d F_h + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}+h}^{x_i} \varphi\, d F_h + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+h} \varphi\, d F_h + \\ + \int_{x_{n-1}+h}^{\beta-h} \varphi\, d F_h + \int_{\beta-h}^{\beta} \varphi\, d F_h.$$

Hierin ist, da φ in allen Punkten x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ stetig ist:

$$\lim_{h=0} \int_\alpha^{\alpha+h} \varphi\, d F_h = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_\alpha^{\alpha+h} \varphi\, dx = \varphi(\alpha),$$

$$\int_{x_{i-1}+h}^{x_i} \varphi\, d F_h = 0; \ \lim_{h=0} \int_{x_i}^{x_i+h} \varphi\, d F_h = \lim_{h=0} (-1)^i \frac{2}{h} \int_{x_i}^{x_i+h} \varphi\, dx = 2.(-1)^i\, \varphi(x_i);$$

$$\int_{{}_{n-}+h}^{\beta-h} \varphi\, d F_h = 0; \ \lim_{h=0} \int_{\beta-h}^{\beta} \varphi\, d F_h = \lim_{h=0} (-1)^n \frac{\lambda}{h} \int_{\beta-h}^{\beta} \varphi\, dx = \lambda.(-1)^n\, \varphi(\beta).$$

Also auch:

$$\lim_{h=0} \int_\alpha^\beta \varphi\, d F_h = \varphi(\alpha) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i\, \varphi(x_i) + \lambda\, (-1)^n\, \varphi(\beta).$$

Aus (153) und (152) folgt daher auch hier, daß durch (150) die polare Maßbestimmung gegeben ist und wir haben den Satz:

XXXIII *a*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{21}$. Damit die Operationsfolge (155) beschränkt sei in $\mathfrak{A}_{21}$, ist notwendig und hinreichend, daß es ein M gibt, so daß Ungleichung (156) gilt.

Eine Grundmenge $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{A}_{21}$ ist gegeben durch die Funktionen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqq \xi \\ x - \xi & \text{für} \quad x > \xi \end{cases} \qquad x \leqq \xi < \beta.$$

Bedenkt man, daß für diese Funktionen:

$$\int_\alpha^\beta \varphi\, d F = \int_\xi^\beta \varphi\, dx$$

ist, so erhalten wir die Sätze:

XXXIII *b*. Sei $b_n = \varphi_n(x)$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{B}_{21}$. Damit die in $\mathfrak{A}_{21}$ beschränkte Operationsfolge (155) konvergent sei in $\mathfrak{A}_{21}$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$ ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \int\limits_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx$ vorhanden sei.

XXXIII *c*. Seien $b_n = \varphi_n(x)$ und $b = \varphi(x)$ Punkte aus $\mathfrak{B}_{21}$. Damit für die in $\mathfrak{A}_{21}$ konvergente Operationsfolge (155) in ganz $\mathfrak{A}_{21}$ (159) gelte, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes ξ aus $[\alpha, \beta)$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\beta} \varphi_n \, dx = \int_{\xi}^{\beta} \varphi \, dx. \tag{162}$$

Von besonderem Interesse ist wieder der Fall:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < x_0 \\ 0 & \text{für } x \geqq x_0. \end{cases}$$

Dann wird aus (159) wieder (161), und da (162) gleichbedeutend ist mit:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\xi} \varphi_n \, dx = \int_{\alpha}^{\xi} \varphi \, dx,$$

erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\xi} \varphi_n \, dx = \begin{cases} \xi - \alpha & \text{für } \xi < x_0 \\ x_0 - \alpha & \text{für } \xi \geqq x_0. \end{cases}$$