

Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen.

Von

FELIX BERNSTEIN in Halle a./S.

Die transfiniten Ordnungszahlen sind nach G. Cantor als die Ordnungstypen der *wohlgeordneten* Mengen definiert. Sie bilden eine aufsteigende Reihe

$$(1) \quad 1, 2, \dots, \nu, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \nu, \\ \dots, \omega^2, \dots, \omega^\nu, \dots, \omega^\omega, \dots, \alpha, \dots, \Omega, \Omega + 1, \dots, \gamma, \dots$$

Jede Ordnungszahl dieser Reihe ist zugleich der Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge der vorangehenden Zahlen.

Diese Reihe (1) ist offenbar selbst wohlgeordnet und wird als wohlgeordnete Menge mit W bezeichnet.

Diese Menge W soll nach der Ansicht der Herren Burali-Forti (*Una questione sui numeri transfiniti. Rend. del circolo mat. di Palermo XI, 1897*) und Ph. Jourdain: *On the Transfinite Cardinal Numbers of well-ordered Aggregates (Philos. Magaz. Vol. VII, 6. ser., 1904 p. 61—75)* zu einem Widerspruch führen. Dieser Widerspruch wurde bereits 1895 von G. Cantor gefunden und 1896 an D. Hilbert, 1899 an R. Dedekind brieflich mitgeteilt. (cf. Jourdain l. c. p. 70, Anm.) Jourdain und G. Cantor gründen auf diesen Widerspruch den Beweis, daß *jede Menge wohlgeordnet werden könne*. Seitdem ist dieser Widerspruch auf mehreren Naturforscherversammlungen ohne endgültiges Ergebnis vielfach diskutiert worden.

Burali-Forti stellt denselben in der folgenden Form dar. Da die Reihe (1) wohlgeordnet ist, so gehört zu ihr ein bestimmter Ordnungstypus, welcher die Ordnungszahl β definiert. Diese Zahl β muß die *größte* Ordnungszahl sein. Es gibt jedoch keine größte Ordnungszahl, denn der Typus der wohlgeordneten Menge $(1, \dots, \beta)$ ist $\beta + 1$ und es ist

$$\beta + 1 > \beta.$$

Um diesen Widerspruch aufzulösen, haben die verschiedenen Autoren zu

verschiedenen Mitteln gegriffen. Burali-Forti schließt, daß G. Cantors Theorem, daß für zwei Ordnungszahlen α_1 und α_2 stets entweder $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\alpha_1 > \alpha_2$ sei, nicht allgemein gelte. Ph. Jourdain beweist (l. c. p. 65—66), daß W eine wohlgeordnete Menge ist, meint aber, sie besitze keinen Ordnungstypus (und keine Kardinalzahl).

Er bezeichnet sie als *inkonsistent* und definiert als inkonsistente Menge eine solche, welche nicht ohne Widerspruch als ein Ding gedacht werden kann. Genau so ist G. Cantor vorher in den zitierten Briefen verfahren. Es ziehen beide Autoren den Schluß, daß es unmöglich sei, daß eine wohldefinierte Menge, z. B. das Kontinuum, die Menge W als Teilmenge enthalte.

Wenn man diesen letzteren Schluß als berechtigt ansieht, so kann man folgern, daß das Kontinuum ein bestimmtes Aleph ist.

Indessen läßt sich der Widerspruch auf eine viel einfachere Weise beheben und dies soll im folgenden geschehen.

Wir wollen zunächst die Menge W unabhängig von der Erzeugung der Reihe (1) definieren. Die einzelnen Ordnungszahlen der Reihe (1) sind durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

1) sie sind die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen;

2) ist α eine von ihnen, so gibt es stets eine nächst größere $\alpha + 1$.

Sie sind also zugleich Ordnungstypen der *Abschnitte* wohlgeordneter Mengen.

Die Eigenschaft 2) umfaßt die Eigenschaft 1) und wir können dementsprechend die Menge W folgendermaßen definieren:

Die Menge W ist die Menge aller Ordnungstypen der Abschnitte wohlgeordneter Mengen.

