Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

1.

$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^{\nu-1}$ sei eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius 1; x denke man sich reell und positiv, < 1, und dem Werth 1 sich beliebig nähernd.

Wenn die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ für $n = \infty$ einen Grenzwerth hat, so ist bekanntlich:

$$\lim_{x=1} \left\{ \sum_{1}^{\infty} a_\nu x^{\nu-1} \right\} = \sum_{1}^{\infty} a_\nu . \tag{I}$$

Auf der andern Seite kann die Potenzreihe auch einen Grenzwerth haben, wenn die Coefficientenreihe schwankt. Z. B. die Function

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

hat die Grenze $\frac{1}{2}$, während die Reihe der Coefficienten $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ divergirt, und zwar so, dass sie stets zwischen $+1$ und 0 hin- und herschwankt. Es fällt hier sofort auf, dass jener Grenzwerth $\frac{1}{2}$ das arithmetische Mittel ist zwischen den Grössen 0 und 1, zwischen denen die Coefficientensumme schwankt.

Die Verallgemeinerung dieser Bemerkung führt zu einer Kette von Sätzen.

2.

Wenn $\sum_{1}^{n} a_\nu = s_n$ *mit* $n = \infty$ *keinen Grenzwerth hat, aber die Grössen* $s_1, s_2, \cdots$ *einen Durchschnitt* c *haben, so dass*

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = c$$

ist, so hat auch die Function $\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1}$ *für* $x = 1$ *eine Grenze, und diese ist auch* $= c$*).

Weiter: Wenn kein Durchschnitt der $s_1, s_2, \cdots$ vorhanden ist, setze man:

$$s_n' = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n},$$

$$s_n'' = \frac{s_1' + s_2' + \cdots + s_n'}{n},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$s_n^{(\gamma)} = \frac{s_1^{(\gamma-1)} + s_2^{(\gamma-1)} + \cdots + s_n^{(\gamma-1)}}{n},$$

und nun gilt: *Wenn* $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(\gamma)} = c$, *so ist:*

$$\lim_{x=1} \left\{ \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} \right\} = c.$$

Diese Kette von Sätzen gilt auch für complexe Coefficienten.

3.

Eine Verallgemeinerung des Satzes (I) nach einer andern Seite hin, die für reelle Coefficienten gilt, ist folgende:

Wenn die Grösse s_n schwankt, aber zwischen endlichen Grenzen bleibt, so müssen bekanntlich zwei Grössen G_1 und H_1 existiren, $H_1 > G_1$, so dass zu jedem beliebigen Werth ε eine Stelle der Reihe $s_1, s_2, s_3, \cdots$ gefunden werden kann, von der ab für alle folgenden Glieder

$$G_1 - \varepsilon < s_n < H_1 + \varepsilon.$$

Wenn dabei die Grenzen G_1 und H_1 so eng als möglich bestimmt sind, so sind G_1 und H_1 das, was Herr P. du Bois-Reymond die Unbestimmtheitsgrenzen von s_n nennt**). Dann ist stets auch

$$G_1 - \varepsilon' < \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} < H_1 + \varepsilon',$$

wobei die Ungleichung für ein beliebig kleines ε' muss gültig gemacht werden können, indem wir x in einer genügend kleinen Strecke bei $x = 1$ annehmen. G_1 und H_1 sind aber dann für die Potenzreihe nicht nothwendig die engsten Grenzen. Es muss dann für ihre

---

*) Dieser erste Satz ist bereits von Hrn. Frobenius aufgestellt und bewiesen worden: siehe dessen Arbeit „über die Leibnitz'sche Reihe" im 89. Bande von Borchardt's Journal, p. 262—264.

