

Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene.

Von **Wilhelm Blaschke** in Bonn.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Geometrie einer algebraischen, siebengliedrigen Gruppe orientierter Berührungstransformationen in der Euklidischen Ebene. Die Gruppe ist dadurch definiert, daß ihre Abbildungen einerseits die orientierten geraden Linien, die man nach E. Study auch kurz *Speere* nennt, andererseits die orientierten Kreise untereinander vertauschen. Man wird demnach bei ihrer Untersuchung zweckmäßig den Speer als Element der Ebene einführen. Diese Gruppe, die wir die erweiterte Laguerresche Gruppe nennen werden, ist holodrisch isomorph zur Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen des Raumes und dieser Isomorphismus wird durch eine Abbildung vermittelt, die von Chasles herrührt und von F. Klein Minimalprojektion genannt worden ist.¹⁾

Es wird besonders eine hier auftretende Art von orientierten algebraischen Kurven ausführlicher untersucht, die wir Hyperzykel (abgekürzt *HZ*) nennen. Sehen wir vorläufig von der Orientierung der Kurven ab, so können wir sie als Schnitte der einer Schar konfokaler Flächen zweiter Klasse umschriebenen Tangentenebene einer Minimalkurve mit reellen, eigentlichen Ebenen definieren.

Die Kurven treten auch auf als Antikaustiken (oder „sekundäre Kaustiken“) parallel beleuchteter Kegelschnitte. Dabei versteht man unter einer Antikaustik einer ebenen Kurve irgend eine orthogonale Trajektorie der an der Kurve nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetze gebrochenen Lichtstrahlen, die natürlich als in der Ebene der Kurve verlaufend vorausgesetzt sind. Ein besonderer Fall der Antikaustiken sind die Reflexionsantikaustiken, die dann entstehen, wenn an die Stelle der Brechung die Spiegelung der Lichtstrahlen tritt.

Eine weitere Erzeugung unserer *HZ* gibt der folgende Satz, der nur ein spezieller Fall eines später erwähnten allgemeineren ist: Jeder Normalriß einer Dupinschen Zyklide ist ein *HZ*.

Wir leiten die Eigenschaften der *HZ* mit Hilfe der Minimalprojektion aus bekannten Eigenschaften der konfokalen Flächen

¹⁾ Vgl. Enzyklopädie d. m. W. IIIAB 4b. G. Fano, S. 318, Nr. 14. Die „Laguerresche“ Gruppe und ihren Zusammenhang mit den Ähnlichkeitstransformationen hat anscheinend zuerst S. Lie angegeben. Vgl. Göttinger Nachrichten, Mai 1871, S. 201. Math. Ann. Bd. 5 (1872) S. 186. Siehe auch Lie, Scheffers Geom. der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, S. 443.

zweiter Klasse, des Zylindroids (auch „Plükersches Konoid“ genannt) und der Raumkurve dritter Ordnung ab. Es folgen dann einige Angaben über eine allgemeinere Kurvenart, die in der zehngliedrigen Lieschen Gruppe aller ebenen Berührungstransformationen, die orientierte Kreise wieder in solche überführen, eine analoge Rolle spielt, wie die *HZ* in der erweiterten Laguerreschen Gruppe. Den Schluß bilden analoge Betrachtungen der räumlichen Geometrie, wobei die orientierte Ebene als Raumelement auftritt.

Der Name „Hyperzykel“ stammt von E. Laguerre, der ihn jedoch nur für einen Sonderfall unserer Kurvenart angewendet hat. Er hat seine Ergebnisse über die speziellen *HZ* und über die Geometrie der Transformationsgruppe, die wir nach ihm benennen, in folgenden Abhandlungen veröffentlicht, die am Schlusse des zweiten Bandes seiner gesammelten Werke enthalten sind:

1. Sur la Géométrie de direction S. 592
2. Transformations par semi-droites réciproques „ 608
3. Sur les hypercycles „ 620
4. Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, „ 636
5. Sur quelques propriétés des cycles „ 651
6. Sur les courbes de direction de la troisième classe „ 660
7. Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, „ 675. ¹⁾

Darin hat sich Laguerre zur Herleitung seiner Ergebnisse auch schon der Minimalprojektion bedient, wie man aus 6. ersehen kann, jedoch nur in sehr geringem Umfange und vor allem scheint ihm die wesentliche Tatsache entgangen zu sein, daß die erweiterte Laguerresche Gruppe vermittle der Minimalprojektion isomorph ist zur Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen. Überhaupt kommt der Gruppenbegriff bei Laguerre nicht zur Anwendung.

Wir wollen gleich hier hervorheben, daß zwischen den *HZ* und den sogenannten zyklischen Kurven vierter Ordnung eine weitreichende Analogie besteht.

Die folgenden Entwicklungen beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, auf das komplexe Gebiet und die Mannigfaltigkeit einer komplexen Veränderlichen wird, wie üblich, als einfach unendlich bezeichnet.

§ 1. Der Speer als Element der Ebene.

Die Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems seien X, Y und Z , drei reelle, eigentliche und durch die positive Zählung der Koordinaten orientierte Gerade. Die Koordinaten x, y, z eines eigentlichen Punktes schreiben wir in der Form

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}.$$

¹⁾ Im Anschlusse an Laguerre sind von Herrn R. Bricard in den *Nouvelles Annales* noch zwei hiehergehörige Aufsätze erschienen:

Sur la géométrie de direction, (4) 6, 1906 S. 159 und
 Sur le problème d'Apollonius, (4) 7, 1907 „ 491.

Doch wollen wir uns vorläufig nur in der Grundrißebene ζ bewegen, die durch \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} hindurchgeht. Die Gleichung einer „Euklidischen“ Geraden S von ζ hat die Form

$$S_0 x_0 + S_1 x_1 + S_2 x_2 = 0,$$

worin die S_k komplexe Verhältnissgrößen sind, die der Bedingung unterworfen sind

$$S_1^2 + S_2^2 \neq 0.$$

Die Entfernung zweier eigentlicher Punkte x und y von S ist durch die beiden Ausdrücke gegeben

$$\frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 y_0} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_2} = \frac{x_2 y_0 - x_0 y_2}{x_0 y_0} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_1},$$

die nicht beide sinnlos sein können. Geben wir dem auftretenden Wurzelausdrucke ein bestimmtes Vorzeichen, so ist die Entfernung beliebiger eigentlicher Punkte der Geraden auch dem Vorzeichen nach bestimmt, die Gerade S also zu einer orientierten Geraden \mathfrak{S} orientiert.

Wir sehen: Vier komplexe Verhältnissgrößen \mathfrak{S}_k ($k=0, 1, 2, 3$), die den Bedingungen genügen

$$(1) \quad \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2 - \mathfrak{S}_3^2 = 0$$

$$(2) \quad \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2 \neq 0,$$

können als Koordinaten einer orientierten Geraden \mathfrak{S} angesehen werden, wenn man festsetzt, daß die mit \mathfrak{S} zusammenfallende Gerade S die Koordinaten $S_k = \mathfrak{S}_k$ ($k=0, 1, 2$) und zwei beliebige eigentliche Punkte x und y der orientierten Geraden die Entfernung

$$(3) \quad \overline{xy} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 y_0} \cdot \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_2} = \frac{x_2 y_0 - x_0 y_2}{x_0 y_0} \cdot \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1}$$

haben sollen. Die Richtungskosinus der orientierten Geraden sind demnach

$$(4) \quad \begin{aligned} \cos(\mathfrak{X} \mathfrak{S}) &= + \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3} \\ \cos(\mathfrak{Y} \mathfrak{S}) &= - \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}. \end{aligned}$$

Unter Verhältnissgrößen soll immer eine bestimmte Anzahl von komplexen Zahlen verstanden sein, die nur bis auf einen von Null verschiedenen, gemeinsamen, komplexen Faktor bestimmt sind und nicht gleichzeitig Null sein dürfen.

Den Begriff des Speeres wollen wir etwas weiter fassen als den der orientierten Geraden, indem wir jedem Wertesystem der Verhältnisgrößen \mathfrak{S}_k , das die Gleichung (1), aber nicht notwendig auch die Ungleichung (2) erfüllt, einen Speer zuordnen, so daß jede orientierte Gerade auch gleichzeitig ein Speer ist, aber nicht umgekehrt.

Die Mannigfaltigkeit der Geraden von ζ ist doppelt überdeckt mit der Mannigfaltigkeit der Speere. Jede Euklidische Gerade ist Träger zweier verschiedener Speere, was sich in unseren Koordinaten dadurch ausdrückt, daß, wenn $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ gegeben sind, das Vorzeichen von \mathfrak{S}_3 noch beliebig ist. Anders verhalten sich die Geraden, die der Gleichung genügen

$$S_1^2 + S_2^2 = 0;$$

für sie fallen beide Orientierungen zusammen. Diese Verzweigungsmannigfaltigkeit besteht im reellen Gebiete aus der einzigen uneigentlichen Geraden, im komplexen Gebiete hingegen aus allen Minimalgeraden oder Minimalspeeren, unter die wir auch die uneigentliche Gerade als uneigentlichen (Minimal-) Speer zählen wollen. Alle vom uneigentlichen Speere verschiedenen Speere nennen wir eigentlich. Das so definierte Speerkontinuum ist abgeschlossen.

Die Adjunktion der Irrationalität \mathfrak{S}_3 ermöglicht uns die Entfernung eines eigentlichen Punktes x von einer orientierten Geraden \mathfrak{S} unzweideutig zu bestimmen. Wir wollen die Entfernung durch die Formel definieren

$$(5) \quad \text{dist}(x, \mathfrak{S}) = \text{dist}(\mathfrak{S}, x) = + \frac{\sum_0^2 \mathfrak{S}_k x_k}{\mathfrak{S}_3 x_0};$$

hiebei ist das Vorzeichen so gewählt, daß im reellen Falle die Entfernung dann positiv ausfällt, wenn \mathfrak{S} um x impositiven Sinne dreht.

Alle Punkte, die von zwei verschiedenen orientierten Geraden \mathfrak{U} und \mathfrak{B} gleichen Abstand haben, erfüllen stets eine einzige Gerade M mit den Koordinaten

$$(6) \quad M_k = \mathfrak{U}_k \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{U}_3 \mathfrak{B}_k \quad (k = 0, 1, 2),$$

die wir die Mittellinie von \mathfrak{U} und \mathfrak{B} nennen wollen.

Eine homogene Gleichung in Speerkoordinaten \mathfrak{S}_k , die von (1) verschieden ist, stellt ein Gebilde von ∞^1 Speeren dar, das wir, da die Speere alle eine algebraische Klassenkurve umhüllen, als orientierte (algebraische) Kurve bezeichnen wollen. Ebenso soll jeder irreduzible oder reduzible Bestandteil einer derartigen Kurve genannt werden.¹⁾

¹⁾ Die Bogenlänge einer irreduziblen, orientierten Kurve kann in der Regel (falls die Kurve nämlich bei der Umkehrung nicht in Ruhe bleibt) durch ein Abelsches Integral, das sich auf die Kurve selbst bezieht, dargestellt werden und man kann auf Grund dessen mit Hilfe des Abelschen Theorems mannigfache Sätze über diese Kurven ableiten. Vgl. P. Appell, E. Goursat, Fonctions algébriques (Paris 1895), chapitre XII, ferner P. Appell in Nouv. ann. (3) 15, 1896, S. 491.

Jeder Speer, dessen Koordinaten der Gleichung genügen, heißt Tangente der orientierten Kurve. Eine Tangente, die die orientierte Kurve zweimal in zwei verschiedenen Punkten berührt, nennen wir eine **ordentliche Doppeltangente**. Hingegen soll eine Euklidische Gerade dann **außerordentliche Doppeltangente** heißen, wenn sie in jeder beliebigen Weise orientiert zu einer Tangente der orientierten Kurve wird.

Jede durch eine lineare Gleichung in Speerkoordinaten

$$\sum_0^3 \delta_k \mathfrak{S}_k = 0$$

dargestellte orientierte Kurve nennen wir einen **Zykel**; den Punkt z' mit den Koordinaten

$$(7) \quad z'_k = \delta_k \quad (k = 0, 1, 2)$$

seinen Mittelpunkt.

Nehmen wir vorerst an, es sei

$$\delta_0 \neq 0,$$

in welchem Falle wir den Zykel eigentlich nennen, dann kann man seine Gleichung in der Form schreiben:

$$(8) \quad r = -\frac{\delta_3}{\delta_0} = +\frac{\sum_0^2 z'_k \mathfrak{S}_k}{z'_0 \mathfrak{S}_3}.$$

Ein eigentlicher Zykel enthält also alle orientierten Geraden, die von ihrem eigentlichen Mittelpunkte z' eine feste Entfernung $r = -\delta_3 : \delta_0$ haben (den Halbmesser des Zyklus). Im reellen Falle und für $\delta_3 \neq 0$ ist ein Zykel ein mit einem bestimmten Durchlaufungssinn versehener Kreis. Einen eigentlichen Zykel für den $\delta_3 = 0$ benennen wir **eigentlichen Nullzykel**, jeden anderen hingegen **orientierten Kreis**.

Ist $\delta_0 = 0$, so heißt der Zykel, der dann aus zwei Parallelbüscheln von Speeren besteht, **uneigentlich**. Ausgezeichnet **uneigentlich** wollen wir insbesondere einen **uneigentlichen Zykel** nennen, wenn die beiden Parallelbüschel gleichsinnig zusammenfallen, d. h. wenn

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 = 0$$

ist. Ein derartiger Zykel ist also ein doppelt zu zählendes Büschel gleichsinnig paralleler Speere. Ein **uneigentlicher Nullzykel** ist charakterisiert durch $\delta_0 = \delta_3 = 0$, er besteht aus zwei gegensinnig zusammenfallenden Parallelbüscheln. Darunter gibt es endlich auch zwei ausgezeichnete **uneigentliche Nullzykel**, nämlich die beiden doppelt zu zählenden Büschel von **Minimalspeeren**.

Die unabhängigen Verhältnissgrößen δ_k kann man als Koordinaten der Zykel verwenden. Der Ausdruck Zykel (cycle) stammt von Laguerre und wir vermeiden die Übersetzung Zyklus, da dieses Wort ohnehin in mehreren Bedeutungen gebraucht wird.

Der Winkel eines orientierten Kreises mit einer Euklidischen Geraden ist, abgesehen vom Vorzeichen, mod. π bestimmt, hingegen der Winkel α eines orientierten Kreises \mathfrak{z} mit einer orientierten Geraden \mathfrak{S} mod. 2π .

Es ist

$$(9) \quad p = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\mathfrak{S}_3 \delta_3 + \sum_0^2 \mathfrak{S}_k \delta_k}{\mathfrak{S}_3 \delta_3 - \sum_0^2 \mathfrak{S}_k \delta_k} = \frac{r-p}{r+p},$$

wenn wir mit r den Halbmesser des Zykels und mit p die Entfernung ihres Mittelpunktes von \mathfrak{S} bezeichnen. Diese Größe p bezeichnen wir nach P. Epstein als Potenz des orientierten Kreises \mathfrak{z} in der orientierten Geraden \mathfrak{S} .¹⁾

Es gilt dann der Satz

$$(10) \quad p = \operatorname{tg} \left(\frac{\Re \mathfrak{S}}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\Im \mathfrak{S}}{2} \right) = \frac{r-p}{r+p}$$

für zwei beliebige orientierte Gerade \Re und \Im von \mathfrak{z} , die sich in einem eigentlichen Punkte von \mathfrak{S} treffen.

§ 2. Die Minimalprojektion.

Wir wollen die uneigentliche Ebene ω als uneigentliche Minimalebene auch zu den Minimalebenen rechnen. Setzen wir dann die Gleichung einer Ebene σ in der Form an

$$\sum_0^3 \sigma_k x_k = 0,$$

so stellt diese Gleichung immer eine Minimalebene dar, wenn die Verhältnissgrößen σ_k der Gleichung

$$(11) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 0$$

genügen. Wir bilden jetzt die Speere \mathfrak{S} der Ebene ζ umkehrbar eindeutig auf die Minimalebenen des Raumes ab durch die Formeln:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma_k &= \mathfrak{S}_k \quad (k = 0, 1, 2) \\ i\sigma_3 &= \mathfrak{S}_3 \quad (i = \sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Die hiedurch definierte Abbildung nennt man Minimalprojektion. Sie ordnet jeder Minimalebene σ ihre in bestimmter Weise orientierte Spur auf ζ zu und umgekehrt jedem Speere \mathfrak{S}

¹⁾ Z. f. Mathem. Unterr. 37 (1906), S. 499.

von ζ eine bestimmte der durch ihn gehenden Minimalebene σ . Wir nennen \mathcal{S} die Minimalprojektion von σ .

Die Gleichung eines Zyklus \mathfrak{z}

$$\sum_0^3 \delta_k \mathcal{S}_k = 0$$

geht durch unsere Substitution über in

$$\sum_0^2 \delta_k \sigma_k + i \delta_3 \sigma_3 = 0.$$

Die Minimalprojektion bildet also die Zykel \mathfrak{z} von ζ umkehrbar eindeutig ab auf die Punkte z des Raumes

$$(13) \quad z_k = \delta_k \quad (k = 0, 1, 2), \quad z_3 = i \delta_3,$$

oder genauer auf die Minimalkegel, die diese Punkte als Scheitel haben.

Wenn $z_0 \neq 0$, so hat z den Mittelpunkt z' von \mathfrak{z} als Grundriß und die Entfernung

$$\overline{z'z} = z_3 : z_0 = i \delta_3 : \delta_0 = -ir,$$

wenn r der Halbmesser des Zyklus ist. Wir nennen wieder \mathfrak{z} die Minimalprojektion von z . Die Minimalprojektion der (un-)eigentlichen Punkte sind die (un-)eigentlichen Zykel, die Minimalprojektion der Punkte des absoluten Kegelschnittes J die ausgezeichnet unechtlichen Zykel, die Minimalprojektion der Punkte von ζ die Nullzykel.

Abgesehen von der Orientierung, kann man \mathfrak{z} dadurch erhalten, daß man den absoluten Kegelschnitt J aus z auf ζ projiziert, daher auch die Bezeichnung unserer Abbildung.¹⁾ Die Minimalprojektion der Punkte einer algebraischen Kurve besteht aus ∞^1 Zykeln, deren Gesamtheit wir eine Zykelreihe nennen. Ist die Kurve insbesondere eine Minimalkurve, so heißt die zugehörige Zykelreihe eine Berührungsreihe. Bei einer krummen Minimallinie ist ihr Grundriß die Evolute der Einhüllenden der Berührungsreihe, und die Berührungsreihe enthält alle orientierten Krümmungskreise ihrer Einhüllenden.²⁾ Einer eigentlichen Minimalgeraden entspricht eine gerade Berührungsreihe, die in der Regel alle orientierten Kreise enthält, die sich in einem eigentlichen Punkte gleichsinnig berühren. Die einzige Ausnahme bilden die Minimalgeraden, die zu ζ parallel sind. Die einer solchen Geraden entsprechende gerade

¹⁾ Die letztgenannte Eigenschaft der Minimalprojektion bildet meist den Ausgangspunkt der Darstellungen, so in den Vorlesungen von Klein über höhere Geometrie und bei Lie, Scheffers Geom. d. Berührungstransformationen. Bekannt war die Minimalprojektion, wenn auch nicht mit der durch die Orientierung bewirkten Eindeutigkeit, schon Chasles (vgl. *Traité de géom. sup.*, 2. Aufl. [1880], S. 507) und Möbius (Leipziger Ber. Bd. 9 [1857], S. 38 oder Ges. Werke Bd. 2, S. 317).

²⁾ Vgl. F. Klein, Vorles. über höhere Geom., S. 477.

Zykelreihe enthält alle eigentlichen Zykel von einem bestimmten Halbmesser, die ihren Mittelpunkt auf dem Grundrisse der Geraden haben. Insbesondere bildet sich eine Minimalgerade, die in ζ selbst liegt, auf die Gesamtheit der Nullzykel ab, deren Mittelpunkte auf ihr liegen.

Nennt man den Inbegriff eines Speeres und eines auf ihm liegenden Punktes ein orientiertes Linienelement und insbesondere ein eigentliches orientiertes Linienelement, wenn sein Punkt ein eigentlicher ist, so sieht man: Die eigentlichen orientierten Linienelemente sind durch die Minimalprojektion im allgemeinen umkehrbar eindeutig auf die eigentlichen Minimalgeraden bezogen. Die einzige Ausnahme bilden einerseits die Linienelemente auf den eigentlichen Minimalspeeren, andererseits die zu ζ parallelen Minimalgeraden.