Die Menge W ist nun selbst eine wohlgeordnete Menge, wenn man die Elemente derselben nach der Größe geordnet denkt. Der Ordnungstypus von W genügt der Bedingung 1), aber nicht der Bedingung 2). Es gilt nämlich der Satz:

Die Menge W selbst ist nicht Abschnitt einer wohlgeordneten Menge.

In der Tat, wäre die Menge W Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F , so würde der Ordnungstypus β von W der Bedingung 2) genügen. Es würde also β ein Element von W selbst sein. Der durch β in W bestimmte Abschnitt W' von W würde den Ordnungstypus β besitzen, also wäre W' ähnlich W . Nun ist aber der Abschnitt einer wohlgeordneten Menge niemals der ganzen Menge ähnlich, also kann W nicht Abschnitt von F sein.

Aus dem bewiesenen Satze müssen wir folgern:

Es gibt kein Element e , welches auf alle Elemente von W zugleich folgt.

In der Tat würde aus der Annahme eines solchen Elementes folgen, daß die Menge W ein Abschnitt der Menge (W, e) ist, was unmöglich ist.

Das scheinbar Paradoxe dieses Resultats liegt darin, daß man zunächst glaubt, man könne willkürlich vorschreiben, daß ein Element e auf alle Elemente von W folgt. Es läßt sich zwar festsetzen, daß e auf ein beliebiges Element f von W folgen soll; ebenso läßt sich weiter festsetzen, daß e auf ein zweites Element von W folgen soll. Das gleiche läßt sich festsetzen für die Elemente eines Abschnitts von W . Dagegen läßt es sich nicht für *alle* Elemente von W zugleich vorschreiben. Eine jede Beziehung, welche für *alle* Elemente einer Menge gelten soll, muß mit der *Definition* dieser Menge in Einklang stehen, falls sie widerspruchlos sein soll.

In der obigen Darstellung von Burali-Forti ist es also die Menge $(1, \dots, \beta)$, deren Definition einen innern Widerspruch enthält. Dagegen ist nicht zuzugeben, daß die Menge W irgendwie widerspruchsvoll definiert sei.

In diesem Punkte scheint mir daher die Argumentation von Ph. Jourdain nicht einwandfrei zu sein.

Wenn man auf einen Widerspruch stößt, ist es nötig, auf die letzte Annahme zurückzugehen. Diese letzte Annahme ist aber die Existenz der Menge $(1, \dots, \beta)$, die wir formal mit (W, β) bezeichnen wollen. Das Zusammenbestehen der Elemente von W und β in einer wohlgeordneten Menge (W, β) wird durch den Widerspruch in der Definition von (W, β) ausgeschlossen. Man kann sich von diesem Widerspruch auch direkt überzeugen.

Jeder Typus einer wohlgeordneten Menge, welche ein Abschnitt einer wohlgeordneten Menge sein kann, ist in W enthalten. Eine wohlgeordnete Menge, welche nicht Abschnitt einer wohlgeordneten Menge sein kann, ist ähnlich W und besitzt den Typus β . Denn sie stimmt mit W in den Typen sämtlicher Abschnitte überein. Also ist jede wohlgeordnete Menge entweder von einem in W enthaltenen Typus oder vom Typus β .

Die Menge (W, β) ist daher zu definieren als die Menge der Typen aller wohlgeordneten Mengen, die nach der Größe geordnet zu denken sind. Hier ist nun der Widerspruch unmittelbar. Denn ist γ der Typus der Menge (W, β) , so muß γ in (W, β) vorkommen. Der zu γ gehörige Abschnitt ist also vom Typus γ und somit ähnlich der ganzen Menge, was einen Widerspruch darstellt.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß der Widerspruch nur daraus entsteht, daß β als auf alle Elemente von W folgend angenommen wird. Wenn nur die Vereinigungsmenge $(W; e)$ gebildet wird, ohne daß zwischen e und den Elementen von W eine Ordnungsbeziehung festgesetzt wird, so führt das zu keinem Widerspruch. Wir ziehen hieraus den wichtigen Schluß:

Die Menge W kann Teilmenge einer Menge $M = (W, Z)$ sein, doch kann keine Ordnungsbeziehung zwischen den Elementen von Z und denen von W stattfinden, derart, daß ein Element von Z auf alle Elemente von W folgt.