**) Siehe dessen allgem. Functionentheorie, pag. 269.

Schwankung in der Nähe von $x = 1$ noch zwei Grenzen geben, G_2 und H_2, die unter Umständen zusammenfallen, wenn nämlich die Function einen limes hat. Es ist dann:

$$G_1 < G_2 < H_2 < H_1 .$$

Den Fall, dass s_n einen lim hat, kann man hierin auch mit einschliessen;

Dann folgt aus $G_1 = H_1$

$$G_2 = H_2 = G_1 = H_1 .$$

Dieser Satz gilt auch, wenn man s'_n setzt statt s_n; ihn weiter zu verallgemeinern, gestatten wenigstens unsere Beweise nicht.

4.

Wir beweisen im Folgenden die Sätze zusammen und setzen reelle Coefficienten voraus.

Dabei werden wir uns stets der bekannten Formel für partielle Summation bedienen:

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu q_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ (q_\nu - q_{\nu+1}) \sum_{\varrho=1}^{\nu} p_\varrho \right\} + q_{n+1} \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho .$$

5.

Die Grössen $s_n, s'_n, s''_n, \cdots$, die in Art. 2 definirt wurden, genügen den Gleichungen:

$$\frac{s_1^{(\delta)} + s_2^{(\delta)} + \cdots + s_n^{(\delta)}}{n} = s_n^{(\delta+1)}$$

und

$$s_n^{(\delta)} = n s_n^{(\delta+1)} - (n-1)\, s_{n-1}^{(\delta+1)} .$$

Kommt einmal eine Reihe $s_1^{(\gamma)}, s_2^{(\gamma)}, \cdots$, die zwischen endlichen Grenzen schwankt, so ist

$$\left| s_n^{(\gamma)} \right| < A$$

(dem absoluten Betrag nach) für jedes n; also, da

$$s_n^{\gamma-1} = n s_n^{(\gamma)} - (n-1)\, s_{n-1}^{(\gamma)},$$

ist

$$\begin{aligned} \left| s_n^{(\gamma-1)} \right| &< nA + (n-1)A \\ &< 2nA; \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \left| s_n^{(\gamma-2)} \right| &< n \left| s_n^{\gamma-1} \right| + (n-1) \left| s_{n-1}^{(\gamma-1)} \right| \\ &< 2n^2 A + (n-1)\, 2nA \\ &< 4n^2 A \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \left| s_n \right| &< 2^\gamma n^\gamma A; \end{aligned}$$

allgemein:

(III)
$$\left|s_n^{\gamma-\delta}\right| < 2^\delta n^\delta A,$$
$$\delta = 0, 1, 2, \cdots, \gamma.$$

Ferner ist
$$a_n = s_n - s_{n-1},$$
also:
$$|a_n| < 2^{\gamma+1} n^\gamma A,$$
woraus ersichtlich ist, dass unter den gegebenen Bedingungen die Potenzreihe $\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1}$ für alle $x < 1$ divergirt. Wenn ferner die $s_1, s_2, \cdots$ keine Grenze haben, ist auch klar, dass die Convergenz nicht über 1 hinausgeht.

6.

Nach Formel (II) Art. 4 ist:
$$\sum_1^n a_\nu x^{\nu-1} = \sum_1^n s_\nu (x^{\nu-1} - x^\nu) + x^n s_n,$$
nach (III) Art. 5 ist:
$$\lim_{n=\infty} (x^n s_n) = 0,$$
also:
$$\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} = (1-x) \sum_1^\infty s_\nu x^{\nu-1}$$
und, wenn die s_n zwischen endlichen Grenzen bleiben:
$$= (1-x) \left\{ \sum_1^{m-1} s_\nu x^{\nu-1} + [s_m] \sum_m^\infty x^{\nu-1} \right\}$$
$$= (1-x) \sum_1^{m-1} s_\nu x^{\nu-1} + [s_m] x^{m-1};$$
$[s_m]$ ist ein Werth zwischen der oberen und unteren Grenze von $s_m, s_{m+1}, \cdots$.