Jede Euklidische Gerade hat als Minimalprojektion eine gerade Zykelreihe, die aus allen Zykeln besteht, die zwei verschiedene eigentliche Speere gemeinsam haben. Die Euklidischen Geraden sind so ausnahmslos eindeutig auf die (ungeordneten) Paare verschiedener eigentlicher Speere von ζ abgebildet.¹⁾

Schneiden sich zwei Euklidische Gerade G und H orthogonal in einem Punkte z , von dem wir vorerst annehmen, daß er nicht in ζ liege, so trennen die Berührungspunkte gg' und hh' der zugehörigen Speerpaare mit dem orientierten Kreise \mathfrak{z} , der Minimalprojektion von z , sich harmonisch, da G und H bezüglich des Minimalkegels durch z konjugiert sind. Wir sagen: Zwei Speerpaare $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ trennen einander harmonisch, wenn sie einem eigentlichen Zykel angehören und die gleichsinnig parallel an einen orientierten Kreis gezogenen Tangenten diesen in vier harmonischen Punkten berühren. Zugehörige Raumgerade G und H schneiden sich dann stets senkrecht.

Die Minimalprojektion der Punkte einer analytischen Fläche bilden eine Zykelkongruenz. Einer Ebene entspricht insbesondere eine ebene Zykelkongruenz. Trifft die Ebene ζ in einer Euklidischen Geraden und orientiert man diese beliebig zu einer orientierten Geraden, so haben in dieser alle orientierten Kreise der Kongruenz gleiche Potenz.

Für das Spätere ist der Begriff der Tangentialentfernung zweier orientierter Kurven in einer gemeinsamen Tangente von Wichtigkeit. Nehmen wir an, zwei orientierte Kurven \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' berühren eine orientierte Gerade \mathfrak{S} in zwei eigentlichen Punkten x und x' , dann heißt die auch dem Vorzeichen nach bestimmte Strecke $\overline{xx'}$ die Tangentialentfernung von \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' in \mathfrak{S} . Sind insbesondere \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' zwei eigentliche Zykeln, so bestimmen sie im allgemeinen zwei verschiedene orientierte Gerade und in beiden

¹⁾ Die orientierten Euklidischen Geraden des Raumes kann man durch die Minimalprojektion auf die geordneten Paare verschiedener eigentlicher Speere abbilden.

entgegengesetzt gleiche Tangentialentfernungen. Spricht man daher schlechtweg von der Tangentialentfernung zweier Zykkel, so sieht man vom Vorzeichen ab. Sind r und r' die Halbmesser der Zykkel, d^2 das Quadrat der Entfernung ihrer Mittelpunkte, so ist das Quadrat der Tangentialentfernung der Zykkel

$$\begin{aligned} t^2 &= d^2 - (r - r')^2 \\ &= d^2 + (ir - ir')^2 \end{aligned}$$

gleich dem Quadrate der Entfernung der zugehörigen Raumpunkte.¹⁾

Die Minimalprojektion hat die Eigenschaft, reellen Gebilden der Ebene ζ im allgemeinen imaginäre Gebilde des Raumes zuzuordnen und auch umgekehrt. Das ist nun einerseits von Vorteil, denn dadurch ist es z. B. möglich interessante imaginäre Gruppen von Ähnlichkeitstransformationen auf reelle Gruppen von Speertransformationen abzubilden, andererseits aber bringt dieser Umstand den Nachteil mit sich, daß man die Minimalprojektion für die zeichnerische Durchführung nicht verwerten kann. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, bedient man sich in der darstellenden Geometrie einer etwas verschiedenen Abbildungsart, die W. Fiedler *Zyklographie* genannt hat. Diese Abbildung ordnet dem Speere \mathfrak{S} die Ebene σ mit den Koordinaten

$$\sigma_k = \mathfrak{S}_k \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

zu. Will man jedoch hier die analogen Sätze aufstellen, wie wir sie hier für die Minimalprojektion angeben, so sieht man sich genötigt, im Raume an Stelle der Euklidischen Geometrie eine „Pseudogeometrie“ zu treiben, indem man nämlich an die Stelle des nullteiligen absoluten Kegelschnittes den einteiligen Kegelschnitt

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2 = 0$$

setzt, wie dies Herr E. Müller (Wien) in seiner Vorlesung über *Zyklographie* durchführt.²⁾ Wir könnten uns hier ebensogut dieser Abbildung bedienen, aber die einzige Folge davon wäre, daß wir eine große Zahl von Wortverbindungen mit Pseudo- zu gebrauchen hätten, wie etwa Pseudokugel, Pseudokreis, Pseudoentfernung. Nur bei Realitätsbetrachtungen können wir uns der *Zyklographie* mit Vorteil bedienen.

§ 3. Die Laguerresche Gruppe.

Jeder Transformation der Minimalebene entspricht durch Vermittlung der Minimalprojektion eine Transformation der Speere von ζ und jeder Transformationsgruppe entspricht hiebei eine holodrisch isomorphe Gruppe, die wir kurz die Minimalprojektion der ersten

¹⁾ Darboux, Sur les relations... Annales de l'École Normale. 2. Serie. 1. S. 344.

²⁾ Vgl. Beiträge zur *Zyklographie*. Deutsche Math. Ver. Jahresb. 14 (1905) S. 574.

nennen können. Man kann nun die kontinuierliche Gruppe Γ_7 aller (komplexen) Ähnlichkeitstransformationen des Raumes als eine Gruppe von Transformationen der Minimalebenen auffassen. Ihre Minimalprojektion sei G_7 . Γ_7 enthält als invariante Untergruppe die gemischte Gruppe (Γ_6, X_6) der Bewegungen und Umlegungen, deren Minimalprojektion wir mit (G_6, H_6) bezeichnen. Um ferner einen kurzen Ausdruck zur Verfügung zu haben, nennen wir die kontinuierliche Gruppe G_7 erweiterte Laguerresche Gruppe und ihre invariante gemischte Untergruppe (G_6, H_6) die Laguerresche Gruppe. Man erhält G_7 aus (G_6, H_6) durch Adjunktion der Ähnlichkeitstransformationen von ζ .

Da jede Transformation von Γ_7 einen Punkt wieder in einen Punkt und eine eigentliche Minimalgerade wieder in eine solche überführt, so führt jede Transformation aus G_7 einen Zykel wieder in einen Zykel (und zwar einen eigentlichen wieder in einen eigentlichen, einen uneigentlichen wieder in einen uneigentlichen, einen ausgezeichnet uneigentlichen wieder in einen solchen, aber einen Nullzykel im allgemeinen nicht wieder in einen Nullzykel) und ein orientiertes Linienelement im allgemeinen wieder in ein solches über. Mit anderen Worten: die Zyklen bilden gegenüber G_7 einen Körper und die Transformationen von G_7 sind orientierte Berührungstransformationen. Gleichsinnige Berührung orientierter Kurven bleibt also in der Regel erhalten, gegensinnige Berührung hingegen nicht. Daß hier Ausnahmen auftreten, erkennt man ohne weiteres daraus, daß die Abbildung der eigentlichen Linienelemente auf die eigentlichen Minimalgeraden des Raumes nicht ausnahmslos eindeutig ist. Man kann jedoch diese Ausnahmen z. B. durch zweckmäßig eingerichtete Definition der (gleichsinnigen) Berührung orientierter Kurven beseitigen.¹⁾ Wir wollen von zwei orientierten Kurven dann und nur dann sagen, daß sie sich berühren, wenn sie entweder

1. in einem gemeinsamen Speer die Tangentialentfernung null haben, oder

2. wenn die orientierten Kurven zwei benachbarte orientierte Gerade gemein haben, die sich in einem uneigentlichen Punkte schneiden, oder

3. wenn die orientierten Kurven den uneigentlichen Speer der Ebene und noch einen benachbarten Speer gemein haben, oder endlich

4. wenn die mit den orientierten Kurven zusammenfallenden nicht orientierten Kurven sich in einem absoluten Punkte der Ebene längs einer eigentlichen Minimalgeraden berühren und wenn außerdem die orientierten Krümmungskreise der beiden orientierten Kurven in diesem absoluten Punkte gleiche Halbmesser haben. Jetzt gilt ausnahmslos der Satz:

Berührung orientierter Kurven bleibt bei den Transformationen von G_7 stets erhalten.

¹⁾ Man könnte auch ein geeignetes, von dem der projektiven Geometrie verschiedenes Kontinuum von Linienelementen in ζ einführen, wobei man z. B. die Minimalgeraden von ζ zu den Linienelementen rechnen müßte.

Alle orientierten Berührungstransformationen der Ebene, die Zykel (als Orte von orientierten Linienelementen betrachtet) wieder in Zykel überführen, bilden eine kontinuierliche Gruppe G_{10} , die aus der konformen Gruppe des Raumes durch Minimalprojektion (der Punkte des Raumes) ableitbar ist.¹⁾ In dieser Gruppe ist die Untergruppe G_7 dadurch gekennzeichnet, daß die Speere gegenüber G_7 einen Körper bilden.

Da jede Transformation aus (Γ_6, X_6) die Entfernung zweier Punkte invariant läßt, so läßt jede Transformation der Laguerreschen Gruppe (G_6, H_6) die Tangentialentfernung zweier Zykel und somit überhaupt die Tangentialentfernungen orientierter Kurven, abgesehen vom Vorzeichen, ungeändert. Alle Speertransformationen, die diese letzte Eigenschaft haben, bilden eine im Sinne von S. Lie unendliche Gruppe, die Scheffers die Gruppe der äquilateralen Transformationen nennt.²⁾

Nennen wir eine Laguerresche Transformation eigentlich oder uneigentlich, je nachdem sie die Minimalprojektion einer Bewegung oder einer Umlegung ist, so gilt der Satz:

Jede eigentliche Laguerresche Transformation läßt Tangentialentfernungen auch dem Vorzeichen nach ungeändert, während jede uneigentliche Laguerresche Transformation die Tangentialentfernungen in die entgegengesetzt gleichen verwandelt.

Die Transformationen von G_7 ändern Tangentialentfernungen in konstantem Verhältnisse.

Wie wir schon bemerkt haben, geht bei jeder Transformation von G_7 jeder ausgezeichnete uneigentliche Zykel wieder in einen solchen über, oder mit anderen Worten, gleichsinnig parallele Speere gehen wieder in solche über. Nehmen wir in unserer Grundrißebene ζ einen festen orientierten Kreis \mathfrak{k} an und ordnen wir jedem Büschel gleichsinnig paralleler Speere den Berührungspunkt des einzigen Speeres des Büschels zu, der den orientierten Kreis berührt. Da bei einer Transformation von Γ_7 die Punkte des absoluten Kegelschnittes projektiv vertauscht werden, so werden bei einer Transformation von G_7 die Punkte von \mathfrak{k} , die den ausgezeichneten uneigentlichen Zykeln umkehrbar eindeutig entsprechen, wie man sofort sieht, ebenfalls projektiv vertauscht.

Betrachten wir jetzt einmal die Zusammensetzung unserer Gruppen zunächst, wie bisher, im komplexen Gebiet. G_7 ist kontinuierlich. (G_6, H_6) hingegen ist gemischt und besteht aus zwei Scharen, der kontinuierlichen Gruppe G_6 der eigentlichen und der kontinuierlichen Schar H_6 der uneigentlichen Laguerreschen Transformationen.

¹⁾ Vgl. Lie, Scheffers: Geom. d. Berührungstrf., S. 437.

²⁾ G. Scheffers: Math. Annalen 60 (1905), S. 491. Bei E. Study „aequidistante Trf.“ Sitzungsber. d. rheinischen Ges. f. Natur- u. Heilkunde (1904), S. 50. Vgl. Enzyklopädie III, AB 4 b. G. Fano S. 347, Nr. 24.

Beschränken wir uns jetzt auf das reelle Gebiet. Da ist schon G_7 eine gemischte Gruppe. Sie zerfällt zunächst in zwei Scharen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß bei der einen die Tangentialentfernungen um einen positiven, bei der zweiten um einen negativen Faktor geändert werden. Jede dieser Scharen zerfällt aber in zwei weitere, dadurch daß man zu unterscheiden hat, ob die zugehörige Vertauschung der reellen Punkte des Kreises f , von dem wir annehmen, daß er einen reellen Zug haben soll, eine gleichsinnige oder gegensinnige ist. Alle diese vier Scharen hängen aber durchs komplexe Gebiet hindurch miteinander zusammen. Analog können wir auch bei den reellen Transformationen von (G_6, H_6) vier kontinuierliche Scharen unterscheiden:

1. die Gruppe der eigentlichen, gleichsinnigen Laguerreschen Transformationen,
2. die Schar der eigentlichen, gegensinnigen Laguerreschen Transformationen,
3. die Schar der uneigentlichen, gleichsinnigen und
4. der uneigentlichen, gegensinnigen Laguerreschen Transformationen.

Jede der drei letzten Scharen gibt mit der ersten vereint eine Gruppe. Die Scharen 1. und 2. und ebenso die Scharen 3. und 4. hängen durch das komplexe Gebiet hindurch miteinander zusammen.

Sind 3 Paare entsprechender orientierter Geraden gegeben, so ist dadurch, vorausgesetzt, daß sowohl die ersten drei, wie die entsprechenden zweiten drei je einen eigentlichen Zykel bestimmen, eine einzige eigentliche und eine einzige uneigentliche Laguerresche Transformation bestimmt. Im reellen Falle konstruiert man auch zu jedem vierten Speere den entsprechenden auf Grnd der drei Tatsachen, daß jede Laguerresche Transformation 1. einem Zykel wieder einen Zykel zuordnet, 2. entsprechende Zykel projektiv aufeinander bezieht und 3. Tangentialentfernungen entweder ungeändert läßt oder in die entgegengesetzten verwandelt.

Betrachten wir jetzt die involutorischen Transformationen von (G_6, H_6) , da die für das folgende von besonderer Wichtigkeit sind. Wir leiten sie aus den involutorischen Bewegungen und Umlegungen des Raumes ab, das sind (I) die Spiegelung an einer (Euklidischen) Ebene, (II) die Spiegelung an einer (Euklidischen) Geraden, die man auch kürzer Umwendung nennt, und (III) die Spiegelung an einem (eigentlichen) Punkte. Die zugehörigen Transformationen von (G_6, H_6) nennen wir: (I) Laguerresche Spiegelung, (II) Umwendung an einem Speerpaare und (III) Spiegelung an einem (eigentlichen) Zykel. (II) gehört der Gruppe G_6 , (I) und (III) der Schar H_6 an.

Laguerre hat von allen Transformationen aus (G_6, H_6) fast ausschließlich die Transformation (I) untersucht und ihr den Namen „Transformation par directions réciproques“ gegeben. Sie ist ja auch deshalb von besonderer Bedeutung, weil man durch sie die ganze Gruppe (G_6, H_6) aufbauen kann, denn, da man eine Bewegung oder Umlegung des Raumes durch die Aufeinanderfolge von höchstens 4 Spiegelungen an Ebenen ersetzen kann, so kann man jede Laguerresche Transformation durch die Aufeinanderfolge von höchstens 4 Laguerreschen Spiegelungen erzeugen.

Wir wollen wenigstens für den allgemeinen Fall angeben, wie man diese Transformationen konstruktiv behandelt.

Die Ebene σ , an der gespiegelt wird, soll ζ in einer Euklidischen Geraden S treffen und auf ζ nicht normal stehen. S orientieren wir in beliebiger Weise zu einem Speere \mathfrak{S} . Die Minimalprojektion aller Punkte von σ ist eine ebene Zykelkongruenz, die alle Zykeln enthält, die in \mathfrak{S} die gleiche Potenz p ($p \neq 0$ und $p \neq 1$) haben. Jeder Zykel dieser Kongruenz wird bei der Laguerreschen Spiegelung, die die Minimalprojektion der Spiegelung an σ ist, in sich transformiert;

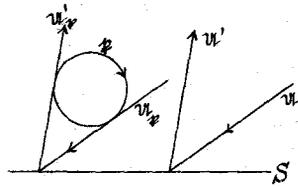


Fig. 1.

so auch jeder Nullzykel der geraden Reihe aller Nullzykel, die ihre Mittelpunkte auf S haben. Nehmen wir an, es sei uns die Minimalprojektion f irgend eines eigentlichen Punktes k von σ , der nicht gerade auf S liegt, gegeben, wir sollen zu einer orientierten Geraden U , die S in einem eigentlichen Punkte u trifft, die entsprechende U' konstruieren. Da ziehen wir zunächst die einzige Tangente U_f an f , die zu U gleichsinnig parallel ist. Ihr entsprechende die zweite Tangente U'_f , die man aus dem Schnittpunkte $[U_f S]$ an f legen kann und U' geht durch u gleichsinnig parallel zu U'_f . Es besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{(U \mathfrak{S})}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{(U' \mathfrak{S})}{2} = p.$$

Eine reelle Laguerresche Spiegelung ist eine uneigentliche gegenseitige oder eine uneigentliche gleichsinnige Laguerresche Transformation, je nachdem $f \in S$ in reellen Punkten trifft oder nicht.

Als Sonderfälle wären besonders zu beachten: zuerst daß σ mit ζ zusammenfällt und dann, daß σ auf ζ normal steht. Die dem ersten Falle entsprechende Laguerresche Spiegelung besteht darin, daß man die Orientierung aller Speere umkehrt, wir nennen sie daher „Umkehrung“. Die zweite wollen wir „Symmetrie“ nennen, sie ist das Produkt der gewöhnlichen Spiegelung an einer Euklidischen Geraden S mit der Umkehrung.

Wir kommen (II) zur Minimalprojektion der Umwendung an einer (Euklidischen) Geraden G . Die Minimalprojektion von G be-

steht aus einem Paar verschiedener Speere $\mathcal{G}\mathcal{G}'$. Sei $u \in e$ eigentliche Minimalebene, die G in einem eigentlichen Punkte trifft, \mathcal{M} ihre Minimalprojektion. Durch Umwendung an G geht in eine Minimalebene u' über, deren Minimalprojektion wir \mathcal{M}' nennen. Da die Schnittlinie $[u, u']$ G normal schneidet, so trennen die Speerpaare $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ und $\mathcal{G}\mathcal{G}'$ einander harmonisch. Die Umwendung an dem Speerpaare $\mathcal{G}\mathcal{G}'$ führt also jedem Speer in den bezüglich G harmonischen über. Der Inbegriff der Paare $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ ist die Minimalprojektion des Normalennetzes von G .

Am einfachsten ist (III) die Spiegelung an einem eigentlichen Zykel \mathfrak{z} . Man findet zu einer orientierten Geraden U die entsprechende U' , indem man zuerst die zu U gleichsinnig parallele orientierte Gerade U_3 von \mathfrak{z} bestimmt, dann ist U' der zu U gleichsinnig parallele Speer, dessen Abstand von U durch U_3 halbiert wird. Ein eigentlicher Zykel \mathfrak{p} geht bei der Spiegelung an \mathfrak{z} in einen anderen \mathfrak{p}' über, so daß $\mathfrak{p}\mathfrak{z}$ und \mathfrak{p}' einer geraden Reihe angehören und der Mittelpunkt von \mathfrak{z} die Strecke der Mittelpunkte von \mathfrak{p} und \mathfrak{p}' halbiert. Wenn 3 Zykel $\mathfrak{p}\mathfrak{z}$ und \mathfrak{p}' in solcher Lage sind, nennen wir \mathfrak{z} den Mittelzykel von \mathfrak{p} und \mathfrak{p}' .¹⁾

Die Spiegelung an einem eigentlichen Nullzykel ist das Produkt der Spiegelung an seinem Mittelpunkte mit der Umkehrung.

Die Minimalprojektion einer Schiebung normal zu ζ ist eine „Dilatation“. Sie führt jede orientierte Kurve in eine orientierte Parallelkurve über.

Eine Untergruppe von G_7 ist die Gruppe G_4 der Ähnlichkeitstransformationen (nach Klein „die Hauptgruppe“ der Elementargeometrie). Die Ähnlichkeitstransformationen sind unter den Transformationen von G_7 dadurch charakterisiert, daß sie mit der Umkehrung vertauschbar sind.

Zum Studium der aequilongen Speertransformationen der Ebene eignet sich ein System von höheren komplexen Größen

$$u + \varepsilon v,$$

das durch die Rechenregel

$$\varepsilon^2 = 0$$

charakterisiert ist und das von Herrn E. Study das System der dualen Größen genannt worden ist.²⁾ Hierbei bedeuten u und v gewöhnliche komplexe Zahlen. Herr G. Scheffers gab ein besonders einfaches System von Speerkoordinaten mit Verwendung der dualen Größen³⁾, doch ist dieses zur Behandlung von G_6 ungeeignet. Ordnet man hingegen einem Speere \mathcal{S} die duale Größe zu

$$\mathcal{S} = u + \varepsilon v,$$

¹⁾ Man ergänzt diese Definition leicht noch für den Fall, daß die drei Zykel konzentrisch sind.

²⁾ Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 195 u. f.