Um die gemachten Ausführungen ganz scharf zu fassen, ist es nötig, sich darüber zu einigen, was man unter der *Existenz* eines mathematisch definierten Gebildes, insbesondere einer Menge, zu verstehen hat. Es scheint auszureichen, daß man verlangt, es solle ein in sich widerspruchsfreier Bereich von Operationen möglich sein, welche für das betreffende Gebilde bestimmt sind. Die Gesamtheit der möglichen Operationen definiert ihrerseits das mathematische Objekt vollkommen eindeutig.

Wenn wir eine Menge, wie die Menge W , genetisch, wie dies hier geschehen, definieren, so ist dieselbe als mathematisches Objekt völlig bestimmt, sobald ein in sich geschlossener Kreis von widerspruchsfreien Operationen angegeben werden kann, welche mit dieser Menge vorgenommen werden können.

Hieraus geht hervor, daß die Frage der Existenz oder Nichtexistenz der Menge W ersetzt werden muß durch die Frage nach den Operationen, welche mit der Menge W vorgenommen werden können.

Wir wollen daher im folgenden die positiven Eigenschaften der Menge W entwickeln, welche analog den Eigenschaften der übrigen wohlgeordneten Menge sind. Diese Eigenschaften sind, wie ich noch bemerken möchte, logisch äquivalent den Eigenschaften, welche jeder Ordnungszahl zukommen, und sie definieren die Gesetze der Menge W genau ebenso, wie die Eigenschaften, die jeder ganzen Zahl zukommen, die Gesetze der abzählbar unendlichen Menge definieren.

Da es auf jede Ordnungszahl eine folgende gibt, so besitzt die Menge W eine Abbildung φ in sich, bei der jede Ordnungszahl einer folgenden entspricht. Es existieren ferner die Abbildungen $\varphi^2, \varphi^3, \dots$.

Die Abbildung φ ist ein Typus der *ähnlichen* Abbildung und wir können auch hier die *Gruppe* der ähnlichen Abbildungen betrachten.

Der Gruppe der ähnlichen Abbildung entspricht der Begriff des Ordnungstypus β der Menge W . Es ist, wie die Betrachtung der Abbildung φ lehrt,

$$1 + \beta = \beta,$$

wogegen ein Typus $\beta + 1$ nicht definiert ist.

Der Gruppe der umkehrbar eindeutigen Abbildungen entspricht der Begriff der Kardinalzahl \overline{W} , welche bei allen diesen Abbildungen invariant bleibt. Hier können wir als Kardinalzahl der Vereinigungsmenge $(W; e)$ schreiben $\overline{W} + 1$ oder $1 + \overline{W}$. Es ist ferner

$$\overline{W} + \overline{W} = \overline{W};$$

denn sind L und M zwei Mengen vom Typus W , so können wir in der Vereinigungsmenge (L, M) eine Ordnung festsetzen, so daß wieder eine Menge vom Typus W entsteht. Sind nämlich l und m zwei Elemente von L und M , welche den Ordnungszahlen λ und μ entsprechen, so soll l früher als m heißen, wenn $\lambda \leq \mu$ ist, und l später als m , wenn $\lambda > \mu$ ist. Auf diese Weise ist die Vereinigungsmenge wieder wohl geordnet und offenbar vom Typus W .

Man beweist ferner den Satz:

Es ist

$$\overline{\overline{W}}^2 = \overline{\overline{W}}.$$

In der Tat, sind $\lambda, \mu; \lambda_1, \mu_1$ irgend welche Ordnungszahlen, so treffen wir für die Paare (λ, μ) und (λ_1, μ_1) folgende Ordnungsbeziehung, es soll

$$(\lambda, \mu) < (\lambda_1, \mu_1)$$

sein, wenn

$$\lambda + \mu < \lambda_1 + \mu_1$$

ist, und es soll

$$(\lambda, \mu) > (\lambda_1, \mu_1)$$

sein, wenn

$$\lambda + \mu > \lambda_1 + \mu_1$$

ist.