Durch passende Wahl von m macht man
$$G_1 - \varepsilon < [s_m] < H_1 + \varepsilon,$$
wenn G_1 und H_1 die Unbestimmtheitsgrenzen sind für die s_n. Nun kann durch passende Wahl von x, genügend nahe bei 1, der Werth von x^{m-1} so nahe an die 1, und der von $(1-x)\sum_1^m s_\nu x^{\nu-1}$ so nache an die 0 gebracht werden, als man will; so dass dann:
$$G_1 - \varepsilon' < \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} < H_1 + \varepsilon';$$

ε' wird mit $1-x$ ∞ klein. Ist speciell

$$G_1 = H_1 = c,$$

so ist

$$\lim_{x=1}\left\{\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1}\right\} = c.$$

7.

Wenn die $s_1, s_2, \cdots$ schwanken, setze man:

$$(1-x)\sum_1^n s_\nu x^{\nu-1} = (1-x)\left\{\sum_1^n \nu s'_\nu (x^{\nu-1}-x^\nu) + n s'_n x^n\right\}$$

$$= (1-x)^2 \sum_1^\infty \nu s'_\nu x^{\nu-1} \quad \text{(wie oben)}$$

$$= (1-x)^2\left\{\sum_1^{m-1} \nu s'_\nu x^{\nu-1} + [s'_m]\sum_m^\infty \nu x^{\nu-1}\right\}$$

$$= (1-x)^2\left\{\sum_1^{m-1} \nu s'_\nu x^{\nu-1} - [s'_m]\sum_1^{m-1} \nu x^{\nu-1} + [s'_m]\sum_1^\infty \nu x^{\nu-1}\right\}$$

$$= (1-x)^2\left\{\sum_1^{m-1} \nu s'_\nu x^{\nu-1} - [s'_m]\sum_1^{m-1} \nu x^{\nu-1}\right\} + [s'_m].$$

Man kann nun die Schlüsse wiederholen und findet dieselben Sätze für s'_n. Bei weiterer Verwandlung kommt:

$$(1-x)^2\sum_1^\infty \nu s'_\nu x^{\nu-1} = (1-x)^2\sum_1^\infty \nu s''_\nu\left\{\nu x^{\nu-1} - (\nu+1)x^\nu\right\},$$

indem

$$\sum_1^n s'_\nu = n s''_n;$$

dies lässt sich ähnlich behandeln, wenn man es gleich

$$(1-x)^3\sum_1^\infty \nu(\nu+1)\, s''_\nu x^{\nu-1} - (1-x)^2\sum_1^\infty \nu s''_\nu x^{\nu-1}$$

setzt.

8.

Um die in Art. 2 gegebenen Sätze allgemein beweisen zu können, schicken wir einige andere voraus.

Sei:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1},$$

$\varphi(\nu)$ eine rationale ganze Function r^{ten} Grades mit dem höchsten Coefficienten e, also:

$$\varphi(\nu) = e\nu^r + \cdots$$

Die s_ν sollen wieder im Unendlichen zwischen den Grenzen G_1 und H_1 schwanken, so ist:

$$G_1 \cdot e \cdot r! - \varepsilon < (1-x)^{r+1} f(x) < H_1 \cdot e \cdot r! + \varepsilon,$$

wo wieder ε unendlich klein, wenn x unendlich nahe bei 1.

Speciell ist:

$$G_1 = H_1 = c,$$

$$\lim_{n=\infty} s_n = c,$$

so ist:

$$\lim_{x=1} \left\{(1-x)^{r+1} f(x)\right\} = c \cdot e \cdot r!\,.$$

Beweis:

$$(1-x)^{r+1} f(x)$$

$$= (1-x)^{r+1} \left\{ \sum_1^{m-1} \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1} + \left[s_m - \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} \right] \sum_{\nu=m}^{\infty} x^{r-1} \frac{d^r (x)^\nu}{dx^r} \right\}$$

$$= (1-x)^{r+1} \left\{ \sum_1^{m-1} \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1} - x^{r-1} \cdot \left[s_m - \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} \right] \sum_1^{m-1} \frac{d^r (x)^\nu}{dx^r} \right\}$$

$$+ \left[s_m - \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} \right] x^{r-1} \cdot r!\,,$$

wobei

$$\lim \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} = e.$$

Wir machen dieselben Schlüsse wie oben und erhalten so den behaupteten Satz.