³⁾ Math. Annalen B. 60, S. 491–531.

worin

$$(14) \quad u = \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_2} = \frac{\mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}$$

und

$$(14) \quad v = \frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_2}$$

ist¹⁾, so wird durch jede Gleichung

$$\mathfrak{S}' = \frac{a\mathfrak{S} + b}{c\mathfrak{S} + d},$$

deren Koeffizienten beliebige duale Größen sind, die nur der Bedingung unterworfen sind, daß der skalare, d. h. von ε freie Teil der Substitutionsdeterminante $(ad - bc)$ von Null verschieden ist, eine beliebige eigentliche Laguerresche Transformation dargestellt, während die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{S}'} = \frac{a\mathfrak{S} + b}{c\mathfrak{S} + d}$$

eine uneigentliche Laguerresche Transformation darstellt, wenn man mit $\overline{\mathfrak{S}'}$ die zu \mathfrak{S}' „konjugiert-duale“ Größe $(u' - \varepsilon v')$ bezeichnet.

Das duale Doppelverhältnis $(\delta - \varepsilon\delta')$ von 4 dualen Speergrößen ist gegenüber eigentlichen Laguerreschen Transformationen invariant. Durch eine uneigentliche Laguerresche Transformation wird es in das konjugiert-duale verwandelt. Sucht man für den skalaren und vektoriiellen Teil eine geometrische Deutung, so findet man folgendes. Es seien $u^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) vier verschiedene orientierte Gerade, $u^{(k)}$ die Berührungspunkte der an einem orientierten Kreis gleichsinnig parallel gezogenen Tangenten. Dann ist δ das Doppelverhältnis dieser Punkte $u^{(k)}$, dessen invarianter Charakter nachdem früheren klar ist. Wir wollen es kurz das Doppelverhältnis der vier Speere nennen. Nehmen wir an, alle vier Schnittpunkte

$$u_{k, k+1} = [u^{(k)} u^{(k+1)}],$$

wobei k modulo 4 zu nehmen ist, seien eigentliche Punkte. Dann ist δ' gleich der „Doppeldifferenz“

$$(15) \quad \delta' = (\overline{u_{12} u_{23}} + \overline{u_{34} u_{41}}) - (\overline{u_{23} u_{34}} + \overline{u_{41} u_{12}}),$$

wobei darauf zu achten ist, daß jede der vorkommenden Strecken mit einem bestimmten Vorzeichen zu versehen ist. Gehören die $u^{(k)}$ einem Zykel an, so ist $\delta' = 0$.

¹⁾ Vgl. E. Study, Berichte d. Ges. für Natur- u. Heilkunde zu Bonn (1904), S. 50—60 und J. Grünwald, Duale Zahlen in der Geom. Monatshefte 17. (1906), S. 81 bis 136.

Die Speere des Parallelenbüschels $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3$ entziehen sich der angegebenen Darstellung.

Die Invarianz von δ' , das bei eigentlichen Laguerreschen Transformationen ungeändert bleibt, bei uneigentlichen mit dem Faktor -1 multipliziert wird, ist geometrisch leicht zu bestätigen.¹⁾

Es sollen hier noch kurz die Differentialinvarianten orientierter Kurven gegenüber G_6 , die man z. B. aus den Bewegungsinvarianten der Minimalkurven²⁾ herleiten kann, angegeben werden. Den Begriff orientierte Kurve kann man hierbei natürlich weiter fassen als es oben geschehen ist.

Wir führen folgende Bezeichnung ein: wir nennen den mit einem bestimmten Vorzeichen versehenen Krümmungsradius einer orientierten Kurve ρ , den Winkel der zugehörigen Kurventangente mit einer festen orientierten Geraden α und setzen

$$\rho_i = \frac{d^i \rho}{d\alpha^i}.$$

Die Längen ρ_i lassen eine einfache geometrische Deutung zu: ρ_1 ist der zugehörige Krümmungsradius der Evolute der orientierten Kurve, ρ_2 der Krümmungsradius der Evolute dieser Evolute u. s. w. Hierbei ist allerdings noch eine geeignete Festsetzung über die Orientierung der Evoluten zu treffen.

Es gibt nun zunächst eine zweiwertige, bis auf eine additive Konstante bestimmte Integralinvariante σ , die gegenüber G_6 die gleiche Rolle spielt, wie die Bogenlänge bezüglich der Gruppe der Bewegungen,

$$(16) \quad \sigma = \int d\alpha \sqrt{\rho_1}.$$

Als charakteristische Invarianten einer orientierten (analytischen) Kurve gegenüber der Gruppe G_6 der eigentlichen Laguerreschen Transformationen können wir die folgenden bezeichnen:

$$(17) \quad J = \frac{4\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_3 + 5\rho_2^2}{4\rho_1^3}$$

und

$$(18) \quad J' = \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\rho_1} \left\{ \frac{4\rho_1^2\rho_2 + 4\rho_1^2\rho_4 - 18\rho_1\rho_2\rho_3 + 15\rho_2^3}{4\rho_1^4} \right\}^2.$$

¹⁾ Die angegebene geometrische Deutung von δ' geht durch einen Grenzübergang aus der Deutung einer Invariante für eine 12gliedrige Gruppe²⁾ von räumlichen Speertransformationen hervor, die E. v. Weber angegeben hat. Vgl.: Die komplexen Bewegungen. Leipzgr. Berichte (1903).

²⁾ Vgl. E. Study: Zur Differentialgeom. der analytischen Kurven. Transactions of the Am. math. soc. 1909, S. 1 bis 49. bes. S. 39.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei orientierte Kurven C und C^* , die keine Zykeln sind, gegenüber der Gruppe der eigentlichen Laguerreschen Transformationen äquivalent seien, ist, daß die Gleichungen

$$J = J^*$$

$$J' = J'^*$$

zwischen den zugehörigen charakteristischen Invarianten, die man sich als (analytische) Funktionen von Kurvenparametern gegeben denkt, verträglich sind. Bei einer uneigentlichen Laguerreschen Transformation ändern J und J' ihre Vorzeichen.

Als natürliche Gleichung einer orientierten Kurve haben wir eine Gleichung von der Form

$$J = f(\sigma)$$

zu bezeichnen.¹⁾

Legt man der Speergeometrie in der Ebene die Gruppe G_7 zugrunde, so ist die Speergeometrie vermöge der Minimalprojektion mit der projektiven Geometrie des absoluten Kegelschnittes, oder dual mit der projektiven Geometrie einer einfach singulären Fläche zweiter Ordnung (eines Kegels) gleichwertig. Bekanntlich ist aber die Inversionsgeometrie der Ebene (d. h. die Geometrie der Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien) vermöge der stereographischen Projektion identisch mit der projektiven Geometrie auf einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung. Daher besteht zwischen der Speergeometrie und der Inversionsgeometrie eine weitgehende, jedoch nicht vollständige Analogie. Die quadratischen Mannigfaltigkeiten der beiden Geometrien, das sind einerseits die HZ , zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, andererseits die sogenannten zyklischen Kurven vierter Ordnung, weisen demgemäß auch viele Ähnlichkeiten auf, worauf wir schon anfangs hingewiesen haben.

§ 4. Einteilung der Hyperzykel.

Wir haben zu Anfang den HZ als Schnitt der einer Fläche zweiter Klasse Φ umschriebenen Tangentenfläche einer Minimalkurve mit der reellen, eigentlichen Ebene ζ definiert. Diese Definition wollen wir jetzt dahin ergänzen, daß der HZ als Minimalprojektion der Berührungsebenen der genannten Tangentenfläche aufgefaßt werden soll, d. h. als Ort von ∞^1 Speeren oder, nach der eingeführten Bezeichnungsweise, als orientierte Kurve.

Eine zweite, und zwar analytische Definition, die aber, wie man mit Hilfe der Minimalprojektion einsieht, inhaltlich vollkommen mit der ersten übereinstimmt, ist die folgende:

¹⁾ Die natürliche Gleichung versagt nur für die Zykeln, da für diese σ identisch verschwindet und J unbestimmt wird.

Wir nennen jede orientierte Kurve, die durch eine quadratische Gleichung in Speerkoordinaten gegeben ist

$$\sum_{i,k=0}^3 a_{ik} \mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

und jeden irreduziblen Bestandteil einer solchen orientierten Kurve, der kein bloßer Zykel und auch kein Büschel syntaktischer Speere ist, einen *HZ*. Dabei ist von dieser Gleichung (1) zwischen den \mathfrak{S}_i verschieden sei.

Gehen wir von der ersten Definition aus, so erkennen wir, daß sich der *HZ* nicht ändert, wenn man Φ durch irgend eine vom absoluten Kegelschnitt J verschiedene Fläche der konfokalen Schar $[\Phi J]$ ersetzt, geradeso wie man zu der obigen Gleichung die linke Seite von (1) multipliziert mit einem konstanten Faktor addieren kann, ohne daß sich die dargestellte Kurve dadurch ändert.

Durch den *HZ* ist umgekehrt die Tangentenfläche bestimmt und damit im allgemeinen auch eine einzige Schar $[\Phi J]$, die der Fläche einbeschrieben ist. Eine Ausnahme tritt besonders dann ein, wenn die Tangentenfläche von der dritten Klasse ist, denn dann gibt es ein lineares System dritter Stufe von einbeschriebenen Flächen zweiter Klasse (nach Reyes Ausdruck eine „Scharschar“). Da es ∞^9 Flächen zweiter Klasse gibt, gibt es demnach ∞^8 *HZ*.

Aus unserer Definition folgt ferner unmittelbar: durch jede Transformation von G_7 geht ein *HZ* immer wieder in einen *HZ* über.

Um eine Einteilung der *HZ* zu gewinnen, werden wir vor allem zwei *HZ*, die durch Transformationen von G_7 in einander übergeführt werden können, als gleichwertig ansehen. Die zugehörigen konfokalen Scharen sind dann zueinander ähnlich. Wir sehen, daß durch die Minimalprojektion die Klassifikation der *HZ* gegenüber G_7 auf die Klassifikation der Scharen von Flächen zweiter Klasse gegenüber Ähnlichkeitstransformationen zurückgeführt wird.

Nehmen wir zunächst an, daß in der konfokalen Schar eine Fläche Φ vorkomme, die nicht singular ist und die uneigentliche Ebene ω nicht berührt, sondern in einem irreduziblen Kegelschnitt K_ω trifft. Zwei Flächen Φ , die ω in demselben Kegelschnitte treffen, sind ähnlich, die zugehörigen *HZ* also gleichwertig, so daß wir die Φ bloß nach ihrem unendlichfernen Kegelschnitte K_ω beurteilen können. K_ω kann nun gegen J die folgenden verschiedenen Lagen einnehmen (die Numerierung ist hiebei schon so eingerichtet, wie wir sie für das Folgende brauchen, und in Klammern sind die „Charakteristiken“ der Elementarteilerttheorie¹⁾ für die zugehörigen Scharen $[\Phi J]$ beigefügt, wobei diejenige Zahl, die sich auf den absoluten Kegelschnitt J bezieht, unterstrichen ist):

¹⁾ Vgl. etwa Pascal, Repertorium II, (Leipzig 1902), S. 394.

- I. $[1\ 1\ 1\ 1]$ K_ω hat mit J 4 getrennte Punkte gemein.
 II. $[1\ 1\ 2]$ Von den 4 Schnittpunkten fallen zwei zusammen.
 III. $[1\ 3]$ Von den vier Schnittpunkten fallen drei zusammen.
 VII. $[1\ 1\ (1\ 1)]$ Von den 4 Schnittpunkten fallen zweimal je zwei zusammen.
 VIII. $[1\ (2\ 1)]$ Alle 4 Schnittpunkte fallen zusammen.
 XI. $[1\ (1\ 1\ 1)]$ $K_\omega = J$.

Nehmen wir andererseits an, die nicht singuläre Fläche Φ berühre ω , schneide also ω in einem Paar K_ω nicht zusammenfallender Geraden. Da können wir wieder folgende Fälle unterscheiden:

- IV. $[2\ 1\ 1]$ Das Geradenpaar K_ω hat mit J vier verschiedene Punkte gemein.
 V. $[3\ 1]$ Der Doppelpunkt r von K_ω liegt auf J , keine Gerade von K_ω berührt J .
 VI. $[2\ 2]$ r liegt nicht auf J , eine Gerade von K_ω berührt J .
 X. $[2\ (1\ 1)]$ r liegt nicht auf J , beide Geraden von K_ω berühren J .
 XI. $[4]$ r liegt auf J und eine Gerade von K_ω berührt J .

Es bleibt noch die Möglichkeit zu berücksichtigen, daß in der konfokalen Schar $[\Phi\ J]$ lauter singuläre Flächen zweiter Klasse, d. h. (Klassen-)Kegelschnitte vorkommen. Da sind zwei Fälle möglich: entweder besteht die Schar aus allen ebenen Schnitten eines Minimalkegels, die von einem Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, das eine Tangente an J als Achse hat, oder die Schar besteht aus einer Kegelschnittschar in ω .

Schließen wir jetzt von unseren Betrachtungen diejenigen HZ aus, die in Paare von Zykeln zerfallen, so fallen von den oben aufgezählten Möglichkeiten zunächst die beiden letzten weg, dann die Fälle VII, VIII, IX, X, wo in der konfokalen Schar mehr als einfach singuläre Flächen vorkommen, d. h. Paare getrennter oder zusammenfallender Punkte. In den Fällen VI und XI tritt der schon oben erwähnte Ausnahmefall ein, daß die umschriebene Tangentenebene, wenn man von einem Ebenenbüschel absieht, von der dritten Klasse ist, weshalb VI und XI die gleichen irreduziblen HZ liefern, so daß wir auch XI aus unserer Liste streichen können.

Für die übrig gebliebenen 6 Fälle I bis VI wollen wir jetzt angeben, wie die einfach singulären Flächen der konfokalen Schar außer J , das sind die sogenannten Fokalkegelschnitte F_i , gegenüber J gelegen sind:

I. Es gibt 3 verschiedene F_i , deren jeder gegen J allgemeine Lage hat, d. h. F_i ist keine Parabel, hat mit J keinen Punkt gemein und die Ebene σ_i von F_i ist keine Minimalebene.

II. Es fallen zwei F_i in einen Kegelschnitt F_1 zusammen, der keine Parabel ist und mit J keinen Punkt gemein hat, dessen Ebene σ_1 aber eine eigentliche Minimalebene ist. Der dritte Fokal-

kegelschnitt F_2 ist keine Parabel und seine Ebene σ_2 ist nicht Minimalebene, aber F_2 hat mit J einen Punkt i gemein.

III. Alle F_i fallen in einen Kegelschnitt F zusammen, der keine Parabel ist, aber mit J einen Punkt gemein hat und dessen Ebene σ J berührt.

IV. Einer der F_i fällt nach J , die beiden anderen F_1 und F_2 sind Parabeln, die mit J keinen Punkt gemein haben und deren Ebenen σ_1 und σ_2 J nicht berühren.

V. Zwei F_i fallen nach J , der dritte F ist eine Parabel, die mit J einen Punkt gemein hat, aber J nicht berührt.

VI. Einer der F_i fällt nach J die beiden anderen fallen in eine Parabel zusammen, die in einer eigentlichen Minimalebene σ liegt, aber J nicht berührt.

Wir sind so zu einer Einteilung der nicht in Paare von Zykeln zerfallenden HZ in sechs Familien gekommen, die sicher gegenüber G_7 invariant ist. Zwei HZ I sind jedoch im allgemeinen

Familie der HZ	Klasse	Ordnung	Zahl der Spitzen	Zahl der Wendetangenten	Zahl der Doppeltangenten	Zahl der Doppelpunkte	Geschlecht	Zahl der wesentlichen Konstanten	Zahl der automorphen Transformationen aus (G_6, H_6)	Zahl der automorphen Transformationen aus G_7	Zahl der automorphen Laguerreschen Spiegelungen
I.	4	8	12	0	2	8	1	8	8	8	3
II.	4	6	6	0	3	4	0	7	4	4	1
III.	4	5	4	1	2	2	0	6	2	∞^1	0
IV.	4	6	6	0	3	4	0	7	4	4	2
V.	4	5	4	1	2	2	0	6	2	∞^1	1
VI.	3	4	3	0	1	0	0	5	∞^1	∞^2	0

gegenüber G_7 nicht äquivalent, d. h. können durch keine Transformation von G_7 ineinander übergeführt werden, sondern die HZ I haben gegenüber G_7 eine absolute Invariante. Anders ist dies bei den übrigen Familien, da sind zwei beliebige HZ derselben Familie gegenüber G_7 gleichwertig, denn da z. B. zwei gegen J allgemein gelegene Parabeln stets ähnlich sind, so kann man zwei HZ IV stets ineinander überführen durch Transformationen von G_7 .

Weitere Einteilungen der HZ , die jedoch nur gegenüber der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen invariant sind, ergeben

sich aus der Stellung der Ebenen σ_i der Fokalkegelschnitte gegen ζ . Ferner ergeben sich noch Klassifikationen für die reellen HZ , nach der Zahl ihrer reellen Züge und Asymptoten. Darauf gehen wir später ein.

Wir geben vorstehend eine Tabelle von Anzahlen für die HZ beziehungsweise für die mit den HZ zusammenfallenden nicht-orientierten algebraischen Kurven:

Diese Zahlen sind jedoch nur im allgemeinen richtig. Es ist besonders vorausgesetzt, daß keine Ebene σ_i auf ζ normal stehe und daß keiner der F_i ζ berühre. Berührt ein F_i ζ , so tritt in der Regel an die Stelle zweier Doppelpunkte und zweier Doppeltangenten ein Selbstberührungspunkt, d. h. ein Punkt, in dem sich zwei Kurvenäste gegenseitig berühren.

Wir heben noch hervor: Jeder HZ I, II, III, IV oder V hat mit jedem Zykel vier Speere gemein, hingegen jeder HZ VI nur drei.

§ 5. Die Hyperzykel der I. Familie.

Die mit einem HZ I verbundene gewöhnliche Schar von konfokalen Mittelpunktsflächen zweiter Klasse $[\Phi J]$ gestattet eine endliche, diskrete (Abelsche) Gruppe von acht Bewegungen und Umlegungen, als deren erzeugende Transformationen man die Spiegelungen an den Symmetrieebenen σ_i ($i = 1, 2, 3$) annehmen kann. Daraus folgt:

Jeder HZ I gestattet und bestimmt eine Gruppe von acht Laguerreschen Transformationen in sich, worunter drei Laguerresche Spiegelungen enthalten sind.

In der konfokalen Schar $[\Phi J]$ gibt es drei Fokalkegelschnitte F_i , die Doppelkurven der der Schar umschriebenen Tangentenfläche einer Minimalkurve sind. Bezeichnen wir daher die Minimalprojektion der Punkte eines im Endlichen liegenden Kegelschnittes als quadratische Zykelreihe, so sehen wir:

Jeder HZ I ist in dreifacher Weise Einhüllende einer quadratischen Zykelreihe.

Alle Zykel, die einen HZ doppelt berühren, gehören drei quadratischen Reihen an.

Wir nennen die Spuren der Ebenen σ_i der F_i auf ζ , von denen wir annehmen, daß sie Euklidische Gerade sind, S_i und orientieren sie in beliebiger Weise zu Speeren \mathcal{S}_i . Bezeichnen wir dann einen HZ I, für den keine der Ebenen σ_i auf ζ normal steht, mit HZ I₀, so gilt der Satz:

Jeder HZ I₀ wird in dreifacher Weise von einem veränderten Zykel umhüllt, der sich so bewegt, daß sein Mittelpunkt einen festen Kegelschnitt F'_i , den Grundriß von F_i , durchläuft, während er in einem festen Speere \mathcal{S}_i eine konstante Potenz p_i hat.¹⁾

¹⁾ Man könnte die F'_i in Analogie zu einer bei den zyklischen Kurven üblichen Bezeichnung „Deferenten“ nennen.

Es bilden nämlich die Zyklen, welche die Minimalprojektion der Punkte einer Ebene σ_i sind, eine ebene Kongruenz \mathfrak{K}_i und alle haben in \mathfrak{S}_i dieselbe Potenz p_i . Wir kommen hier zum ersten male auf eine bemerkenswerte Berührungstransformation \mathfrak{B}_i , wenn wir nämlich dem Grundriß z' jedes Punktes z von σ_i die Minimalprojektion von z zuordnen. Die Punkte von ζ sind dadurch eindeutig auf die Zyklen der ebenen Kongruenz \mathfrak{K}_i bezogen. Den Geraden von ζ entsprechen im allgemeinen Speerpaare, die, wie wir uns ausdrücken können, der ebenen Zyklenkongruenz angehören.

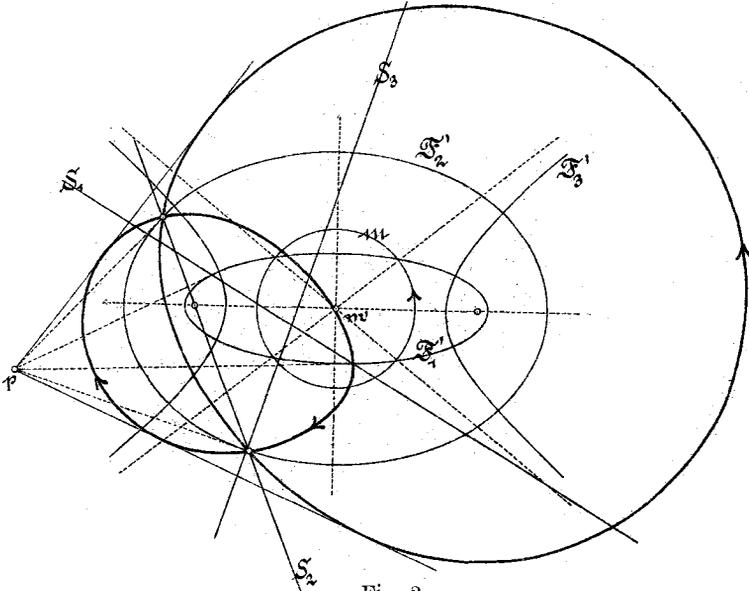


Fig. 2.