Dagegen soll für $\lambda + \mu = \lambda_1 + \mu_1$ die Festsetzung

$$(\lambda, \mu) < (\lambda_1, \mu_1)$$

gelten, sobald

$$\lambda < \lambda_1$$

ist, und

$$(\lambda, \mu) > (\lambda_1, \mu_1),$$

wenn

$$\lambda > \lambda_1$$

ist.

Hierdurch ist die Menge der Paare (λ, μ) wohlgeordnet und es ist diese Menge wieder vom Typus W , womit die Behauptung bewiesen ist. Es ist insbesondere für jeden Abschnitt leicht möglich, die Paare (λ, μ) den Ordnungszahlen eines Abschnitts der Menge W mittels eines einfachen Gesetzes zuzuordnen.

Aus diesen Untersuchungen, die sich leicht noch vermehren ließen, erkennt man, wie gewisse Eigenschaften, die gleichmäßig allen Ordnungszahlen zukommen, als Eigenschaften der Menge W dargestellt werden können.

Wir wenden uns nun zu prinzipiellen Fragen. Wir können die Mächtigkeit $\overline{\overline{W}}$ der Menge W als größer bezeichnen, als die Mächtigkeit \aleph_α irgend eines Abschnittes von W . Es ist nämlich $\overline{\overline{W}}$ nicht gleich \aleph_α , denn es gibt stets einen Abschnitt von W von der Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$. Da

nun $\aleph_{\alpha+1}$ nicht größer als \overline{W} ist, so ist $\overline{W} \neq \aleph_{\alpha}$ für jedes α . Andererseits, falls $m > \aleph_{\alpha}$ für jedes α ist, so beweist man mittels eines Verfahrens, das im folgenden noch besprochen wird, daß $m \geq \overline{W}$ ist. Gibt es nun Mengen, welche von höherer Mächtigkeit sind als W ?

In der Tat eine solche ist *die Menge Z der Teilmengen von W* .

Es kann nämlich der bekannte Beweis, daß die Menge der Teilmengen von höherer Mächtigkeit ist als die ursprüngliche Menge, unverändert auch im vorliegenden Falle benutzt werden. Es sei übrigens bemerkt, daß die Menge der Teilmengen von W in analoger Weise, wie die Menge 2^{\aleph} , wo \aleph ein beliebiges Aleph bedeutet, als *einfach geordnete Menge* aufgefaßt werden kann. Es gilt von zwei solchen Teilmengen diejenige als die niederere, in der die erste abweichend lautende Ordnungszahl kleiner ist als die entsprechende Ordnungszahl in der anderen.

Die Menge Z der Teilmengen von W bildet das einfachste Beispiel von Mengen, welche sich nicht wohlordnen lassen. Denn es ist ja Z weder W noch einem Abschnitt von W äquivalent.

Wir fragen nun, ob eine der bekannten Mengen, etwa das Kontinuum, einer der hier behandelten Mengen äquivalent ist. Obgleich es noch immer als das *wahrscheinlichste* gelten muß, daß $2^{\aleph_0} = c = \aleph_1$ ist, so ist es doch bisher nicht einmal gelungen, zu beweisen, daß $2^{\aleph_0} > 2^{\aleph_1}$ ist. Es ist daher nicht einmal ausgeschlossen, daß überhaupt allgemein