9.

Ist wieder:

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s_n',$$

$$\frac{s_1' + s_2' + \cdots + s_n'}{n} = s_n'',$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

so ist:

$$\sum_1^{\infty} \varphi(\nu) s_\nu^{(\delta)} x^{\nu-1} = \sum_1^{\infty} \nu s_\nu^{(\delta+1)} \left\{ \varphi(\nu) x^{\nu-1} - \varphi(\nu+1) x^\nu \right\},$$

vorausgesetzt, dass die s_ν die in Art. 5 erwähnte Bedingung erfüllen. Also:

$$\sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\delta)} x^{\nu-1} = (1-x) \sum_1^\infty \nu s_\nu^{(\delta+1)} \varphi(\nu) x^{\nu-1}$$
$$- \sum_1^\infty \nu s_\nu^{(\delta+1)} \{ \varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) \} x^\nu .$$

Aber $\varphi(\nu)$ soll, wie oben, vom r^{ten} Grade sein; $\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)$ ist vom $r-1^{\text{ten}}$, und zwar

$$\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) = c \cdot r \cdot \nu^{r-1} + \cdots,$$

wenn

$$\varphi(\nu) = e\nu^r + \cdots$$

10.

Sei nun:

$$F(x) = \sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1}, \ \varphi \ \text{(wie oben)};$$

aber die s_ν mögen schwanken, und es sei

$$\lim_{\nu=\infty} s_\nu^{(\gamma)} = c,$$

dann folgt zunächst aus dem in Art. 8 bewiesenen Satz:

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^{r+1} \sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\gamma)} x^{\nu-1} \right\} = c \cdot e \cdot r!\,.$$

Aber nach Art. 9 ist

$$\sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\gamma-1)} x^{\nu-1} = (1-x) \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \varphi(\nu) x^{\nu-1}$$
$$- x \cdot \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \Big(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)\Big) x^{\nu-1},$$

und es ist vermöge Art. 8 und 9, weil

$$\nu\varphi(\nu) = e\nu^{r+1} + \cdots$$

und

$$\nu \Big(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)\Big) = e \cdot r \cdot \nu^r + \cdots,$$

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^{r+2} \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \varphi(\nu) x^{\nu-1} \right\} = e \cdot c \cdot (r+1)!;$$

und

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^{r+1} \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \Big(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)\Big) x^{\nu-1} \right\} = e \cdot c \cdot r \cdot r!\,.$$

Also:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\sum_1^\infty \varphi(\nu)s_\nu^{(\gamma-1)}x^{\nu-1}\right\}=e\cdot c\cdot\left\{(r+1)!-r\cdot r!\right\}=e\cdot c\cdot r!;$$

ebenso beweist man nun, dass

$$e\cdot c\cdot r!=\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\sum_1^\infty \varphi(\nu)s_\nu^{(\gamma-2)}x^{\nu-1}\right\}$$

u. s. f.

Also ist stets:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\sum_1^\infty \varphi(\nu)s_\nu x^{\nu-1}\right\}=e\cdot c\cdot r!,$$

wenn

$$\lim_{\nu=\infty} s_\nu^{(\gamma)}=c$$

und

$$\varphi(\nu)=e\cdot\nu^r+\cdots.$$

11.

Specialisiren wir den Satz des vorigen Artikels, indem wir $\varphi(\nu)=1$, $r=0$ setzen, so kommt:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)\sum_1^\infty s_\nu x^{\nu-1}\right\}=c.$$

Definiren wir die s_ν hierin wieder als Summen der a_ν, so kommt:

$$\lim_{x=1}\left\{\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1}\right\}=c,$$

der Satz des Art. 2 in seiner allgemeinsten Form. Setzen wir:

$$P(x)=\sum_1^\infty s_\nu x^{\nu-1},$$

$$\lim_{\nu=\infty} s_\nu^{(\gamma)}=c,$$

$$\varphi(\nu)=(\nu-1)\cdots(\nu-r+1)(\nu-r),$$

so kommt:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\frac{d^r P(x)}{dx^r}\right\}=c\cdot r!$$

12.