Einem (nicht-orientierten) Linienelemente ist durch \mathfrak{B}_i im allgemeinen ein Paar orientierter Linienelemente zugeordnet. Einer algebraischen Kurve entspricht eine orientierte Kurve, welche die Lagerresche Spiegelung gestattet, die die Minimalprojektion der Spiegelung an σ_i ist und jeden Zyklus von \mathfrak{K}_i in sich transformiert. Konstruiert man diese orientierte Kurve als Hüllkurve der orientierten Kreise von \mathfrak{K}_i , die ihre Mittelpunkte auf der gegebenen algebraischen Kurve haben, so erkennt man, daß die orientierte Kurve eine Antikaustik der ursprünglichen Kurve ist für eine Parallelbeleuchtung normal zu S_i und den Brechungskoeffizienten $\frac{1 - p_i}{1 + p_i}$.

Ein $HZ I_0$ ist in dreifacher Weise Antikaustik eines parallelbelegneten Kegelschnittes F'_i . Wir heben hier noch ausdrücklich hervor, daß diese Sätze alle für das komplexe Gebiet gelten.

Wir können den obigen Satz umkehren: Bewegt sich ein veränderlicher Zykel so, daß er in einer festen orientierten Geraden \mathfrak{S}_i konstante Potenz p_i hat, während sein Mittelpunkt einen Kegelschnitt F'_i durchläuft, so umhüllt er einen $HZ I_0$, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind: es muß $p_i \neq 0$ und $p_i \neq 1$ sein, F'_i muß ein irreduzibler Mittelpunktskegelschnitt sein, von dessen Achsen keine auf \mathfrak{S}_i normal steht, endlich muß durch die Berührungstransformation \mathfrak{B}_i , die durch \mathfrak{S}_i und p_i bestimmt ist, jede Asymptote von F'_i in ein Paar verschiedener orientierter Geraden übergeführt werden.

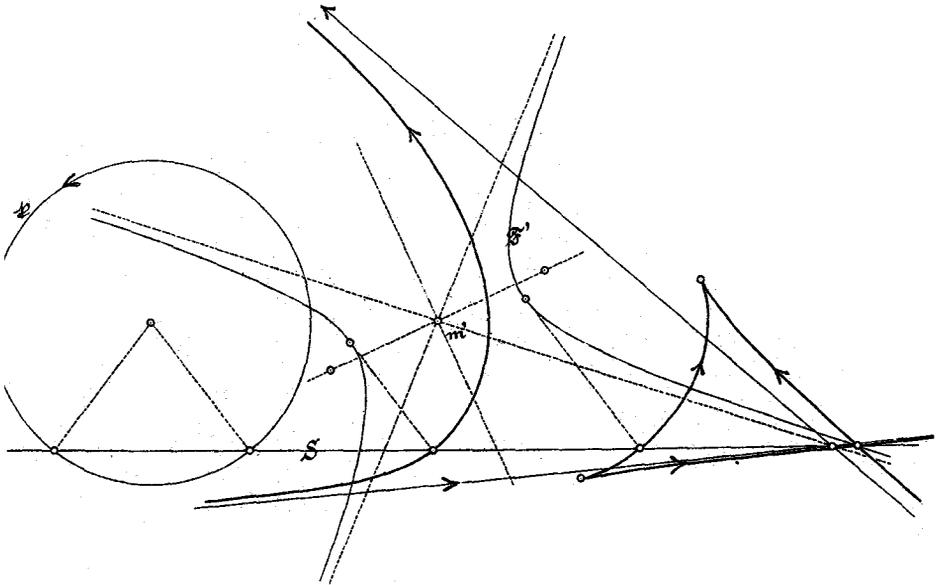


Fig. 3.

Das gibt uns eine einfache ebene Konstruktion der $HZ I_0$. Man gibt S_i , F'_i und einen orientierten Kreis k von \mathfrak{R}_i . Dann konstruiert man zu jedem Punkte x' von F'_i den Zykel γ von \mathfrak{R}_i , der x' als Mittelpunkt hat. Seine Berührungspunkte mit der HZ liegen auf der Polaren des Punktes, in dem die Tangente in x' an F'_i S_i trifft, bezüglich des Kreises γ . k schneidet S_i in zwei verschiedenen Punkten, die wir mit dem Mittelpunkt von k verbinden wollen. Ist die Tangente in x' zu einer dieser Geraden parallel, so fallen die beiden Berührungspunkte von γ mit dem HZ in einem Punkte von S_i zusammen, der demnach einen stationären Krümmungskreis hat, oder, wie wir sagen wollen, ein Scheitel des HZ ist (siehe Fig. 3).

Ein $HZ I_0$ hat also in der Regel 12 Scheitel von denen je vier auf je einer Geraden S_i liegen.

Andererseits erkennt man leicht (vgl. Fig. 3 oder 4):

Die den Asymptoten von F'_i durch \mathfrak{B}_i zugeordneten 4 Speere sind die vier orientierten Asymptoten des $HZ I_0$ (dabei sehen wir von denjenigen Asymptoten des HZ ab, die Minimalgerade sind, wie wir noch sehen werden).

Die Asymptoten berühren den Zykel m , die Minimalprojektion des Mittelpunktes m der konfokalen Schar (vgl. Fig. 4). Das Doppelverhältnis der vier (orientierten) Asymptoten gibt uns eine geometrische Deutung der absoluten Invariante des $HZ I$.

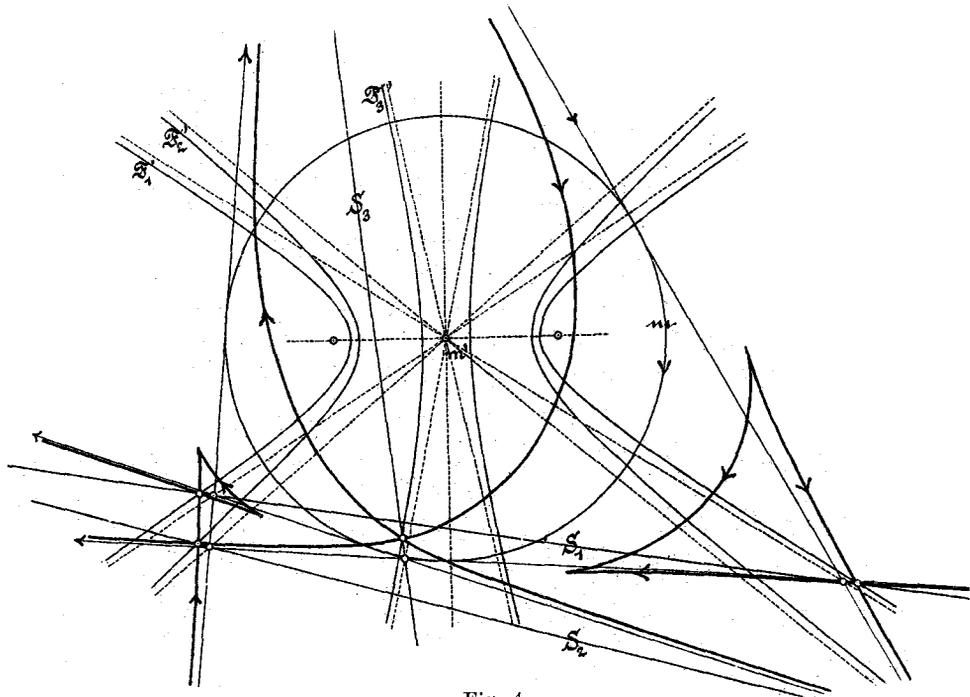


Fig. 4.

Zwischen den drei Erzeugungen des $HZ I_0$ bestehen folgende Beziehungen. Zunächst sind die drei Kegelschnitte F'_i als Grundrisse der Fokalkegelschnitte F_i selbst konfokal. Nehmen wir ferner an, daß der Mittelpunkt m nicht in ζ liege, so bilden die vier Asymptoten des HZ ein Tangentenvierseit des orientierten Kreises m und die drei Geraden S_i bilden das Diagonaldreieck dieses Vierseits, somit ein Polardreieck bezüglich m . Die Asymptoten der F'_i sind Mittellinien je zweier Asymptoten des HZ (vergleiche die Fig. 4).

Gehen wir jetzt zu einer zweiten Erzeugungsart der $HZ I$ über. Die regulären Mittelpunktskegelschnitte sind auch $HZ I$, denn liegt einer der Fokalkegelschnitte F_i in ζ , so ist der zugehörige HZ

mit diesem Kegelschnitt, den man als in zweifacher Weise durchlaufen zu denken hat, identisch.¹⁾ Spiegeln wir die zu einem $HZ I_0$ gehörige Schar konfokaler Flächen an einer Symmetrieebene zwischen einer Ebene σ_i und ζ , so kommt durch diese Spiegelung F_i nach ζ , also geht durch die entsprechende Laguerresche Spiegelung der HZ in einen Kegelschnitt über. Daraus folgt:

Es gibt sechs Laguerresche Spiegelungen, die einen $HZ I_0$ in einen Kegelschnitt transformieren.

Die Umkehrung dieses Satzes bietet keine Schwierigkeit, ist jedoch wieder mit einer Anzahl von Voraussetzungen verbunden. Da die Laguerresche Spiegelung im allgemeinen die in beliebiger Weise orientierten Krümmungskreise des Kegelschnittes in Krümmungszykel des HZ überführt und umgekehrt, so kann man im reellen Falle jetzt auch zu einem beliebigen Punkte des HZ den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt konstruieren. Die vier Scheitel des Kegelschnittes gehen in acht Scheitel des HZ über, die übrigen vier Scheitel des HZ gehen aus den vier Punkten des Kegelschnittes hervor, in welchen ihn Minimalgerade berühren.

Die Evolute des $HZ I_0$ ist als Grundriß der Gratlinie der der Schar $[\Phi J]$ umschriebenen Tangentenfläche eine Kurve zwölfter Ordnung.²⁾ Die zwölf Schnittpunkte der Gratlinie mit ζ sind Spitzen des HZ . Nehmen wir an, daß keiner der Fokalkegelschnitte F_i ζ berühre, dann sind die acht Schnittpunkte der F_i und von J mit ζ Doppelpunkte des $HZ I_0$, da diese Kegelschnitte Doppelkurven der genannten Tangentenfläche sind. Jede Gerade S_i schneidet also den $HZ I_0$ außer in vier Scheiteln noch in zwei Doppelpunkten (vgl. Fig. 2, 3 und 4) und die absoluten Punkte sind Doppelpunkte des $HZ I_0$.

Gemäß unserer letzten Voraussetzung berührt eine nicht singuläre Fläche Φ_ζ der konfokalen Schar $[\Phi J]$ die Ebene ζ in einem Punkte p und hat mit ζ zwei verschiedene Erzeugende D_1 und D_2 gemein. p ist der Fußpunkt der Geraden normal zu ζ , die alle Pole von ζ bezüglich der Flächen der Schar $[\Phi J]$ enthält, ist also auch der gemeinsame Pol der S_i bezüglich der zugehörigen F'_i (vgl. Fig. 2). Da jede Minimalebene durch D_k Φ_ζ und J und daher alle Flächen der Schar $[\Phi J]$ berührt, so sind D_1 und D_2 außerordentliche Doppeltangenten des HZ , d. h. gehören ihm in beliebiger Weise orientiert an.

Wie schon oben erwähnt, tritt an die Stelle der beiden Doppeltangenten und zweier Doppelpunkte ein Punkt, in dem sich zwei Kurvenäste gegensinnig berühren, wenn ein Fokalkegelschnitt ζ berührt.

Aus der Zahl der Schnittpunkte mit einer der Geraden S_i oder mit der uneigentlichen Geraden erkennt man, daß der $HZ I_0$ die Ordnung acht hat.

¹⁾ Die von Kreisen verschiedenen irreduziblen Mittelpunktskegelschnitte sind unter den $HZ I$ dadurch ausgezeichnet, daß sie bei der Umkehrung in sich transformiert werden.

²⁾ Vgl. Enzyklopädie III. C. 2. O. Staude, S. 239 Nr. 112.

In einer dritten ebenen Erzeugung kommen wir durch folgende Überlegung: Jede Fläche der konfokalen Schar $[\Phi J]$ ist auf ∞^2 Arten das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen. Daraus folgt:

Ein $HZ I$ ist auf ∞^3 Arten das Erzeugnis projektiv aufeinander bezogener gerader Zykelreihen, d. h. Ort der Speerpaare, die die je zwei entsprechende Zykel der Reihen gemein haben. Zwei gerade Zykelreihen kann man in der Regel einfach dadurch aufeinander projektiv beziehen, daß man die Punktreihen ihrer Mittelpunkte projektiv aufeinander bezieht.

Unter einem Brennpunkt einer ebenen Kurve versteht man bekanntlich einen eigentlichen Punkt der Ebene, in dem sich zwei Minimalgerade treffen, die die Kurve berühren. Der Brennpunkt soll insbesondere ein außerordentlicher (wohl auch „singulärer“) heißen, wenn die Berührungspunkte der Minimalgeraden mit der Kurve in die absoluten Punkte fallen. Wir erkennen, daß ein $HZ I_0$ nur außerordentliche Brennpunkte hat, denn er ist von vierter Klasse und hat die absoluten Punkte als Doppelpunkte, so daß es außer den Doppelpunktstangenten keine weiteren Tangenten aus den absoluten Punkten an des $HZ I_0$ gibt.

Jede Erzeugende der Flächen der konfokalen Schar $[\Phi J]$, die eine Euklidische Gerade ist, hat als Minimalprojektion ein Speerpaar, dessen Speere den HZ berühren. Diese Speere sind insbesondere Minimalspeere, wenn die Erzeugende auf ζ normal steht. Es gibt nun vier auf ζ normale Erzeugende, deren Fußpunkte die außerordentlichen Brennpunkte f_k ($k = 1, 2, 3, 4$) des $HZ I_0$ sind. Die durch diese Erzeugenden gelegten Minimalebene berühren alle Flächen der konfokalen Schar, so auch die Fokalkegelschnitte F_i ; die Punkte f_k sind daher gleichzeitig auch Brennpunkte der F_i . Also:

Ein $HZ I_0$ hat nur vier außerordentliche Brennpunkte, die auch gleichzeitig Brennpunkte der konfokalen Kegelschnitte F_i sind.

Überträgt man die bekannten Eigenschaften¹⁾ der Raumkurve vierter Ordnung und erster Art zuerst dual auf die der Schar $[\Phi J]$ umschriebene Tangentenfläche und dann durch Minimalprojektion auf den HZ , so erhält man eine Anzahl von Sätzen, von denen hier einige angeführt werden sollen.

Man kann die Speerkoordinaten der Tangenten eines $HZ I$ so als elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken, daß die Summe der zu vier Tangenten gehörigen Parameterwerte dann und nur dann $\equiv 0$ ist bezüglich der Perioden, wenn die vier Tangenten einem Zykel angehören.

¹⁾ Vgl. etwa Pascal, Repertorium II (Leipzig 1902), S. 254.

Es sei $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ ein Paar von Tangenten eines $HZ I_0$. Es gibt vier Zykeln, die gleichzeitig dieses Paar orientierter Geraden und den HZ berühren, letzteren jedoch nicht in den Punkten, in welchen \mathcal{A} und \mathcal{A}' berühren. Das Doppelverhältnis (der Mittelpunkte) der vier Zykeln ist konstant, d. h. ändert sich nicht, wenn wir das Paar $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ längs des HZ fortbewegen. Dieses Doppelverhältnis ist die früher genannte absolute Invariante des $HZ I$ gegenüber G_7 , der Modul der zugehörigen elliptischen Funktionen.

Bedenken wir ferner, daß die Minimalprojektion eines im Endlichen liegenden, stationären Punktes der Gratlinie der der Schaar $[\Phi J]$ umschriebenen Tangentenfläche ein Zykel ist, der mit der HZ vier benachbarte Speere gemein hat, und daß es 16 stationäre Punkte gibt, von denen aber vier dem absoluten Kegelschnitte angehören, so erhält man:

Die Tangenten in den zwölf Scheiteln eines $HZ I_0$ bilden zusammen mit seinen vier Asymptoten eine Figur von 16 Speeren, die die Eigenschaft hat, daß jeder Zykel, der drei Speere davon enthält, auch noch einen vierten Speer der Figur enthält.

Man könnte noch zahlreiche Sätze über Speer-tripel, -quadrupel und -oktupel eines $HZ I$ aufstellen, die sich aus den bekannten Sätzen über Punktgruppen einer Raumkurve 4. 0. 1. A. ergeben. Beachtenswert ist auch, daß man durch Spezialisierung dieser Sätze merkwürdige Sätze über Kegelschnitte erhalten kann.¹⁾

Nehmen wir jetzt einmal an, daß eine der Ebenen σ_i , etwa σ_1 , auf ζ normal stehe. Dabei wollen wir zunächst noch voraussetzen, daß der uneigentliche Punkt z_∞ der Normalen auf ζ nicht auf F_1 liege. Den zugehörigen $HZ I$ bezeichnen wir mit $HZ I_1$. Der Kegelschnitt F_1 artet in die Doppelgerade S_1 aus, bezüglich welcher der $ZH I_1$ symmetrisch²⁾ ist. Die auf ζ normalen Tangenten N_1 und N_2 treffen ζ in zwei außerordentlichen Brennpunkten f_1 und f_2 des $HZ I_1$. Faßt man F_1 als Erzeugnis projektiver Punktreihen auf N_1 und N_2 auf, so folgt daraus durch Minimalprojektion:

Zwischen den Abständen der tangierenden Speere des $HZ I_1$ von den beiden Brennpunkten f_1 und f_2 besteht eine bilineare Gleichung:

$$r_1 r_2 + A r_1 + B r_2 + C = 0.$$

Die Umkehrung dieses Satzes ist wieder mit einer Anzahl von Voraussetzungen verbunden.

Betrachten wir jetzt den eben ausgeschlossenen Sonderfall, daß nämlich z_∞ auf F_1 liegt. Dann fallen die Punkte f_i in einen

¹⁾ Vgl. E. v. Weber: Über die Beziehungen zwischen Kegelschnitten und Kreisen..., Monatshefte XVI, S. 217—229.

²⁾ Vgl. die auf S. 15 gegebene Definition der Symmetrie.

einzigen Punkt f zusammen und die Kegelschnitte F'_2 und F'_3 sind Kreise mit f als Mittelpunkt. Da alle außerordentlichen Brennpunkte des HZ in f zusammenfallen, sind die absoluten Punkte Spitzen der Kurve.¹⁾

Wenn zwei Ebenen σ_i auf ζ normal stehen, so ist der HZ I eine orientierte Parallellkurve eines irreduziblen Mittelpunktskegelschnittes, der kein Kreis ist.

Werfen wir noch einen Blick auf die analytische Darstellung des HZ I. Seine Gleichung in Speerkoordinaten hat die Form:

$$\sum_0^3 a_{ik} \mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_k = 0$$

oder nach \mathfrak{S}_3 geordnet:

$$G + p \mathfrak{S}_3 = 0,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\sum_0^2 a_{ik} a_{ik} \mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_k + a_{33} \mathfrak{S}_3^2 = G$$

und

$$2 \sum_0^2 a_{3i} \mathfrak{S}_i = p$$

setzen. Es stellt dann $G=0$ den Grundriß der Fläche Φ_ζ der konfokalen Schar $[\Phi J]$ dar, die ζ berührt und $p=0$ ist die Gleichung des Berührungspunktes. Die Gleichung der mit dem HZ zusammenfallenden nichtorientierten Kurve lautet

$$G^2 - p^2 \mathfrak{S}_3^2 = 0,$$

worin man $\mathfrak{S}_3^2 = \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2$ setzen kann.

Bisher haben wir auf Realitätsverhältnisse gar keine Rücksicht genommen, wir wollen daher jetzt noch eine Einteilung der reellen HZ I_0 nach der Zahl ihrer reellen Züge und ihrer reellen Asymptoten angeben. Zur Abbildung von ζ auf den Raum verwenden wir hier zweckmäßig an Stelle der Minimalprojektion die Zyklographie. In der zum HZ I_0 gehörigen reellen „pseudokonfokalen“ Schar $[\Phi J]$ gibt es dann unter den „Pseudofokalkegelschnitten“ immer mindestens eine Hyperbel, wie man leicht aus der Betrachtung der Kegelschnittschar entnimmt, die von der Schar $[\Phi J]$ auf der uneigentlichen Ebene ausgeschnitten wird. Je nach den verschiedenen Lagen,

¹⁾ Über diesen HZ hat schon Cayley Untersuchungen angestellt. Ges. Werke II, S. 351.

die diese Hyperbel gegenüber dem „pseudoabsoluten“ Gebilde einnimmt, können wir folgende vier Arten reeller $HZ I_0$ unterscheiden.