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph}$$

ist, wo \aleph ein beliebiges Aleph bedeutet. In diesem Fall würde 2^{\aleph_0} alle Aleph als Teilmengen enthalten, und man könnte dann auf Grund des über \overline{W} Gesagten schließen, daß $c \geq \overline{W}$ ist. Vielleicht ist sogar $c = \overline{Z}$, und in diesem Falle würde das Kontinuum keiner wohlgeordneten Menge äquivalent sein, eine Möglichkeit, auf die bereits Schönflies hingewiesen hat.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Beweise, daß eine jede Menge, z. B. das Kontinuum, wohlgeordnet werden könne. Der schon erwähnte sehr eingehende Beweis des Herrn Jourdain besteht aus zwei Teilen. Erstens wird gezeigt, daß eine Kardinalzahl m , welche größer ist als \aleph_{α} , notwendig größer oder gleich ist $\aleph_{\alpha+1}$. Dies ist von Hardy (A Theorem concerning the Infinite Cardinal Numbers, Quart. Journ. of Math. 1903, pp. 87—94) ausführlich gezeigt. Ferner wird erschlossen, daß eine Kardinalzahl, welche größer ist als alle Aleph, notwendig größer oder gleich \overline{W} ist. Hieraus folgt dann, daß jede Teilmenge m von W entweder ähnlich W oder ähnlich einem Abschnitte von W ist. Es ist also eine *beliebige* Kardinalzahl entweder gleich \aleph_{α} oder größer oder gleich \overline{W} . Der zweite Teil des Beweises beruht auf der Annahme der

Inkonsistenz von W , wodurch die letztere Möglichkeit für konsistente Mengen z. B. das Kontinuum ausgeschlossen wird. Dieser Teil des Beweises erscheint mir nicht einwandfrei.

Neuerdings hat E. Zermelo in einer Note: Beweis, daß jede Menge in wohlgeordnete Form gebracht werden kann (Aus einem an D. Hilbert gerichteten Briefe) (Math. Ann. Bd. 59), an deren Inhalt zugleich Erhard Schmidt beteiligt ist, in sehr durchsichtiger und schöner Form wesentlich den ersten Teil des Beweises dargetan.

Dabei macht der Verfasser Gebrauch von der Annahme, daß es in der Menge der Teilmengen einer beliebigen Menge M stets eine Zuordnung zwischen einer Teilmenge S und einem ihrer Elemente s gebe.

Diese Hypothese ist entbehrlich, wenn man den Begriff der *vielwertigen Äquivalenz*, wie er in der Note: Bemerkung zur Mengenlehre (Gött. Nachr. Math.-Phys. Klasse. 1904. Heft 6) von mir aufgestellt worden ist, benutzt. Es ergibt sich dann der Satz, daß jede Menge entweder vielwertig äquivalent ist einem Abschnitt von W , oder aber daß sie Teilmengen enthält, welche vielwertig äquivalent beliebigen Abschnitten der Menge W sind. Die Multiplizität der Abbildung ist immer eine bestimmt angebbare.

Dagegen ist erstens die Möglichkeit, daß bei einer bestimmten Menge, z. B. dem Kontinuum, die Menge L_γ der γ -Elemente ähnlich W sein könne, nicht widerlegt (l. c. 7). Der Schluß in 7 V), es sei $M = L_\gamma$, ferner ist nur zulässig, wenn $L_\gamma \neq W$ ist, da die *geordnete* Menge (L_γ, m_1') nur für $L_\gamma \neq W$ existiert. Die Möglichkeit der Wohlordnung des Kontinuum scheint mir daher nicht bewiesen.

Es ist vielleicht nützlich, das Ergebnis der Betrachtung der Menge W unter Einführung einer anschaulichen Bezeichnung noch einmal zu präzisieren. Wir wollen jede wohlgeordnete Menge, welche Abschnitt einer wohlgeordneten Menge sein kann, als *fortsetzbare* wohlgeordnete Menge bezeichnen. Wir können dann sagen:

Die Typen aller fortsetzbaren wohlgeordneten Mengen bilden die einzige nicht fortsetzbare wohlgeordnete Menge W .

Die nicht fortsetzbare wohlgeordnete Menge W kann als Teilmenge einer andern Menge auftreten, sobald eine Fortsetzung der Menge W in den Rest der Menge ausgeschlossen wird.

Die Menge der Teilmengen von W bildet das einfachste Beispiel einer Menge, welche nicht wohlgeordnet werden kann.