Der Satz:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)\sum_1^\infty s_\nu x^{\nu-1}\right\}=c,$$

wenn

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=c$$

zeigt eine auffallende Analogie mit dem Satz von Dirichlet:

$$\lim_{w=0}\left\{w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}\right\}=c,$$

wenn

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=c,$$

der in der Zahlentheorie eine Rolle spielt. Man kann also vermuthen, dass auch dieser einer Verallgemeinerung fähig sei.

13.

Für unendlich grosse n sei wieder

$$G_1-\varepsilon<a_n<H_1+\varepsilon,$$

so ist für unendlich kleine w (positiv reell)

$$G_1-\varepsilon'<w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}<H_1+\varepsilon'.$$

Beweis: Zunächst ist die Convergenz gesichert, wenn die a zwischen endlichen Grenzen bleiben. Ferner ist, nach bekannter Methode

$$\frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}<\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x^{1+w}}<\frac{1}{\nu^{1+w}},$$

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}<\int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+w}}<\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}$$

$$-\frac{1}{n^{1+w}}+\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}<\frac{1}{w\,n^{w}}<\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}},$$

woraus folgt:

$$\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}=\frac{1}{w\,n^{w}}+\frac{\Theta}{n^{1+w}},$$

wo

$$0<\Theta<1$$

ist. Also:

$$\lim_{w=0}\left\{w\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}\right\}=1.$$

Nun ist:

$$w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}=w\sum_{1}^{m-1}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}+[a_m]\,w\sum_{m}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}},$$

woraus die Behauptung folgt.

14.

Die a seien unter einer endlichen Grenze; und es sei auf irgend eine Weise bewiesen, dass zu jeden ε ein δ gefunden werden kann, so dass für alle $w < \delta$

$$G - \varepsilon < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} < H + \varepsilon.$$

Die G und H sind feste Grössen, aber nicht nothwendig die Unbestimmtheitsgrenzen der a.

Dann gilt auch

$$G - \varepsilon' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} < H + \varepsilon'$$

wo ε' unendlich klein für unendlich kleine w, wofern $\varphi(\nu, w)$ folgende Bedingungen erfüllt:

Für jeden ganzzahligen Werth von ν ($\nu = 1, 2, 3 \cdots$) und für jeden reellen positiven Werth von w unter einer gewissen Grenze sei $\varphi(\nu, w)$ definirt; für jedes specielle ν sei

$$\lim_{w=0} \{w\, \varphi(\nu, w)\} = 0.$$

Wenn ferner $\frac{1}{\nu}$ und w unendlich klein werden (unabhängig von einander), so soll φ dem Werth 1 sich unbegrenzt nähern:

$$\lim_{\substack{\nu=\infty \\ w=0}} \varphi(\nu, w) = 1.$$

Beweis:

$$w \sum_1^\infty \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} = w \sum_1^{m-1} \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} + w \sum_m^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$$

$$+ w \sum_m^\infty \frac{a_\nu(\varphi(\nu, w) - 1)}{\nu^{1+w}}$$

$$= w \left\{ \sum_1^{m-1} \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} - \sum_1^{m-1} \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} \right\} + w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$$

$$+ \Big[a_m \big(\varphi(m, w) - 1\big) \Big] w \sum_m^\infty \frac{1}{\nu^{1+w}}.$$

Man wählt M und δ so, dass für

$$\nu > M,$$
$$w < \delta$$

$\varphi(\nu, w) - 1$ so klein ist, als man will; die a sollen unter einer Grenze sein. Man setzt $m > M$ fest und wählt dann w so, dass

$w \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{1+w}}$ genügend nahe an 1, $w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$ zwischen $G - \varepsilon$ und $H + \varepsilon$ fällt, und der erste Theil genügend klein wird. Dann ergiebt sich der behauptete Satz.