1) Der $HZ I_0$ ist nullteilig, seine Asymptoten sind imaginär und von den F'_i ist einer eine Hyperbel, die beiden anderen sind nullteilig. Es gibt nur zwei reelle Laguerresche Spiegelungen, die einen solchen $HZ I_0$ in reelle Kegelschnitte, und zwar in nullteilige transformieren.

2) Der $HZ I_0$ ist einteilig (vgl. Fig. 3), von den 6 Asymptoten sind nur zwei reell und von den F'_i ist einer eine Hyperbel, die beiden anderen sind konjugiert-imaginär. Es gibt keine reelle Laguerresche Spiegelung, die einen derartigen $HZ I_0$ in einen reellen Kegelschnitt überführen würde. Wendet man daher auf alle reellen Kegelschnitte alle reellen Laguerreschen Spiegelungen an, so erhält man durchaus nicht alle reellen $HZ I$.

3) (vgl. Fig. 2). Der $HZ I_0$ ist zweiteilig, es gibt keine reelle Asymptote und von den F'_i ist einer eine Hyperbel, die beiden anderen sind Ellipsen. Es gibt nur zwei reelle Laguerresche Spiegelungen, die den $HZ I_0$ in reelle Kegelschnitte, und zwar in Ellipsen transformieren.

4) (Vgl. Fig 4). Der $HZ I_0$ ist wieder zweiteilig, alle sechs Asymptoten sind reell und alle drei F'_i sind Hyperbeln. Es gibt nur zwei reelle Laguerresche Spiegelungen, die den $HZ I_0$ in reelle Kegelschnitte, und zwar in Hyperbeln transformieren.

Da die $HZ I$ keine Wendepunkte besitzen, so sind ihre reellen Züge stets paar.

§ 6. Die Hyperzykel der II. Familie.

Wir halten uns an die in § 4 angewandte Bezeichnungsweise und nennen F_1 den Fokalkegelschnitt, der in einer Minimalebene σ_1 liegt, und F_2 den anderen, der mit dem absoluten Kegelschnitte J einen Punkt i , der in σ_1 liegt, gemein hat. Die konfokale Schar $[\Phi J]$ gestattet bloß eine (Abelsche) Gruppe von vier Bewegungen und Umlegungen, die zur sogenannten Vierergruppe isomorph ist, nämlich außer der Identität die Spiegelung an der Ebene σ_2 , von F_2 , die Umwendung an der Polaren von i bezüglich F_1 und die Spiegelung an dem gemeinsamen Mittelpunkte der konfokalen Flächen. Daraus folgt:

Jeder $HZ II$ gestattet und bestimmt eine Gruppe von vier Laguerreschen Transformationen, worunter eine Laguerresche Spiegelung enthalten ist.

Wir wollen wieder einen $HZ II$ mit $HZ II_0$ bezeichnen, wenn weder σ_1 noch σ_2 auf ζ normal stehen, d. h. wenn sie nicht den uneigentlichen Punkt z_∞ der Normalen auf ζ enthalten. Nehmen wir ferner zunächst an, daß weder F_1 noch F_2 ζ berühren. Es gibt dann wie früher zwei außerordentliche Doppeltangenten, aber auch

noch eine ordentliche Doppeltangente, nämlich die Minimalprojektion \mathfrak{S}_1 von σ_1 . Die Zahl der Doppelpunkte ist 4, zwei davon sind die absoluten Punkte, die beiden anderen die Schnittpunkte von ζ mit F_2 . Die Ordnung der Gratlinie der der Schar $[\Phi J]$ umschriebenen Tangentenfläche ist 6,¹⁾ sie liegt nebenbei bemerkt auf einer Drehfläche zweiter Ordnung. 6 ist daher auch die Zahl der Spitzen und die Ordnung der Evolute unserer $HZ \Pi_0$.

Fassen wir die HZ als Einhüllende der quadratischen Zykelreihe auf, welche die Minimalprojektion der Punkte von F_1 ist, so kommen wir auf folgende ebene Erzeugungsweise:

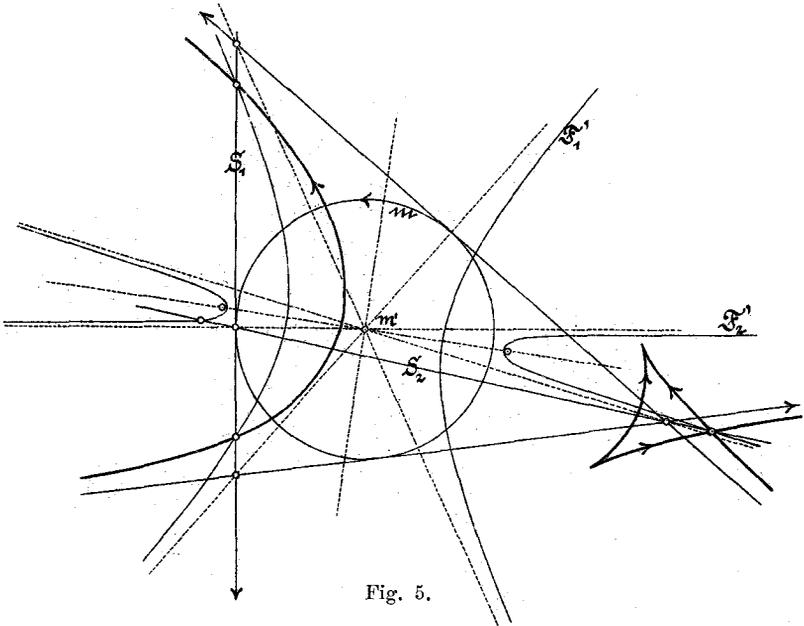


Fig. 5.

Bewegt sich ein veränderlicher Zykel ζ so, daß eine seiner orientierten Geraden \mathfrak{S}_1 fest bleibt und sein Mittelpunkt einen regulären Kegelschnitt F'_1 durchläuft, (der keine Parabel und kein Kreis ist und von dessen Achsen und Asymptoten keine auf \mathfrak{S}_1 normal steht,) so umhüllt ζ außer \mathfrak{S}_1 einen $HZ \Pi_0$. Anders ausgedrückt:

Sucht man zu einer festen orientierten Geraden \mathfrak{S}_1 bezüglich der Tangenten eines Kegelschnittes, der die obigen Bedingungen erfüllt, die symmetrischen, so umhüllen diese einen $HZ \Pi_0$. Oder endlich:

Rollen zwei kongruente, irreduzible Mittelpunktskegelschnitte so aufeinander, daß sie stets

¹⁾ Vgl. Enzyklopädie III, C. 2, S. 239.

bezüglich der Tangente in ihrem Berührungspunkte symmetrisch liegen, so beschreibt jede mit dem bewegten Kegelschnitte fest verbundene orientierte Gerade, falls sie auf keiner seiner Achsen und Asymptoten senkrecht steht, einen $HZ II_0$.

Wir sind hier zu einer ein-eindeutigen Berührungstransformation \mathfrak{B}_1 gekommen, die einer Geraden einen Speer zuweist, so daß die Gerade Mittellinie zwischen diesem Speere und \mathfrak{S}_1 ist. Einer Kurve wird durch \mathfrak{B}_1 eine Reflexionsantikaustik für eine Parallelbeleuchtung normal zu \mathfrak{S}_1 zugeordnet, die man sets auch in der soeben angegebenen Weise durch Abrollen symmetrischer Kurven erzeugen kann.

Eine andere, weniger symmetrische Erzeugung des $HZ II_0$ leitet man vermittels des Kegelschnittes F'_2 ab.

Der $HZ II_0$ ist Reflexionsantikaustik von F'_1 und Brechungsantikaustik von F'_2 .

Es gibt nur 2 Laguerresche Spiegelungen, die einen $HZ II_0$ in einen Kegelschnitt transformieren.

Wir wollen noch den $HZ II$ untersuchen, der entsteht, wenn σ_2 normal auf ζ ist und F'_2 den uneigentlichen Punkt z_∞ der Normalen auf ζ enthält. F'_1 ist dann ein Kreis und die absoluten Punkte sind Spitzen des HZ . Nehmen wir noch an, daß der Mittelpunkt m' von F'_1 auf \mathfrak{S}_1 liege, was man immer durch eine Dilatation erreichen kann, dann ist, wie wir gleich zeigen werden, die HZ eine orientierte zwei-spitzige Epizykloide.¹⁾ Es sei t ein beliebiger Punkt des Kreises F'_1 und T die Tangente in t an F'_1 ; spiegelt man \mathfrak{S}_1 an T und kehrt den erhaltenen Speer um, so erhält man eine Tangente \mathfrak{B} des HZ . Das Spiegelbild des Punktes m' an T nennen wir n . Es geht dann der Kreis K über tn als Durchmesser durch den Berührungspunkt p von \mathfrak{B} mit dem HZ , welcher Berührungspunkt auf dem Lote von t auf \mathfrak{B} liegt, und der Winkel zwischen \mathfrak{S}_1 und

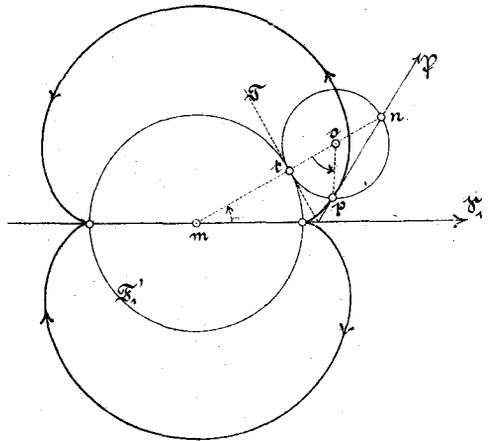


Fig. 6.

¹⁾ D. h. mit zwei im Endlichen liegenden Spitzen. (Vgl. G. Loria, Ebene Kurven, S. 665.)

Spiegelt man eine orientierte Gerade $—\mathcal{S}$ an allen Tangenten eines irreduziblen Mittelpunktskegelschnittes F' von dessen Asymptoten eine auf $—\mathcal{S}$ normal steht, so erhält man einen HZ III. Oder:

Ein HZ III ist Reflexionsantikaustik eines irreduziblen Mittelpunktskegelschnittes F' für eine Beleuchtung parallel zu einer Asymptote A' .

Es gibt keine Laguerresche Spiegelung, die einen HZ III in einen Kegelschnitt transformieren würde.

Daraus folgt: Übt man auf alle Kegelschnitte alle Laguerreschen Spiegelungen aus, so erhält man nicht alle HZ .

Wenn wir voraussetzen, daß $F' \zeta$ nicht berührt, so können wir über die Singularitäten unseres HZ III folgendes aussagen: Doppelpunkte sind nur die absoluten Punkte, Doppeltangenten sind wieder die beiden Erzeugenden in ζ der Fläche Φ_ζ aus der Schar $[\Phi J]$, die ζ berührt. Die Zahl der Spitzen und die Ordnung der Evolute ist 4. Die Kurve hat einen Wendepunkt im Schnittpunkte w von \mathcal{S} mit A' .

Ein HZ III gestattet nur eine einzige von der Identität verschiedene Laguerresche Transformation in sich, nämlich die Spiegelung an den Zykel m , der die Minimalprojektion des Mittelpunktes m von F' , d. h. des Poles der uneigentlichen Geraden von σ bezüglich F' ist.

Es gibt aber eine eingliedrige, gemischte (aus zwei getrennten kontinuierlichen Scharen zusammengesetzte) Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen, die F' in sich transformieren. Nimmt man ein gewöhnliches Cartesisches Koordinatensystem so an, daß die Asymptote A von F' , die eine Euklidische Gerade ist, zur Achse der z und der Mittelpunkt m von F' zum Ursprung wird, so kann man F' durch die Gleichungen darstellen

$$F' \left\{ \begin{array}{l} x = p, \\ y = ip, \\ z = \frac{a^2}{p}, \end{array} \right.$$

worin p einen veränderlichen Parameter und a ($a \neq 0$) eine Konstante bedeutet. Die kontinuierliche Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen, die F' als ganzes invariant lassen, wird dann durch die Formeln dargestellt:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{it} \{ x_0 \cos 2t - y_0 \sin 2t \}, \\ y = e^{it} \{ x_0 \sin 2t + y_0 \cos 2t \}, \\ z = e^{it} z_0, \end{array} \right.$$

wo t ein komplexer Parameter ist, der die einzelnen Transformationen der Gruppe charakterisiert. Diese (kontinuierliche) Gruppe wird zur gesamten (gemischten) automorphen Gruppe von F erweitert, wenn man noch die Spiegelung am Koordinatenanfang m adjungiert. Ein Punkt des Raumes bewegt sich bei den Transformationen der kontinuierlichen Gruppe im allgemeinen auf einer Kurve aus einer bemerkenswerten Familie rationaler Kurven vierter Ordnung, die man unter die konischen Schraubenlinien rechnen kann und die auch unter die sogenannten W -Kurven gehören. Krümmungsradius und Torsionsradius der Kurve sind der ersten Potenz ihrer Bogenlänge proportional.

Mit Hilfe der Minimalprojektion finden wir:

Ein HZ III gestattet eine gemischte eingliedrige Gruppe von Transformationen aus der erweiterten Laguerreschen Gruppe G_7 .

Wenn wir für die Differentialinvarianten von G_6 die früher eingeführten Bezeichnungen [vgl. (16) und (17) auf Seite 16] anwenden, so können wir die natürliche Gleichung des HZ III in der Form schreiben:

$$J = -\frac{15}{\sigma^2}.$$

Ein reeller HZ III hat stets einen reellen, unpaaren Zug und eine reelle Asymptote. F' ist bei reellen HZ III eine Hyperbel.

§ 8. Die Hyperzykel der IV. Familie.

Die Schar $[\Phi J]$ ist jetzt eine gewöhnliche Schar konfokaler Paraboloiden. Die Fokalparabeln wollen wir F_1 und F_2 nennen. Analog zu dem Früheren ergeben sich hier folgende Sätze:

Ein HZ IV gestattet eine diskrete Gruppe von vier Laguerreschen Transformationen, darunter zwei Laguerresche Spiegelungen. Diese Gruppe ist isomorph zur sogenannten Vierergruppe. Die entsprechende Gruppe des Raumes besteht nämlich außer aus der Identität noch aus der Umwendung an der Achse R von Φ und aus den Spiegelungen an den Ebenen σ_1 und σ_2 von F_1 und F_2 .

Ein HZ IV ist in zweifacher Weise Antikaustik einer Parabel F'_i für Parallelbeleuchtung.

Es gibt vier Laguerresche Spiegelungen, die einen HZ IV in eine Parabel überführen.

Gegenüber der projektiven Gruppe der Ebene ist die Gesamtheit der HZ II äquivalent der Gesamtheit der HZ IV, so daß wir die Ergebnisse über die Singularitäten des HZ II hierher über-

tragen können. Wir machen wieder die Annahme, daß keine der Ebenen σ_i auf ζ normal stehe (woran wir durch die Bezeichnung $HZ IV_0$ erinnern wollen) und daß keine der Parabeln F_i ζ berühre. Dann hat der $HZ IV_0$ drei Doppeltangenten: Erstens die uneigentliche Gerade, die in den Schnittpunkten von ζ mit den Tangenten P_∞ und P'_∞ aus dem uneigentlichen Punkte v_∞ von R an das absolute Gebilde J den HZ berührt, und zweitens die in ζ liegenden Erzeugenden D_1 und D_2 der Fläche Φ_ζ der konfokalen Schar $[\Phi J]$,

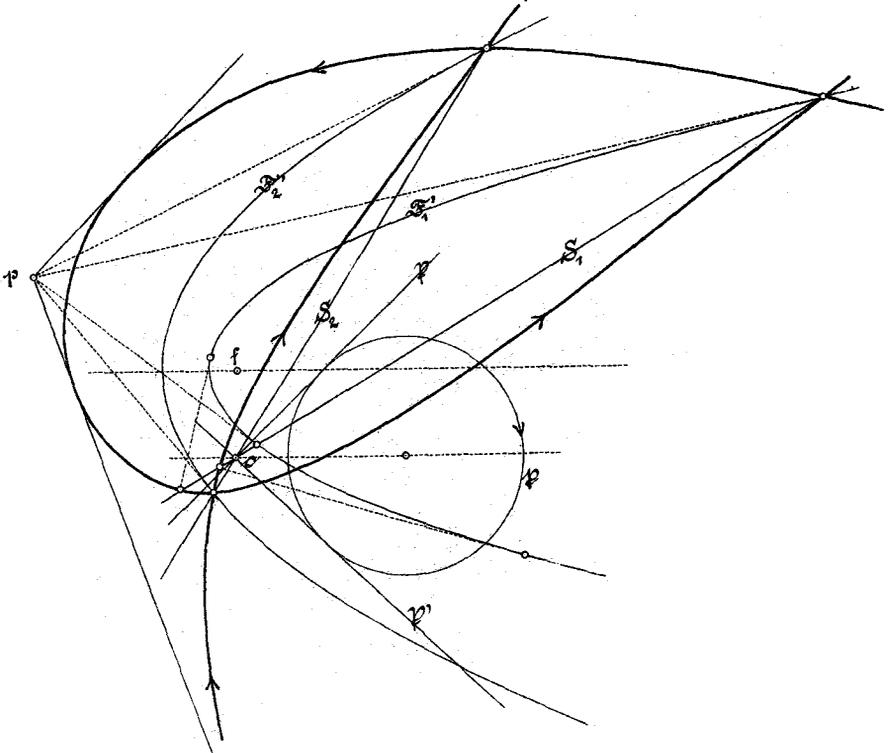


Fig. 8.

die ζ berührt. Die Kurve hat ferner vier Doppelpunkte in den Schnittpunkten von ζ mit den Fokalparabeln F_i und enthält die absoluten Punkte als einfache Kurvenpunkte. Der Brennpunkt f der konfokalen Parabeln F'_i , der Grundrisse der F_i , ist der einzige, und zwar außerordentliche Brennpunkt der Kurve. Die Ordnung ist 6, die Zahl der Spitzen und Ordnung der Evolute 4.

Bis jetzt haben wir nur Eigenschaften der $HZ IV$ aufgezählt, die den Eigenschaften der $HZ I$ analog sind; jetzt wollen wir

dazu übergehen, die von Laguerre angegebenen Eigenschaften der HZ IV₀ abzuleiten, die sich, wenigstens in ihrer Einfachheit, auf die früheren Familien von HZ nicht übertragen lassen.

Wir treffen zunächst in der Schar $[\Phi J]$ eine besondere Auswahl, deren Bedeutung allerdings erst später klar werden wird. Es sei Φ das einzige in der Schar vorkommende Paraboloid mit aufeinander senkrechten Richtebenen, dessen uneigentliche Erzeugende T_ω und T'_ω also bezüglich J konjugiert sind. Alle Paraboloiden der Schar schneiden nämlich die uneigentliche Ebene ω in den Strahlenpaaren einer Strahleninvolution im uneigentlichen Punkte r_ω der Achse R und die Tangenten P_ω und P'_ω an J bilden ein Paar dieser Involution. Diese Involution hat nun mit derjenigen, die J in r erzeugt, das Paar $T_\omega T'_\omega$ gemein. Wir wollen mit R_ω die Polare von r bezüglich J oder von R bezüglich Φ bezeichnen. Die Minimalprojektionen der Minimalebene $[R P_\omega]$ und $[R P'_\omega]$ nennen wir \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' . Das Paar verschiedener orientierter Geraden $\mathfrak{P} \mathfrak{P}'$, d. i. die Minimalprojektion der Achse R , nennt Laguerre das Paar der Fundamentalspeere des HZ .¹⁾ Den Schnittpunkt $[\mathfrak{P} \mathfrak{P}'] = [R \zeta]$ bezeichnen wir mit o .