15.

Wir führen die Definitionen ein:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a_n',$$

$$\frac{a_1' + a_2' + \cdots + a_n'}{n} = a_n'',$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so ist, wenn a_n' unter einer endlichen Grenze bleibt, auch a_n'', a_n''', $\cdots$ unter derselben; aber nicht die a_n im Allgemeinen. Doch convergirt in diesem Fall stets $\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$ und es ist

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta)}}{\nu^{1+w}} = \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta+1)}}{\nu^{1+w}} \varphi(\nu, w),$$

wo φ die im vorhergehenden Artikel bezeichneten Eigenschaften hat.

Beweis: Durch partielle Summation erhält man:

$$\sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = \sum_{\nu=1}^n \left\{\nu a_\nu' \left(\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right)\right\} + \frac{n a_n'}{(n+1)^{1+w}};$$

aber

$$\nu \left\{\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right\} = \frac{1}{\nu^w}\left\{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{1+w}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\nu^w}\left\{1 - 1 + \frac{1+w}{\nu} - \frac{(1+w)(2+w)}{1 \cdot 2}\frac{1}{\nu^2} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{\nu^{1+w}}\left\{1 + w - \frac{(1+w)(2+w)}{1 \cdot 2}\frac{1}{\nu} + \cdots\right\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer hat die Eigenschaft von $\varphi(\nu, w)$, er lässt sich sogar für kleine $\frac{1}{\nu}$, w nach diesen Grössen entwickeln. Hätten wir nämlich $\nu\left(\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{\nu}{(\nu-1)^{1+w}}\right)$ entwickelt statt

$$\nu\left\{\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right\},$$

so hätten wir dieselben Glieder erhalten in der Entwickelung nach $\frac{1}{\nu}$, nur alle mit demselben Zeichen. Jeder Coefficient wird dann entwickelt eine ganze Function von w mit gleichzeichigen Coefficienten, wodurch jede Umstellung der Glieder gerechtfertigt ist. Man kann desshalb die Reihe auch nach w und $\frac{1}{\nu}$ ordnen:

$$= 1 + w - \frac{1}{\nu} + \cdots.$$

Dass die obige Bedingung für jedes specielle ν erfüllt ist, ist evident.

Also:

$$\nu\left\{\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right\} = \frac{\varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}},$$

ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{n a_n'}{(n+1)^{1+w}} = 0, \quad w > 0,$$

da a_n' unter einer festen Grenze, und w bei diesem Grenzübergang als constant zu betrachten ist.

Hieraus und aus

$$\sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = \sum_1^n \nu a_\nu' \left(\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right) + \frac{n a_n'}{(n+1)^{1+w}}$$

folgt die Convergenz von $\quad \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$

und die Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = \sum_1^\infty \frac{a_\nu' \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}}.$$

Ebenso

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta+1)}}{\nu^{1+w}} \varphi(\nu, w) = \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta)}}{\nu^{1+w}}.$$

$\varphi(\nu, w)$ bedeutet hier genau dieselbe Function.

16.

Jetzt können wir den Satz in voller Allgemeinheit beweisen.

Sei

$$G_1 - \varepsilon < a_n^{(\gamma)} < H_1 + \varepsilon,$$

ε und n wie oben, so ist nach Art. 13.

$$G_1 - \varepsilon' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon',$$

ε' unendlich klein mit unendlich kleinem w, also nach Art. 14.

$$G_1 - \varepsilon'' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma)}\,\varphi(\nu,w)}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon''.$$

aber nach Art. 15.

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma)}\,\varphi(\nu,w)}{\nu^{1+w}} = \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma-1)}}{\nu^{1+w}},$$

also auch

$$G_1 - \varepsilon'' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma-1)}}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon''$$

u. s. f.