Durch die Umwendung an dem Speerpaare $\mathfrak{P} \mathfrak{P}'$ wird der HZ in sich transformiert und wir wollen zwei Speere des HZ , die durch diese Umwendung miteinander vertauscht werden, gepaarte Tangenten des HZ nennen.²⁾ Je zwei gepaarte Tangenten trennen die Fundamentalspeere \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' harmonisch und bilden daher die Minimalprojektion einer Raumgeraden, die auf R normal steht. Alle diese Geraden erfüllen eine Regelfläche Z , die dem Normalennetz von R angehört. Projiziert man aus einem veränderlichen Punkte k von R Φ auf die uneigentliche Ebene ω , so erhält man hier einen veränderlichen Kegelschnitt K_k , der das Büschel (oder die Schar) aller Kegelschnitte durchläuft, die die uneigentlichen Erzeugenden T_ω und T'_ω von Φ in ihren Schnittpunkten mit R_ω berühren. K_k hat mit J vier Tangenten gemein, die sich paarweise auf R_ω treffen. Ein beliebiger der beiden Schnittpunkte sei k_ω . Die Regelfläche Z ist das Erzeugnis der ein-, zweideutigen Punktreihen (k) und (k_ω) , ist also eine Regelfläche dritter Ordnung, die R als Doppelgerade hat. Da Z die Tangenten T_ω und T'_ω aus r_ω an J enthält, so ist Z ein Zylindroid (oder Plücker'sches Konoid). Man kann Z auch als Ort der Scheitelerzeugenden der Paraboloiden der konfokalen Schar definieren.³⁾

Wir haben also gefunden:

Ein HZ IV ist die Minimalprojektion eines Zylindroids, d. h. die Tangentenpaare des HZ sind die Minimalprojektion der regulären Erzeugenden des Zylindroids. Auf Grund dieser Tatsache ergeben sich alle Eigenschaften der

¹⁾ Sur les hypercycles, ges. Werke, II, S. 621.

²⁾ Bei Laguerre: une couple de tangentes conjuguées.

³⁾ Diese Erzeugung des Zylindroids hat schon St. Jolles angeg. Fokaltheorie der Kongruenzen, math. Ann. 63 (1907).

HZ IV, die Laguerre angegeben hat, mit Hilfe der Minimalprojektion aus bekannten Eigenschaften des Zylindroids.

Wir geben gleich einige Beispiele dafür, wie sich bekannte Sätze über das Zylindroid auf den *HZ IV* übertragen lassen. Wir werden hiebei im folgenden mit „Speerinvolution“ die involutorisch gepaarten Speere eines eigentlichen Zyklus bezeichnen, d. i. die Minimalprojektion der Strahlen eines Büschels mit eigentlichem Scheitel.

<p>Raum:</p> <p>Ein Zylindroid kann auf ∞^2 Arten als Ort der gemeinsamen Normalen seiner Doppelgeraden und der Geraden eines Büschels erzeugt werden.</p> <p>Die Scheitel der Büschel liegen auf dem Zylindroid.¹⁾</p>	<p>Ebene:</p> <p>Ein <i>HZ IV</i> kann auf ∞^2 Arten als Ort von Speerpaaren konstruiert werden, die gleichzeitig das Paar der Fundamental-speere und die Speerpaare einer Involution harmonisch trennen.</p> <p>Die Zyklen dieser Speerinvolutionen berühren je zwei gepaarte Tangenten des <i>HZ IV</i>.</p>
--	--

Allgemeiner gilt:

<p>Der Ort der gemeinsamen Normalen einer festen Geraden und den regulären Erzeugenden eines Zylindroids ist im allgemeinen wieder ein Zylindroid.²⁾</p>	<p>Alle Speerpaare, die ein festes Paar und die gepaarten Tangenten eines <i>HZ IV</i> gleichzeitig harmonisch trennen, bilden im allgemeinen die gepaarten Tangenten eines anderen <i>HZ IV</i>.</p>
---	---

Nachdem wir den Begriff der gepaarten Tangenten entwickelt und auch verwertet haben, wollen wir die „Polarität“ bezüglich eines *HZ IV* auseinander setzen, die auch Laguerre angegeben hat.³⁾ Es sei δ eine eigentliche Minimalebene, die Φ nicht berührt, \mathfrak{D} ihre Minimalprojektion, ferner $\mathfrak{U}\mathfrak{U}'$ ein Tangentenpaar des *HZ IV* und $\alpha\alpha'$ die ihnen durch die Minimalprojektion zugeordneten Minimalebenen. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{U}}$ sei der Speer, der durch das Paar $\mathfrak{U}\mathfrak{U}'$ von \mathfrak{D} harmonisch getrennt wird, $\delta_{\mathfrak{U}}$ die zugehörige Minimalebene. Die vier Ebenen α, α', δ und $\delta_{\mathfrak{U}}$ gehen durch einen Punkt x .

Wir behaupten nun: $\delta_{\mathfrak{U}}$ geht durch den Pol p_{δ} von δ bezüglich des Paraboloids Φ . Um dies nachzuweisen, projizieren wir Φ aus x auf die uneigentliche Ebene ω in einen Kegelschnitt K_x , der der Schar S angehört, welche die uneigentlichen Erzeugenden

¹⁾ Vgl. z. B. E. Study: Geom. der Dynamen, S. 57.

²⁾ Vgl. a. a. O., S. 330.

³⁾ Ges. Werke, II, S. 623, Nr. 6.

$T_\omega T'_\omega$ von Φ und die Spuren A_ω und A'_ω von α und α' auf ω als Basistangenten hat. Diese Schar S bestimmt nun bekanntlich eine quadratische, involutorische, birationale Transformation der Geraden von ω , wenn man nämlich einer uneigentlichen Geraden diejenige uneigentliche Gerade zuordnet, auf der die Pole der ersten bezüglich aller Kegelschnitte der Schar gelegen sind. Von dieser Transformation zeigt man nun auf Grund der Tatsache, daß die Geradenpaare $P_\omega P'_\omega$ und $T_\omega T'_\omega$ einander harmonisch trennen — hier kommt also die besondere Wahl von Φ zur Geltung —, daß sie den absoluten Kegelschnitt J in sich transformiert und jeder Tangente von J die bezüglich A_ω und A'_ω harmonische zuordnet. Daraus folgt aber, daß die Spuren von δ und $\delta_\mathfrak{A}$ auf ω , die ja J berühren und $A_\omega A'_\omega$ harmonisch trennen, bezüglich K_x konjugiert sind, so daß auch δ und $\delta_\mathfrak{A}$ bezüglich Φ konjugiert sind, w. z. b. w.

Hält man jetzt \mathfrak{D} fest und läßt die gepaarten Tangenten $\mathfrak{A} \mathfrak{A}'$ längs des HZ wandern, so beschreibt $\mathfrak{D}_\mathfrak{A}$ die Minimalprojektion $\mathfrak{p}_\mathfrak{D}$ des Poles \mathfrak{p}_δ von δ bezüglich Φ . $\mathfrak{p}_\mathfrak{D}$ wollen wir den Polarzykel von \mathfrak{D} bezüglich des HZ IV nennen. Zusammenfassend können wir feststellen:

Sucht man zu einem Speere \mathfrak{D} bezüglich aller Tangentenpaare eines HZ IV den vierten harmonischen, so erhält man die Speere eines Zyklus $\mathfrak{p}_\mathfrak{D}$, des Polarzyklus von \mathfrak{D} . Diese Polarität bezüglich des HZ IV ist die Minimalprojektion der Polarität bezüglich des Paraboloids Φ mit normalen Richtebenen, d. h. ist δ die zu \mathfrak{D} gehörige Minimalebene, so ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{D}$ die Minimalprojektion des Poles von δ bezüglich Φ .

Den ersten Teil dieser Beziehung erhält man auch unmittelbar als Folge des bekannten Satzes über das Zylindroid: Wendet man eine eigentliche Ebene um die einfachen, eigentlichen Erzeugenden eines Zylindroids um, so erhält man ∞^1 Ebenen, die alle durch einen Punkt hindurchgehen (im allgemeinen die Tangentialebenen eines Drehkegels).¹⁾

Laguerre hat die HZ IV folgendermaßen definiert.²⁾

Alle Speerpaare, die gleichzeitig ein festes Paar verschiedener orientierter Geraden $\mathfrak{P} \mathfrak{P}'$ und ein zweites, dessen eine \mathfrak{D} fest ist und dessen zweite einen eigentlichen Zykel $\mathfrak{p}_\mathfrak{D}$ beschreibt, harmonisch trennen, bilden die Tangentenpaare eines HZ IV.

Da durch die Angabe der Achse R und des Poles \mathfrak{p}_δ einer eigentlichen Ebene δ das Paraboloid Φ eindeutig bestimmt ist, so erkennt man die Übereinstimmung dieser Erzeugung mit der zuvor gegebenen.

¹⁾ G. Darboux: Sur les mouvements algébriques, in den Leçons de Cinématique von G. Königs.

²⁾ a. a. O., S. 623, Nr. 6.

Es ist jetzt leicht, die Eigenschaften der Polarität bezüglich des HZ IV, die Laguerre angegeben hat,¹⁾ aus der räumlichen Deutung abzulesen. Heben wir z. B. für einen HZ IV₀ hervor: Alle Pole p_δ erfüllen das polare Gebilde X von J bezüglich Φ , d. i. ein Zylinder mit r_ω als Doppelpunkt. Da X die Geraden $P_\omega P'_\omega$ als Erzeugende enthält, so ist X ein Drehzylinder mit R als Drehachse. X schneidet ζ in einem Kegelschnitte H , der die mit \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' zusammenfallenden Geraden als Asymptoten hat. Den Zykel, der die Minimalprojektion des Poles von ζ bezüglich Φ ist, nennen wir f . Es gilt dann die Beziehung: Die Polarzykel der Speere von f sind Nullzykel, deren Mittelpunkte auf H liegen.

Gehen wir jetzt von der folgenden Erzeugung eines Zylindroids aus: Rollt ein Drehzylinder Ψ in einem zweiten X mit doppeltem Durchmesser ohne zu gleiten, so beschreibt ein ebener Schnitt von Ψ , dessen eigentliche Ebene τ zur Drehachse R von X weder parallel noch normal ist, ein Zylindroid Z , und zwar beschreibt jeder Punkt des ebenen Schnittes eine einfache Erzeugende von Z .²⁾ Zu dieser Erzeugung von Z kann man als Ebene τ auch eine beliebige eigentliche Minimalebene verwenden, die Z berührt. Irgend zwei eigentliche einfache Erzeugende von Z schneiden die Minimalebene τ in zwei Punkten, deren Entfernung sich bei der Bewegung von τ nicht ändert. Die Minimalprojektion dieser Beziehung lautet:

Sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ zwei feste Tangentenpaare und \mathfrak{T} eine veränderliche Tangente eines HZ IV, so ist die Tangentialentfernung der Zykel $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{T}]$ und $[\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{T}]$ konstant oder genauer, wenn wir mit a_0 und b_0 die Berührungspunkte der beiden Zykel mit \mathfrak{T} bezeichnen: die Strecke $a_0 b_0$ bleibt der Größe und dem Vorzeichen nach ungeändert.³⁾

Aus bekannten metrischen Eigenschaften des Zylindroids schließt man, daß die einfachen Erzeugenden von Z bezüglich Φ paarweise reziproke Polaren sind. Sind nun A und B zwei solche polare Erzeugende, so schneiden sie die veränderliche Minimalebene τ in zwei Punkten mit verschwindender Entfernung, denn eine beliebige Tangentialebene von Z schneidet Z außer in einer einfachen Erzeugenden noch in einem Kegelschnitte, dessen Punkte durch die involutorische Anordnung der Erzeugenden von Z auch involutorisch gepaart sind, und zwar ist das Involutionzentrum die orthogonale Projektion des uneigentlichen Punktes r_ω von R auf die Tangentialebene; ist nun die Tangentialebene eine eigentliche Minimalebene, so fällt die orthogonale Projektion von r_ω mit dem

¹⁾ a. a. O., Nr. 6, 7, 11, 12, 13.

²⁾ Vgl. etwa K. Zindler, Liniengeometrie, Bd. 1.

³⁾ a. a. O., Nr. 3.

absoluten Punkte der Ebene zusammen, so daß wirklich die Entfernung zweier zugeordneter Punkte des Schnittkegelschnittes null ist. Die Tangentialentfernung $\overline{a_0 b_0}$ der zugehörigen Zykel ist also ebenfalls null.¹⁾

Beweisen wir noch den folgenden Satz:²⁾

Es seien $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$ vier Tangenten eines HZ IV, ferner \mathcal{C}' und \mathcal{D}' die zu \mathcal{C} und \mathcal{D} gepaarten; berühren nun die vier Speere $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$ einen Zykel, so berühren auch die Speere $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}'\mathcal{D}'$ einen.

Die entsprechende räumliche Beziehung lautet: Es seien $G_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ und $G_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ zwei Euklidische, sich schneidende Gerade, durch die je zwei Minimalebene hindurch gehen, die die Φ berühren; die durch Umwendung an R aus $G_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ hervorgehende Gerade $G'_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ schneidet auch $G_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Das ist aber offenbar richtig, denn die beiden Geraden $G_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ und $G_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ liegen auf einem Paraboloid Φ' der konfokalen Schar $[\Phi J]$, $G'_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ liegt daher ebenfalls auf Φ' und schneidet $G_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ als Erzeugende der anderen Schar.

Halten wir $G_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ fest und lassen wir $G_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ die eine Regelschar von Φ' durchlaufen, so beschreiben die Schnittpunkte $[G_{\mathcal{A}\mathcal{B}} G_{\mathcal{C}\mathcal{D}}]$ und $[G_{\mathcal{A}\mathcal{B}} G'_{\mathcal{C}\mathcal{D}}]$ Punktreihen, die bezüglich des Schnittpunktes von $G_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ mit der Scheiteltangentialebene von Φ' symmetrisch sind. Dieser letzte Punkt liegt aber auf dem Zylindroid Z , das doch von allen Scheitelerzeugenden der Paraboloiden der konfokalen Schar $[\Phi J]$ gebildet wird. Übertragen wir dies auf die Ebene, so erhalten wir:

Halten wir die zwei Speere \mathcal{A} und \mathcal{B} , die nicht gepaart sein sollen, fest und lassen wir gleichzeitig die Speere \mathcal{C} und \mathcal{D} so längs des HZ IV wandern, daß sie mit \mathcal{A} und \mathcal{B} immer einen Zykel \mathfrak{z} bestimmen, so bestimmen auch die vier Speere $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}'\mathcal{D}'$ einen Zykel \mathfrak{z}' und der Mittelzykel \mathfrak{z}_0 von \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' bleibt fest und berührt ein Paar gepaarter Tangenten.

Durch besondere Annahmen kann man hieraus Beziehungen für die Krümmungsmittelpunkte, Brennpunkte und außerordentlichen Doppeltangenten ableiten,³⁾ worauf wir nicht eingehen wollen.

Wir haben jetzt alle wesentlichen Sätze Laguerres über die HZ IV nachgewiesen und ihre Zusammenhänge mit bekannten Sätzen der räumlichen Geometrie aufgedeckt.

Nehmen wir an, daß R auf ζ normal stehe und überdies ζ Scheiteltangentialebene von Φ sei. Dann sind die aufeinander

¹⁾ a. a. O., Nr. 4.

²⁾ a. a. O., Nr. 14.

³⁾ Vgl. a. a. O., Nr. 14, 15.

normalen Scheitelerzeugenden von Φ die außerordentlichen Doppeltangenten des $HZ IV$. Die Laguerreschen Spiegelungen des $HZ IV$ in sich sind die Symmetrien bezüglich dieser Doppeltangenten und die Umwendung des $HZ IV$ in sich ist die Spiegelung bezüglich des Scheitels von Φ . In den Doppeltangenten fallen daher je zwei gepaarte Tangenten gegensinnig zusammen. Eine veränderliche Tangente \mathfrak{T} des $HZ IV$ bestimmt mit diesen beiden Paaren nach einem früheren Satze, zwei Zykeln, hier Nullzykel, deren Tangentialentfernung konstant bleibt. Das heißt aber nichts anderes als: Eine veränderliche Tangente schneidet zwei aufeinander normale Gerade in Punkten konstanter Entfernung. Das ist aber die bekannte Definition der viergespitzten Hypozykloide¹⁾ oder Astroide. Wir haben also gefunden:

Die doppeltsymmetrischen $HZ IV$ sind orientierte Parallelkurven orientierter Astroiden.

Bezüglich der Realitätsverhältnisse der reellen $HZ IV$ ist folgendes zu bemerken: Jeder reelle $HZ IV$ hat einen reellen, paaren Zug. Im übrigen sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Fundamentalspeere $\mathfrak{P} \mathfrak{P}'$ sind konjugiert imaginär, dann sind die F'_i und S_i reell;
2. die Fundamentalspeere sind reell, dann sind entweder einerseits die F'_i und andererseits die S_i ebenfalls konjugiert imaginär oder
3. die F_i und S_i sind reell (vgl. Fig. 8 auf Seite 37).

Im Falle 2. versagt im reellen Gebiete die Konstruktion vermittle der Berührungstransformation \mathfrak{B}_i .

§ 9. Die Hyperzykel der V. Familie.

In der zu einem $HZ V$ gehörigen konfokalen Schar $[\Phi J]$ gibt es nur einen einzigen Fokalkegelschnitt F' , eine Parabel, die J in einem Punkte i schneidet.

Aus einer Parabel F' entsteht also dann ein $HZ V$ durch eine Berührungstransformation \mathfrak{B} , wenn die Achse der Parabel (als Punktort betrachtet) durch \mathfrak{B} in eine gerade Berührungsreihe von Zykeln transformiert wird (siehe Fig. 9 auf der nächsten Seite).

Die konfokale Schar bei einem $HZ V$ ist gegenüber der projektiven Gruppe des Raumes äquivalent der konfokalen Schar bei einem $HZ III$. Wir können daher einige Eigenschaften der

¹⁾ D. h. mit vier im Endlichen liegenden Spitzen.

worin a eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, und die kontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeiten, die F in Ruhe lassen, durch die folgenden:

$$\begin{cases} x = e^{3it} \{ x_0 \cos t - y_0 \sin t \}, \\ y = e^{3it} \{ x_0 \sin t + y_0 \cos t \}, \\ z = e^{3it} z_0, \end{cases}$$

wobei t einen Parameter bedeutet. Ein Punkt des Raumes bewegt sich bei den Transformationen der Gruppe im allgemeinen auf einer rationalen W -Kurve vierter Ordnung, die man auch als allgemeine Schraubenlinie eines parabolischen Zylinders bezeichnen kann. Ihre Krümmung und Torsion sind ihrer Bogenlänge proportional.

Für die Ebene erhalten wir:

Ein $HZ V$ gestattet eine gemischte eingliedrige Gruppe von Transformationen der erweiterten Laguerreschen Gruppe G_7 .

Die natürliche Gleichung der $HZ V$ hat die Form:

$$J = \frac{5}{9\sigma^2}.$$

Ein reeller $HZ V$ hat stets einen reellen, unpaaren Zug und F' ist eine reelle Parabel. Es gibt keine reelle Laguerresche Spiegelung, die einen $HZ V$ in eine reelle Parabel transformiert.

Die $HZ V$ erscheinen als Grenzfälle der $HZ IV$. Trotzdem hat Laguerre die $HZ V$ nicht bemerkt, was dadurch zu erklären ist, daß die Polarität bezüglich der $HZ IV$, die ja bei Laguerre zur Definition benützt wird, bei ihrer Anwendung auf den $HZ V$ völlig ausartet, da zu jedem Speere des $HZ V$ die uneigentliche Gerade gepaart ist.

§ 10. Die Hyperzykel der VI. Familie.

Es sei F' eine Parabel in einer eigentlichen Minimalebene σ , deren uneigentlicher Punkt r nicht dem absoluten Kegelschnitte J angehört. Die Mannigfaltigkeit von Ebenen, die man J und F' gleichzeitig umschreiben kann, ist, wenn man von dem Ebenenbüschel mit der uneigentlichen Geraden S_ω von σ als Achse absieht, von der dritten Klasse, d. h. Tangentenfläche einer Raumkurve dritter Ordnung C . Die Tangentenfläche berührt die eigentliche Ebene ω längs der Tangente P_ω , die man aus r an J außer der Geraden S_ω noch legen kann und jede eigentliche Tangentialebene der Fläche oder, was dasselbe ist, jede eigentliche Schmiegebene von C schneidet die Tangentenfläche außer in einer doppelt zu zählenden Erzeugenden noch in einer Parabel F_r .¹⁾ Da

¹⁾ Die sogenannten „Oskulanten“ von C .

ω Schmiegebene der C im Berührungspunkte i von P_ω , mit J ist, so kann man C nach der üblichen Ausdrucksweise als kubische Parabel bezeichnen. Wir setzen im folgenden voraus, daß der uneigentliche Punkt z_ω der Normalen auf ζ nicht auf P_ω liege.

Es gibt eine gemischte (aus vier getrennten, kontinuierlichen Scharen bestehende) eingliedrige Gruppe von Bewegungen und Umlegungen, bei welchen C in sich transformiert wird. Stellen wir C in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichungen dar:

$$C \begin{cases} x = -i \left\{ \frac{p}{2} - \frac{p^3}{6} \right\}, \\ y = \left\{ \frac{p}{2} + \frac{p^3}{6} \right\}, \\ z = i \frac{p^2}{2}, \end{cases}$$

so wird die kontinuierliche Bewegungsgruppe, die C gestattet, durch folgende Formeln darstellt:

$$\begin{cases} x = -i \left\{ \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} \right\} + \left\{ 1 - \frac{t^2}{2} \right\} x_0 + i \frac{t^2}{2} y_0 + t z_0, \\ y = \left\{ \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} \right\} + i \frac{t^2}{2} x_0 + \left\{ 1 + \frac{t^2}{2} \right\} y_0 - i t z_0, \\ z = i \frac{t^2}{2} - t x_0 + i t y_0 + z_0. \end{cases} \quad (1)$$

Die eigentlichen Punkte des Zylinders, durch welchen C aus dem absoluten Punkte, den wir oben i genannt haben, projiziert wird und dessen Gleichung

$$\{x - iy\}^2 - 2iz = 0$$

lautet, beschreiben bei der Bewegungsgruppe Minimalkurven, die mit C durch Schiebungen in der Richtung i zur Deckung gebracht werden können. Jeder eigentliche Punkt, der dem Zylinder nicht angehört, beschreibt offenbar eine unebene algebraische Kurve konstanter Krümmung und Torsion, d. i. eine sogenannte Lyonsche Kurve dritter Ordnung.²⁾

Wir haben also gefunden:

Ein *HZ VI* gestattet und bestimmt eine eingliedrige gemischte Gruppe von Laguerreschen Transformationen.

¹⁾ Um diese kontinuierliche Gruppe zur gemischten automorphen Gruppe zu erweitern, genügt es z. B. die Bewegung $\{x = -x_0, y = -y_0, z = z_0\}$ und die Umlegung $\{x = y_0, y = -x_0, z = -z_0\}$ zu adjungieren.

²⁾ Vgl. Lyon: Sur les courbes à torsion constant. Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble, T. II, 1890.

Beurteilt man die Schönheit eines geometrischen Gebildes nach der Anzahl der automorphen Transformationen, so müssen wir unter den *HZ* denen von der VI. Familie den Schönheitspreis zuerkennen, denn während die *HZ* der Familien I bis V nur endliche diskrete Gruppen aus der Laguerreschen Gruppe G_6 gestatten, gestattet der *HZ* VI eine kontinuierliche Gruppe aus G_6 .

Man erkennt ferner aus dem früheren:

Ein *HZ* VI ist auf ∞^1 Arten Reflexionsantikaustik je einer Parabel F'_r für Parallelbeleuchtung. Oder:

Ein *HZ* VI kann auf ∞^1 Arten dadurch erzeugt werden, daß man an allen Tangenten einer Parabel F'_r eine feste orientierte Gerade, die nicht zur Scheiteltangente parallel sein darf, spiegelt.¹⁾

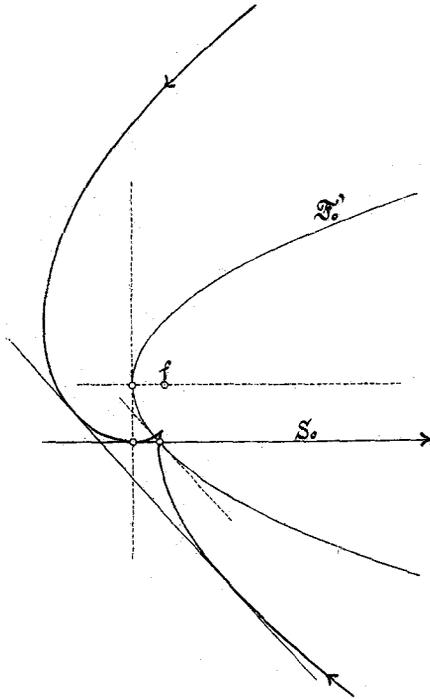


Fig. 10.

Oder endlich:

Die Mittellinien zwischen einer beliebigen aber festen, orientierten Geraden, die Tangente eines *HZ* VI ist, und einer veränderlichen Tangente dieses *HZ* VI umhüllt stets eine Parabel F'_r .

¹⁾ Man kann diese Erzeugung natürlich auch wieder durch das Abrollen symmetrischer Parabeln erklären, vgl. S. 32, 33.

Die Parabeln F'_τ haben ihren Brennpunkt f gemeinsam, der auch gleichzeitig außerordentlicher Brennpunkt des HZ VI ist, ferner berühren ihre Scheiteltangenten wieder eine Parabel F'_0 , die auch dem System der F'_τ angehört. Der HZ VI kann durch Spiegelung einer festen orientierten Geraden, die zur Achse von F'_0 parallel ist, an den Tangenten von F'_0 erzeugt werden. (Siehe Fig. 10 auf der vorhergehenden Seite.)

Der HZ VI beziehungsweise die mit ihm zusammenfallende nicht orientierte Kurve ist von der dritten Klasse und vierten Ordnung, hat eine außerordentliche Doppeltangente, geht einmal durch die absoluten Punkte und berührt die uneigentliche Gerade.

Seine Evolute ist als Grundriß von C eine rationale Kurve dritter Ordnung, die die uneigentliche Gerade als Wendetangente hat.

Laguerre hat die HZ VI eingehend untersucht¹⁾ und sich dabei besonders der Erwägung bedient, daß ein HZ VI auf ∞ viele Arten als Grenzfall eines HZ IV angesehen werden kann, so daß sich auch die Polarentheorie des HZ IV auf ∞ viele Arten auf den HZ VI anwenden läßt.

Aus der Fülle von Laguerres Sätzen wollen wir nur noch den folgenden herausgreifen:

Ein HZ VI ist durch fünf verschiedene seiner orientierten Geraden eindeutig bestimmt.

Nennen wir nämlich die fünf orientierten Geraden U_k ($k=1, 2, \dots, 5$), so bestimmen z. B. die vier Mittellinien der Speerpaare $U_k U_5$ ($k=1, 2, 3, 4$) eine Parabel F'_τ und der HZ VI entsteht durch Spiegelung des durch Umkehrung aus U_5 entstehenden Speeres an den Tangenten von F'_τ .

Die natürliche Gleichung des HZ VI lautet

$$J = 0.$$

Wir sehen: die HZ III, V und VI gehören einer Kurvenfamilie an, die durch die natürliche Gleichung

$$J = \frac{a}{\sigma^2}$$

charakterisiert ist. Jede derartige Kurve gestattet und bestimmt für $a \neq 0$ eine eingliedrige gemischte Gruppe aus G_7 . Diese Kurven haben also für die erweiterte Laguerresche Gruppe eine analoge Bedeutung, wie die logarithmischen Spiralen für die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen.

Ein reeller HZ VI hat stets einen reellen, paaren Zug.

Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, daß es in jeder der sechs Familien von HZ , wie wir gesehen haben, reelle und auch mit reellen Zügen versehene Kurven gibt.

¹⁾ Vgl. die zu Anfang (S. 2) genannten Abhandlungen 3, 4 und 7.

§ 11. Einige Bemerkungen über die analytische Behandlung der Laguerreschen Gruppe und der Hyperzykel.

Wir haben zu Anfang ein System von Speerkoordinaten benützt, das jedoch zur Darstellung von G_7 nicht besonders geeignet ist. Wir führen daher jetzt ein neues Koordinatensystem¹⁾ ein, das wir mit dem früheren System der \mathfrak{S}_i durch die folgenden Gleichungen in Verbindung bringen:

$$(19) \quad \begin{cases} t_{00} = \mathfrak{S}_0, \\ t_1^2 = \mathfrak{S}_1 + i \mathfrak{S}_2, \\ t_2^2 = \mathfrak{S}_1 - i \mathfrak{S}_2, \\ t_1 t_2 = i \mathfrak{S}_3. \end{cases} \quad (i = \sqrt{-1})$$

Die neuen Speerkoordinaten sind unabhängig veränderlich und in dem Sinne homogen, daß die Substitution

$$\begin{cases} t'_{00} = \rho^2 t_{00}, \\ t'_1 = \rho t_1, \\ t'_2 = \rho t_2 \end{cases} \quad (\rho \neq 0)$$

die identische Transformation darstellt.

Die Gruppe G_7 wird durch die Formeln gegeben:

$$(20) \quad \begin{cases} t_{00} = K \delta t'_{00} + \alpha_{11} t_1'^2 + 2 \alpha_{12} t_1' t_2' + \alpha_{22} t_2'^2, \\ t_1 = \beta_{11} t_1' + \beta_{12} t_2', \\ t_2 = \beta_{21} t_1' + \beta_{22} t_2', \end{cases}$$

wobei $K \neq 0$ und $\delta = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12} \beta_{21} \neq 0$ ist.

Die Gruppe der eigentlichen Laguerreschen Transformationen ist durch $K=1$, die Schar der uneigentlichen durch $K=-1$ charakterisiers. Sobald man nur geometrische Eigenschaften untersuchen will, die gegenüber G_7 oder G_6 invariant sind, so kann man natürlich die Substitutionsformeln (19) mit einer beliebigen Substitution (20) zusammensetzen, was man z. B. so einrichten kann, daß man vom System der \mathfrak{S}_i durch eine reelle Substitution zu den t' übergeht.

Das Doppelverhältnis von vier Speeren $U^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, 4$) ist gleich dem Doppelverhältnis der zugehörigen binären Veränderlichen $t_1^{(k)}:t_2^{(k)}$, ihre Doppeldifferenz ist durch den Ausdruck gegeben (vgl. Formel (15) in § 3, S. 15):

¹⁾ Dieses System von Speerkoordinaten verdanke ich einer Mitteilung des Herrn Prof. E. Study.

$$(21) \quad \delta' = \frac{2 \begin{vmatrix} t_{00}^{(1)} t_1^{(1)2} t_1^{(1)} t_2^{(1)} t_2^{(1)2} \\ t_{00}^{(2)} t_1^{(2)2} t_1^{(2)} t_2^{(2)} t_2^{(2)2} \\ t_{00}^{(3)} t_1^{(3)2} t_1^{(3)} t_2^{(3)} t_2^{(3)2} \\ t_{00}^{(4)} t_1^{(4)2} t_1^{(4)} t_2^{(4)} t_2^{(4)2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1^{(1)} t_1^{(2)} \\ t_2^{(1)} t_2^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_1^{(2)} t_1^{(3)} \\ t_2^{(2)} t_2^{(3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_1^{(3)} t_1^{(4)} \\ t_2^{(3)} t_2^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_1^{(4)} t_1^{(1)} \\ t_2^{(4)} t_2^{(1)} \end{vmatrix}}.$$

Eine Gleichung

$$(22) \quad k t_{00} + k_{11} t_1^2 + 2 k_{12} t_1 t_2 + k_{22} t_2^2 = 0$$

stellt einen Zykel dar. Dieser Zykel ist uneigentlich, wenn $k = 0$ und ausgezeichnet uneigentlich, wenn gleichzeitig $k = 0$ und $k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 0$. Die Koeffizienten k von (22), die man als Zykelkoordinaten benutzen kann, substituieren sich bei der Transformation (20) folgendermaßen:

$$(23) \quad \begin{cases} k' = K \delta k, \\ k'_{11} = \alpha_{11} k + \beta_{11}^2 k_{11} + 2 \beta_{11} \beta_{21} k_{12} + \beta_{21}^2 k_{22}, \\ k'_{12} = \alpha_{12} k + \beta_{11} \beta_{12} k_{11} + (\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{12} \beta_{21}) k_{12} + \beta_{21} \beta_{22} k_{22}, \\ k'_{22} = \alpha_{22} k + \beta_{12}^2 k_{11} + 2 \beta_{12} \beta_{22} k_{12} + \beta_{22}^2 k_{22}. \end{cases}$$

Die Spiegelung an dem Zykel (22) kann man so darstellen:

$$(24) \quad \begin{cases} t_{00} = -t'_{00} - \frac{2}{k} (k_{11} t_1'^2 + 2 k_{12} t_1' t_2' + k_{22} t_2'^2), \\ t_1 = t_1', \\ t_2 = t_2'. \end{cases}$$

Das Quadrat der Tangentialentfernung zweier Zykeln f und \bar{f} ist.

$$(25) \quad t^2 = \frac{\begin{vmatrix} k_{11} \bar{k}_{11} \\ k \bar{k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{22} \bar{k}_{22} \\ k \bar{k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_{12} \bar{k}_{12} \\ k \bar{k} \end{vmatrix}^2}{k \bar{k}}.$$

Eine irreduzible Gleichung von der Form:

$$(26) \quad f(t_{00}, t_1, t_2) = a t_{00}^2 + (a_{11} t_1^2 + 2 a_{12} t_1 t_2 + a_{22} t_2^2) t_{00} + a_0 t_1^4 + 4 a_1 t_1^3 t_2 + 6 a_2 t_1^2 t_2^2 + 4 a_3 t_1 t_2^3 + a_4 t_2^4 = 0$$

stellt einen Hyperzykel der Familien I bis V dar. Wir schreiben die Gleichung (26) noch abkürzend:

$$(26)' \quad f(t_{00}, t_1, t_2) = a t_{00}^2 + f_2 t_{00} + f_4 = 0.$$

Die Gleichung des mit dem *HZ* invariant verbundenen Zyklus m , den wir oben als die Minimalprojektion des Mittelpunktes der zugehörigen konfokalen Schar erklärt haben, ist:

$$(27) \quad \frac{df}{dt_{00}} = 2 a t_{00} + f_2 = 0.$$

Setzen wir zunächst $a \neq 0$ voraus, dann ist der Zykel m eigentlich und der *HZ* gehört daher einer der Familien I, II oder III an. Der *HZ* hat mit m die Asymptoten gemein. Eliminiert man demnach aus (26)' und (27) t_{00} , so erhält man eine Gleichung vierten Grades

$$(28) \quad f_2^2 - 4 a f_4 = 0,$$

die uns die Asymptotenrichtungen liefert. Je nachdem nun diese Gleichung vier getrennte Wurzeln ergibt oder zwei oder endlich drei zusammenfallende, gehört der *HZ* entsprechend der Familie I, II oder III an.

An zweiter Stelle nehmen wir jetzt $a = 0$ an. Dann stellt unsere Gleichung (26) einen *HZ* der Familie IV oder V dar, je nachdem $(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \neq 0$ ist oder $= 0$ ist.

Eine irreduzible Gleichung

$$(29) \quad (a_1 t_1 + a_2 t_2) t_{00} + b_0 t_1^3 + 3 b_1 t_1^2 t_2 + 3 b_2 t_1 t_2^2 + b_3 t_2^3 = 0$$

stellt einen *HZ* VI dar.

Durch die „homogenen“ Koordinaten t_{00}, t_1, t_2 ist ein abgeschlossenes Kontinuum von Speeren dargestellt, das man nach der Terminologie des Herrn Study als ein natürliches Kontinuum für unsere Gruppe G_7 ¹⁾ zu bezeichnen hat. Unsere neuen Koordinaten haben ferner folgende bemerkenswerte Eigenschaft: ²⁾

Jede irreduzible und folglich auch jede reduzible orientierte (algebraische) Kurve in unserem natürlichen Kontinuum kann *rein* dargestellt werden durch eine gleich Null gesetzte, im erklärten Sinne homogene Form in t_{00}, t_1, t_2 .

Die früher benutzten Koordinaten \mathfrak{S}_k hatten diese Eigenschaft nicht, denn z. B. konnte ein *HZ* VI nicht rein dargestellt werden.

Wir wollen den Exponenten der höchsten Potenz von t_{00} in einer Kurvengleichung mit μ bezeichnen und den Gesamtgrad der

¹⁾ Über den von Herrn Study eingeführten Begriff des natürlichen Kontinuums vgl. etwa die Geom. d. Dynamen, § 27, oder auch die Enzyklopädie III, AB, 4, b. G. Fano, Nr. 19, S. 333.

²⁾ Vgl. den Beweis für eine analoge Eigenschaft in der Geometrie der Dynamen, S. 274 u. f.

Gleichung, wobei t_{00} mit dem Gewichte Zwei in Rechnung zu ziehen ist, mit ν . Diese beiden Zahlen sind gegenüber G_7 invariant und ihre geometrische Deutung ist offenkundig: μ ist die Zahl der Speere, welche die betrachtete orientierte Kurve mit einem beliebigen Büschel gleichsinnig paralleler Speere gemein hat, und ν ist die Zahl der Speere, welche die Kurve mit einem beliebigen eigentlichen Zykel gemein hat.

Für Büschel syntaktischer Speere ist $(\mu, \nu) = (0, 1)$, für uneigentliche Zykel $(\mu, \nu) = (0, 2)$ und für eigentliche $(\mu, \nu) = (1, 2)$. Für die sechs Familien von HZ ist der Reihe nach $(\mu, \nu) = (2, 4), (2, 4), (1, 4), (1, 4), (1, 4), (1, 3)$.

Mit Hilfe der Methoden von Study¹⁾ findet man aus unserem letzten Satze:

Es gibt für die Gruppe G_7 (und ebenso auch für G_6) zwei und nur zwei verschiedene natürliche Kontinuen.

Das erste dieser Kontinuen ist das bis jetzt ausschließlich betrachtete. Das zweite natürliche Kontinuum enthält ∞^1 „uneigentliche“ Sperre, und zwar derart, daß in jedem Büschel gleichsinnig paralleler Speere ein einziger uneigentlicher Speer enthalten ist und umgekehrt, durch jeden uneigentlichen Speer ein einziges derartiges Büschel hindurchgeht.

Geeignete Koordinaten für dieses zweite natürliche Kontinuum erhält man folgendermaßen. Man setze

$$t_{00} = \tau_{00}, \quad t_1 = \tau \tau_1, \quad t_2 = \tau \tau_2.$$

Erklärt man nun die neuen Koordinaten $(\tau_{00}, \tau, \tau_1, \tau_2)$ in dem Sinne als homogen, daß die Systeme

$$(\tau_{00}, \tau, \tau_1, \tau_2) \text{ und } (\rho^2 \sigma^2 \tau_{00}, \rho \tau, \sigma \tau_1, \sigma \tau_2)$$

als äquivalent angesehen werden, wenn ρ und σ unabhängige, von Null verschiedene Proportionalitätsfaktoren bedeuten, so wird durch diese Koordinaten, wenn man ausschließt, daß τ_1 und τ_2 gleichzeitig Null werden, das zweite natürliche Kontinuum umkehrbar eindeutig dargestellt. Dem Werte $\tau = 0$ entsprechen die ∞^1 uneigentlichen Speere.

Die Speere des ersten natürlichen Kontinuums kann man, wie wir ausführlich untersucht haben, so auf die Punkte eines irreduziblen Kegels ausnahmslos umkehrbar eindeutig abbilden, daß die G_7 durch diese Abbildungen die Gruppe der automorphen Kollineationen des Kegels übergeht. Dasselbe kann man für das zweite natürliche Kontinuum durch eine Abbildung auf eine rationale Mannigfaltigkeit M_2 in einem ebenen Raume R_5 erreichen, die man folgendermaßen konstruiert: Man nehme eine Kurve dritter Ordnung in einem R_3 und eine gerade Linie, die den R_3 nicht schneidet. Bezieht man die binären Gebiete dieser beiden rationalen Kurven projektiv aufein-

¹⁾ Geom. d. Dyn., § 27.

ander und verbindet entsprechende Punkte durch Gerade, so erhält man als Ort dieser Verbindungslinien die M_2 . Eine Parameterdarstellung der M_2 , die auch die Abbildung auf das Speerkontinuum verdeutlicht, erhält man etwa, indem man die homogenen Punktkoordinaten x_k im R_5 der M_2 folgenden Produkten aus Speerkoordinaten gleichsetzt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_{00} \tau_1, & x_2 &= \tau_{00} \tau_2; \\ x_3 &= \tau^2 \tau_1^3, & x_4 &= \tau^2 \tau_1^2 \tau_2, & x_5 &= \tau^2 \tau_1 \tau_2^2, & x_6 &= \tau^2 \tau_2^3. \end{aligned}$$

§ 12. Über eine Familie orientierter Kurven, welche die zyklischen Kurven vierter Ordnung enthält.

Setzt man an die Stelle der Gruppe G_7 , die wir zur Grundlage unserer bisherigen Untersuchungen genommen haben, die Gruppe G_{10} aller orientierten Berührungstransformationen, gegenüber welchen die Zykel einen Körper bilden, so wird man zweckmäßig den Zykel als Element unserer Grundebene ζ einführen. Die Minimalprojektion vermittelt den Isomorphismus zwischen G_{10} in ζ mit der konformen Gruppe Γ_{10} des Raumes. Als Koordinaten eines Zyklus sind daher die pentasphärischen Koordinaten des Punktes geeignet, dessen Minimalprojektion der Zykel ist. Orientierte Kurven werden wir hier nicht mehr als Ort von Speeren, sondern als Ort von orientierten Linienelementen anzusehen haben.

In der Geometrie der Gruppe G_{10} tritt an die Stelle der HZ eine andere Kurvenart, die wir in Ermanglung eines besseren Ausdruckes verallgemeinerte HZ (VHZ) nennen wollen. Ein VHZ ist definiert als Minimalprojektion der einer Zyklide umschriebenen Tangentenfläche einer Minimalkurve. Dabei bezeichnen wir als Zyklide wie üblich eine irreduzible Fläche vierter Ordnung, die zweimal durch den absoluten Kegelschnitt hindurch geht.