Man hat also allgemein: Wenn

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a_n', \\[2ex] \dfrac{a_1' + a_2' + \cdots + a_n'}{n} = a_n'', \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

und wenn a_n' endlich bleibt, und

$$G_1 - \varepsilon < a_n^{(\gamma)} < H_1 + \varepsilon,$$

ε unendlich klein mit unendlich grossem n, so kann auch zu jedem ε' eine Grenze der w gefunden werden, derart, dass für alle w unter dieser Grenze

$$G_1 - \varepsilon' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon'.$$

Speciell: Für

$$G_1 = H_1 = c,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} a_n^{(\gamma)} = c$$

kommt

$$\underset{w=0}{\mathrm{im}} \left\{ w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} \right\} = c.$$

Der letzte Satz gilt auch für complexe a_ν. Dann muss mod. a_ν' unter einer festen Grenze bleiben. Der Mittelwerthssatz ist direct dann nicht anwendbar; man setzt (in Art. 13.):

$$a_\nu = c + \delta_\nu, \qquad \lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0,$$

$$w\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = wc\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{1+w}} + w\sum_1^{m-1} \frac{\delta\nu}{\nu^{1+w}} + w\sum_m^\infty \frac{\delta\nu}{\nu^{1+w}},$$

$$\sum_m^\infty \frac{\delta_\nu}{\nu^{1+w}} \leq \sum_m^\infty \frac{\text{mod. }\delta_\nu}{\nu^{1+w}} = [\text{mod. }\delta_m]\sum_m^\infty \frac{1}{\nu^{1+w}}.$$

u. s. f.

Beispiele.

17.

Wir haben oben schon das einfachste Beispiel erwähnt:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Die Ableitung dieser Reihe

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \cdots$$

giebt ein Beispiel für den Fall, dass auch die s_n' schwanken, und die s_n'' einen Grenzwerth haben, denn:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \cdots, = -1, +1, -2, +2, -3, \cdots,$$

$$s_1', s_2', s_3', s_4', s_5', \cdots, = -1, \quad 0, \quad -\frac{2}{3}, \quad 0, \quad -\frac{3}{5}, \cdots,$$

allgemein

$$s_{2n}' = 0,$$

$$s_{2n+1}' = \frac{-(n+1)}{2n+1}.$$

Also

$$\lim_{n=\infty} s_n'' = -\frac{1}{4};$$

es stimmt also mit der allgemeinen Theorie.

18.

$$\sum_{n=1}^\infty \{\sin(n\alpha)\cdot x^n\} = R\left[\sum_1^\infty \frac{e^{n\alpha i}x^n}{i}\right],$$

(R bedeutet den reellen Theil).

$$\sum_1^\infty \frac{e^{n\alpha i}x^n}{i} = \frac{e^{\alpha i}\cdot x}{i(1-e^{\alpha i}\cdot x)},$$

$$R\left[\sum_1^\infty \frac{e^{n\alpha i}x^n}{i}\right] = R\left[\frac{e^{\alpha i}x(1-e^{-\alpha i}x)}{i(1-2(\cos\alpha)x+x^2)}\right]$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

$$\lim_{x=1} \frac{x \sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Aber

$$s_n = \sum_1^n a_\nu = \sum_0^{n-1} \sin\nu\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$s_n' = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2n\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \cos\frac{2\nu-1}{2}\alpha;$$

die Summe wird wieder endlich, desshalb

$$\lim_{n=\infty} s_n' = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Tübingen, März 1882.

Nachträgliche Berichtigung.

In der Arbeit im XX. Band dieses Journals S. 138 sind unter die Beispiele im Art. VI Functionen gekommen wie $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ und $\operatorname{cotg}\frac{1}{x}$, die in unendlicher Nähe des Nullpunktes Pole besitzen. Solche Functionen waren ursprünglich von der Betrachtung ausgeschlossen; doch gilt auch für sie der betreffende Satz, und der Beweis bleibt im Wesentlichen derselbe.