Wir können über die VHZ leicht einige Sätze aufstellen, die unseren Sätzen über die HZ analog sind. Vor allem folgt aus den Tatsachen, daß jede Transformation von Γ_{10} 1. eine Zyklide wieder in eine Zyklide, 2. die Tangentenfläche einer Minimalkurve wieder in eine solche überführt:

Durch jede Transformation aus G_{10} geht ein VHZ immer wieder in einen VHZ über.

Man kann eine gegenüber G_{10} invariante Einteilung der VHZ wieder auf die bekannte Klassifikation der Büschel von Flächen zweiter Ordnung gegenüber Kollineationen auf folgendem Wege zurückführen: Man bildet unseren R_3 durch stereographische Projektion auf die Punkte einer Kugel K_3^2 in einem R_4 ab, dann bilden sich die Punkte einer Zyklide auf die Punktmanigfaltigkeit ab, die die Flächen eines Büschels $[K_3^2 V_3^2]$ gemein haben, und

die Gruppe Γ_{10} geht in die automorphe projektive Gruppe der Kugel K^2_3 über.¹⁾

Die Fokalkurven einer Zyklide, d. h. die im Endlichen liegenden Doppelkurven der Tangentenfläche einer Minimalkurve, die der Zyklide umschrieben ist, sind im allgemeinen Falle, den wir hier ausschließlich betrachten wollen, in welchem nämlich das zugehörige Büschel im R_4 fünf getrennte einfach singuläre V^2_3 enthält, fünf sphärische zyklische Kurven vierter Ordnung F_i auf fünf Kugeln Φ_i .²⁾ Bemerken wir, daß die Minimalprojektionen der Punkte einer Kugel eine sphärische Zykelkongruenz bilden, das ist im allgemeinen die Gesamtheit der Zykel, die von der Minimalprojektion des Mittelpunktes der Kugel konstante Tangentialentfernung haben und auch den in beliebiger Weise zu einem Zykel orientierten Spurkreis der Kugel auf ζ unter einem Winkel von festem Kosinuswerte treffen, so können wir folgende Beziehung feststellen:

Die doppelt berührenden Zykel eines VHZ bilden im allgemeinen fünf Reihen von ∞^1 Zykeln. Die Zykel jeder Reihe schneiden je einen festen Zykel unter einem Winkel von konstantem Kosinus und ihre Mittelpunkte erfüllen eine Kurve vierter Ordnung F'_i vom Geschlechte 1. Die Kurven F'_i haben untereinander ihre 64 Brennpunkte gemein. Diese sind auch gleichzeitig die außerordentlichen Brennpunkte des VHZ .

Nennt man die Transformation von G_{10} , welche die Minimalprojektion einer räumlichen Transformation durch reziproke Radien oder, wie man auch sagt, der Spiegelung an einer Kugel ist, Spiegelung an einer sphärischen Zykelkongruenz, so folgt aus bekannten Eigenschaften der Zykliden: Es gibt im allgemeinen fünf Spiegelungen an sphärischen Zykelkongruenzen Φ'_i , die einen VHZ in sich transformieren. Diese fünf Spiegelungen erzeugen die diskrete Gruppe der 16 automorphen Transformationen des VHZ aus G_{10} .

Man kann die Gruppe G_{10} durch Zusammensetzung der Laguerreschen Gruppe G_6 mit den sechsgliedrigen ebenen Inversionsgruppe erzeugen, doch ist es nicht möglich, jede beliebige VHZ durch eine Inversion aus einem HZ oder durch eine Laguerresche Transformation aus einer zyklischen Kurve abzuleiten.

Da es im allgemeinen zwei Transformationen durch reziproke Radien gibt, die eine Kugel Φ_i in die Ebene ζ überführen, so folgt: Es gibt im allgemeinen zehn Spiegelungen an sphärischen Zykelkongruenzen, die einen VHZ in eine zyklische Kurve transformieren.

¹⁾ Vgl. F. Klein, Vorl. über höhere Geom., I, S. 381 u. f. und C. Segre, Surfaces du 4. ordre à conique double, Annalen B. 24.

²⁾ Vgl. z. B. G. Darboux: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, S. 119.

Im allgemeinen gelten für einen *VHZ* folgende Anzahlen: das Geschlecht ist 5; Ordnung und Klasse 16; die absoluten Punkte sind achtfache Punkte; es gibt 20 Doppelpunkte in den 5×4 Schnittpunkten mit den Fokalkurven F_i ; ferner 76 Doppeltangenten, darunter 16 ordentliche und 60 außerordentliche; die Zahl der Rückkehrpunkte und Wendepunkte ist 24.

§ 13. Die Laguerresche Transformationsgruppe des Raumes und die zu den Hyperzykeln analogen Flächen.

Wir wollen jetzt noch zum Abschlusse andeuten, wie man die bisherigen Ergebnisse der ebenen Geometrie auf die Geometrie des gewöhnlichen Raumes übertragen kann. Daß eine solche Übertragung möglich ist, darauf hat schon E. Laguerre in einem kurzen Berichte hingewiesen.¹⁾

Als Raumelement in unserem R_3 , wir wollen ihn mit B bezeichnen, führen wir zunächst die orientierte Ebene ein, d. h. eine Ebene, deren positive Normalenrichtung bestimmt ist. Eine solche orientierte Ebene α kann man durch fünf homogene Koordinaten α_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) festlegen, die der Bedingungs-gleichung genügen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha_4^2.$$

Wir nehmen ferner einen Euklidischen R_4 an, der B enthält, und bilden jede orientierte Ebene von B auf einen bestimmten „Minimalraum“ des R_4 ab, d. h. auf einen linearen R_3 , der das absolute Gebilde I_3^2 des R_4 berührt. Wir nennen wieder eine orientierte Ebene die Minimalprojektion des zugehörigen Minimalraumes.

Durch eine lineare Gleichung in den α_i wird ein Gebilde bestimmt, das wir orientierte Kugel nennen wollen. Die Minimalprojektion ordnet jeder orientierten Kugel von B einen einzigen Punkt des R_4 zu und wir nennen die Kugel die Minimalprojektion des Punktes. Tangentialentfernung zweier orientierter Kugeln heißt die Entfernung der Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangentialebene. Sie ist auch gleich der Entfernung der zugehörigen Punkte des R_4 .

Die Minimalprojektion der Gruppe (G_{11}, H_{11}) der Ähnlichkeitstransformationen des R_4 nennen wir die (räumliche) erweiterte Laguerresche Gruppe $(\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{H}_{11})$, die Minimalprojektion der Gruppe $(G_{10}, H_{10}^{(1)}, H_{10}^{(2)}, H_{10}^{(3)})$ der Bewegungen und Umlegungen des R_4 nennen wir die (räumliche) Laguerresche Gruppe $(\mathfrak{G}_{10}, \mathfrak{H}_{10}^{(1)}, \mathfrak{H}_{10}^{(2)}, \mathfrak{H}_{10}^{(3)})$. Aus dem früheren folgt: Die Transformationen von $(\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{H}_{11})$ sind orientierte Berührungstransformationen, die orientierte Kugeln wieder in solche überführen.

¹⁾ Sur la transformation par directions réciproques. C. r. 1881, Ges. W. II, S. 604.

$(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ ist also eine Untergruppe der Lieschen Gruppe $(\mathcal{G}_{15}, \mathcal{H}_{15})$ aller räumlichen, orientierten Berührungstransformationen, die durch die angeführte Eigenschaft charakterisiert sind,¹⁾ und $(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ ist in $(\mathcal{G}_{15}, \mathcal{H}_{15})$ dadurch gekennzeichnet, daß die orientierten Ebenen gegenüber $(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ einen Körper bilden.

Die Transformationen von $(\mathcal{G}_{10}, \mathcal{H}_{10}^{(1)}, \mathcal{H}_{10}^{(2)}, \mathcal{H}_{10}^{(3)})$ lassen die Tangentialentfernungen entsprechender orientierter Kugeln und daher überhaupt entsprechende Tangentialentfernungen orientierter Flächen ungeändert. Alle Transformationen orientierter Ebenen, die diese Eigenschaft haben, bilden, wie E. Study angegeben hat,²⁾ eine im Lieschen Sinne unendliche Gruppe.

$(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ ist (im komplexen Gebiete) eine gemischte Gruppe und zerfällt in zwei kontinuierliche Scharen. $(\mathcal{G}_{10}, \mathcal{H}_{10}^{(1)}, \mathcal{H}_{10}^{(2)}, \mathcal{H}_{10}^{(3)})$ zerfällt hingegen in vier Scharen und enthält zwei invariante, siebengliedrige Untergruppen, deren Durchschnitt eine invariante, viergliedrige Untergruppe ist.

Zum Studium von $(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ eignet sich auch ein System von höheren komplexen Zahlen, nämlich die Quaternionen, wenn man die orientierte Kugel als Raumelement einführt.³⁾

Wir wollen hier kurz angeben, wie die involutorischen Transformationen von $(\mathcal{G}_{10}, \mathcal{H}_{10}^{(1)}, \mathcal{H}_{10}^{(2)}, \mathcal{H}_{10}^{(3)})$ im allgemeinen Falle aussehen. Die involutorischen Transformationen von $(\mathcal{G}_{10}, \mathcal{H}_{10}^{(1)}, \mathcal{H}_{10}^{(2)}, \mathcal{H}_{10}^{(3)})$ nennen wir in leichtverständlicher Bezeichnungsweise (I) Spiegelung an einem (linearen, dreidimensionalen, Euklidischen) Raume, (II) an einer (Euklidischen) Ebene, (III) einer (Euklidischen) Geraden und (IV) Spiegelung an einem (eigentlichen) Punkte. Bezeichnen wir die Minimalprojektion der Punkte eines Raumes als ebenen Kugelkomplex, der Punkte einer Ebene als ebene Kugelnkongruenz und der Punkte einer Geraden als gerade Reihe orientierter Kugeln, so können wir die zugehörigen Transformationen von $(\mathcal{G}_{10}, \mathcal{H}_{10}^{(1)}, \mathcal{H}_{10}^{(2)}, \mathcal{H}_{10}^{(3)})$ (I) Spiegelung an einem ebenen Komplex, (II) Spiegelung an einer ebenen Kongruenz, (III) an einer geraden Reihe orientierter Kugeln und (IV) Spiegelung an einer orientierten Kugel nennen.

(I) Die Spur des R_3 , an welchem gespiegelt wird, auf B sei eine eigentliche Ebene ϵ und die Minimalprojektion eines eigentlichen Punktes des R_3 , den wir als nicht in B befindlich voraussetzen,

¹⁾ Vgl. z. B. F. Klein: Höhere Geom., S. 485.

²⁾ Sitzungsber. d. niederrheinischen Ges. f. Natur- und Heilkunde (1904). S. 50; siehe bes. S. 58, Nr. 6. Vgl. auch die Arbeit des Verfassers „Über einige unendliche Gruppen von Transformationen orientierter Ebenen“, die demnächst im Archiv f. Math. erscheinen wird. Hier ist auch am Schlusse eine analytische Darstellung der Gruppe $(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ angegeben.

³⁾ C. Stephanos: Sur la Théorie des quaternions. Annales, B. 22, S. 590.

sei eine orientierte Kugel Φ . Man findet dann zu einer orientierten Ebene die entsprechende zufolge der drei Tatsachen, daß sich erstens entsprechende orientierte Ebenen auf ε schneiden, zweitens gleichsinnig parallele Ebenen wie bei jeder Transformation von $(\mathcal{G}_{11}, \mathcal{H}_{11})$ wieder in solche übergeführt werden, drittens, daß Φ in sich transformiert wird. Diese Transformation hat schon Laguerre angegeben, wir wollen sie daher kurz (räumliche) Laguerresche Spiegelung nennen.

(II) Durch die Ebene R_2 , an der gespiegelt wird, gehen zwei verschiedene Minimalräume hindurch, deren Minimalprojektionen zwei orientierte Ebenen α und α' sind, die wir als Euklidische Ebenen voraussetzen. Alle orientierten Kugeln der ebenen Kongruenz, die die Minimalprojektion der Punkte des R_2 ist, enthalten die beiden orientierten Ebenen α und α' . Eine dritte orientierte Ebene φ bestimmt mit α und α' eine gerade Reihe orientierter Kugeln und deren Einhüllende einen „orientierten Drehkegel“. Die bezüglich des Paares $\alpha \alpha'$ zu φ harmonische orientierte Tangentialebene φ^* des Kegels ist die entsprechende zu φ . Wir sagen, daß die Paare $\alpha \alpha'$ und $\varphi \varphi^*$ sich harmonisch trennen. Nennt man die orientierten Ebenen $\alpha \alpha'$ die Minimalprojektion von R_2 , so erkennt man: Stehen zwei Ebenen R_2 und R_2^* aufeinander ganz normal und schneiden sie sich in einer Geraden, so trennen sich ihre Minimalprojektionen $\alpha \alpha'$ und $\alpha^* \alpha'^*$ harmonisch.

(III) Alle ∞^1 Minimalräume, die durch die Gerade R_1 , an der gespiegelt wird, hindurchgehen, umhüllen eine zweifach singuläre Fläche zweiter Ordnung, einen sogenannten Kegel zweiter Art, dessen Minimalprojektion ein orientierter Drehkegel ist, von dem wir voraussetzen, daß er nicht in eine Gerade ausgeartet sei. Eine orientierte Ebene φ , die nicht durch die Spitze s des Kegels hindurchgehen möge, bestimmt mit ihm eine orientierte Kugel Φ und berührt diese in einem Punkte r . Die Verbindungslinie $[rs]$ trifft Φ noch in einem zweiten Punkte r^* und die orientierte Tangentialebene in r^* an Φ ist die zu φ zugeordnete Ebene φ^* .

(IV) Die Minimalprojektion des Punktes R_0 , an welchem gespiegelt wird, ist eine orientierte Kugel Φ . Man findet zu einer Ebene φ die entsprechende φ^* , indem man zuerst die orientierte Ebene φ_m von Φ aufsucht, die zu φ^* gleichsinnig parallel ist, φ liegt dann ebenfalls gleichsinnig parallel zu φ , und zwar so, daß φ_m den Abstand von φ und φ^* halbiert.

Wir besprechen jetzt kurz die zu den *HZ* analogen Flächen, die wir Hyperzykliden nennen wollen.

Eine Hyperzyklide ist definiert als Minimalprojektion der Mannigfaltigkeit von ∞^2 Minimalräumen, die eine Fläche zweiter Klasse V_2^2 des R_4 berühren.

Die gegenüber \mathcal{G}_{11} invariante Klassifikation der Hyperzykliden wird durch die Minimalprojektion auf die Klassifikation der Scharen von konfokalen Flächen zweiter Klasse $[V_3^2, I_2^2]$ im R_4 gegenüber Ähnlichkeiten zurückgeführt und diese Aufgabe wird in bekannter Weise mit Hilfe der Elementarteilertheorie gelöst. Für den allgemeinsten Fall, der der Charakteristik $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ entspricht, erhält man ohne weiteres folgende Sätze:

Die allgemeine Hyperzyklide ist eine orientierte Fläche von der vierten Klasse und 12. Ordnung. Sie ist in vierfacher Weise orientierte Hüllfläche einer orientierten Kugel, die eine feste orientierte Ebene unter einem Winkel von konstantem Kosinuswerte trifft, während ihr Mittelpunkt eine irreduzible Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung Φ_i beschreibt. Die Flächen Φ_i haben unter sich und mit der Hyperzyklide die Fokalkurven gemeinsam.¹⁾

Es gibt eine Gruppe von 16 Transformationen aus \mathcal{G}_{10} , darunter vier Laguerresche Spiegelungen, die eine allgemeine Hyperzyklide in sich transformieren.

Es gibt acht²⁾ Laguerresche Spiegelungen, die die Fläche in eine Fläche zweiter Ordnung transformieren.

Die Konstantenzahl ist 13, die Zahl der absoluten Invarianten gegenüber \mathcal{G}_{11} also 2.

Eigenschaften der (algebraischen) Krümmungslinien auf unseren Flächen leitet man aus folgenden Tatsachen her:

1. Jede Transformation von \mathcal{G}_{10} , ja sogar jede Transformation von \mathcal{G}_{15} , führt Krümmungslinien wieder in Krümmungslinien über,
2. durch Minimalprojektion einer zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit M_2 des R_4 entsteht eine Kongruenz orientierter Kugeln, die von zwei orientierten Flächen Φ umhüllt wird, und den Minimalkurven der M_2 entsprechen im allgemeinen die Krümmungslinien der Φ .³⁾

Eine weitere Eigenschaft der Hyperzykliden, die sie mit den Hyperzykeln in Verbindung bringt und die besonders analytisch leicht bewiesen werden kann, ist die folgende:

¹⁾ Vgl. G. Darboux, Comptes Rendus B. 92 (1881), S. 31. Es beziehen sich auch einige Stellen in den „Surfaces“ auf die Hyperzykliden und die Laguerresche Gruppe des Raumes, so in Band I, S. 234 u. f.; Band II, S. 294 und S. 334 u. f. Auch Laguerre hat die Hyperzykliden untersucht, vgl.: Sur une surface du quatrieme classe . . . Ges. Werke, II, S. 432. Ferner die schon oben genannte Abhandlung: Sur la transformation par directions reciproques. Ges. Werke, II, S. 604. Auch in einer Abhandlung von E. Müller (Wien) bezieht sich ein Abschnitt auf unsere Flächen, vgl. Monatshefte, B. IX (1898), S. 269, bes. S. 294 bis 298: Die Geometrie orientierter Kugeln nach Graßmannschen Methoden.

²⁾ Nicht bloß 4, wie E. Müller a. a. O. angibt.

³⁾ Vgl. F. Klein, höhere Geometrie, S. 483.

Jeder Normalriß einer Hyperzyklide ist ein Hyperzykel.¹⁾ Dabei ist allerdings noch ein einfaches Übereinkommen darüber zu treffen, inwiefern man einen Normalriß einer orientierten Fläche als orientierte Kurve auffassen kann.

Zu den Hyperzykliden gehören auch die orientierten Dupinschen Zykliden. Sie entstehen, wenn die konfokale Schar im R_4 die Charakteristik $[1 (1 1) (1 1)]$ hat. Eine orientierte Dupinsche Zyklide gestattet im allgemeinen eine gemischte zweigliedrige Gruppe von Laguerreschen Transformationen, die isomorph ist zur Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen, die zwei aufeinander ganz normale Euklidische Ebenen im R_4 in sich transformieren.

Man kann nun auch im Raume, geradeso wie wir dies in der Ebene getan haben, noch einen Schritt weitergehen und an Stelle von \mathcal{G}_{11} die umfassendere Gruppe \mathcal{G}_{15} zur Grundlage der Untersuchungen machen. An die Stelle der Hyperzyklide tritt dann eine allgemeinere orientierte Fläche Ψ , von der wir folgende Sätze leicht ablesen können, wenn wir den R_4 stereographisch auf die Punkte einer Kugel Φ_4^3 im R_5 abbilden:

Ψ ist definiert als Minimalprojektion der Mannigfaltigkeit von ∞^2 Minimalräumen, die eine Zyklide im R_4 berühren. Dabei ist unter einer Zyklide eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit vierter Ordnung zu verstehen, die durch das absolute Gebilde I_2^2 des R_4 zweimal hindurchgeht.

Durch eine Transformation von $(\mathcal{G}_{15}, \mathcal{S}_{15})$ geht eine Fläche Ψ wieder in eine solche Fläche über.

Ψ wird im allgemeinen (wenn nämlich das zugehörige Bündel von Flächen zweiter Ordnung im R_5 die Charakteristik $[1 1 1 1 1]$ hat) in sechsfacher Weise von einer orientierter Kugel umhüllt, die eine feste orientierte Kugel unter einem Winkel von konstantem Kosinuskwerte trifft, während ihr Mittelpunkt eine Fläche vierter Ordnung Φ_4 beschreibt. Die Flächen Φ_4 haben unter sich und mit Ψ die Fokalkurven gemeinsam.

Es gibt im allgemeinen Falle sechs Spiegelungen an sphärischen Komplexen orientierter Kugeln, die Ψ in sich transformieren. Sie erzeugen die Gruppe der 2^5 automorphen Transformationen.

Ferner gibt es zwölf Spiegelungen an sphärischen Komplexen orientierter Kugeln, die Ψ in eine Zyklide überführen.

¹⁾ Einen besonderen Fall dieses Satzes haben wir schon in der Einleitung (S. 1) angeführt. Vgl. das Folgende.

Durch die bekannte Berührungstransformation von Lie, die orientierte Kugeln in Gerade transformiert, geht Ψ in eine Kummersehe Fläche vierter Ordnung über.¹⁾

Außer der Gruppe \mathcal{G}_{11} gibt es im Euklidischen Raume auch noch ein anderes Analogon zur Gruppe G_7 , nämlich eine vierzehngliedrige Gruppe von Transformationen orientierter Geraden des Raumes. Die Geometrie dieser Gruppe soll den Gegenstand einer folgenden Arbeit bilden.

¹⁾ Vgl. S. Lie: Über Komplexe... — Annalen 5 (1872), wo auf Seite 178 ein spezieller Fall dieses Satzes angeführt ist.