Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes.

Von

A. Korselt in Plauen i./V.

Gegenwärtig ist unter den Mengentheoretikern die irrige Meinung verbreitet, der Cantorsche Äquivalenzsatz

$$(a_0 \sim b_1 \Subset b \sim a_1 \Subset a) \Subset (a \sim b \sim a_1 \sim a)$$

sei 1898 ziemlich gleichzeitig von F. Bernstein (in Borel, Leç. sur la th. des fonctions, S. 103ff.) und E. Schröder (Nova Acta Leop. 71, S. 337ff.) bewiesen worden. Der Schrödersche Beweis enthält jedoch einen bis jetzt von den Mathematikern nicht bemerkten Schlußfehler. Er benutzt nämlich (S. 339 ebendort) zwei unendliche Reihen

$$\text{(55)} \qquad \begin{array}{l} a_0 \sim b_1 \sim a_2 \sim b_3 \cdots \sim a_{2\lambda} \sim b_{2\lambda+1} \sim a_{2\lambda+2} \sim \cdots, \\ b_0 \sim a_1 \sim b_2 \sim a_2 \cdots \sim b_{2\lambda} \sim a_{2\lambda+1} \sim b_{2\lambda+2} \sim \cdots \end{array}$$

von Mengen, in denen

$$\text{(1)} \qquad a_{2\lambda+2} \Subset a_{2\lambda+1} \Subset a_{2\lambda}, \quad b_{2\lambda+2} \Subset b_{2\lambda+1} \Subset b_{2\lambda},$$

und nimmt S. 341 stillschweigend an, jede Reihe habe ein Grenzglied

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ll} \lim a_{2\lambda+1} = a_{2\infty+1}, & \lim b_{2\lambda+1} = b_{2\infty+1}, \\ \lim a_{2\lambda} \quad = a_{2\infty} = a_{2(\infty+1)}, & \lim b_{2\lambda} \quad = b_{2\infty} = b_{2(\infty+1)}. \end{array}$$

Dann ist nach (1) $a_{2\infty} \Subset a_{2\infty+1} \Subset a_{2\infty}$, mithin $a_{2\infty+1} = a_{2\infty}$, ebenso $b_{2\infty+1} = b_{2\infty}$, weshalb man beide kürzer mit a_∞ bezw. b_∞ darstellen mag. Auf derselben Seite wird ferner angenommen, diese gemeinsamen Grenzmengen a_∞ und b_∞ seien auch Glieder der Reihen (55). „*Da mit* $a_{2\infty+1}$ *aber alle ungeraden* a, *d. h. alle* $a_{2\lambda+1}$, *mit* $a_{2\infty}$ *alle geraden* a, *d. h. alle* $a_{2\lambda}$ *gleichmäßig sein mußten*, so ist mit $a_{2\infty+1} = a_\infty = a_{2\infty}$ auch die Gleichmäßigkeit jener mit diesen, somit die sämtlicher a_λ bewiesen, was nach dem oben unter (55) Erörterten zum Beweise unseres Satzes hinreicht." In den von mir hervorgehobenen Worten steckt der Fehler. Die Grenzmengen a_∞ oder b_∞ können von niedrigerer Mächtigkeit sein als ihre vorangehenden Mengen $a_{2\lambda}$, $b_{2\lambda}$, wie folgendes Beispiel zeigt.

Es sei a_0 und b_0 die Menge (1, 2, 3, $\cdots$, in inf.), und für $\lambda \varepsilon\, 0, 1, \cdots, \infty$

$$\begin{aligned} a_{2\lambda} = b_{2\lambda} &= (1+6\lambda,\ 2+6\lambda, \cdots),\\ a_{2\lambda+1} &= (3+6\lambda,\ 4+6\lambda,\ 5+6\lambda, \cdots),\\ b_{2\lambda+1} &= (5+6\lambda,\ 6+6\lambda, \cdots). \end{aligned}$$

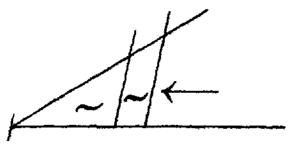
Dann ist

$$a_{2\infty} = a_{2\infty+1} = b_{2\infty} = b_{2\infty+1} = a_\infty = b_\infty = \text{Nichts},$$
$$a_{2(\lambda+1)} \preceq a_{2\lambda+1} \preceq a_{2\lambda}, \quad b_{2(\lambda+1)} \preceq b_{2\lambda+1} \preceq b_{2\lambda},$$

und daher *nicht* für irgend ein *endliches* λ

$$a_{2\lambda} \sim a_{2\infty}, \quad a_{2\lambda+1} \sim a_{2\infty+1},$$

wie es nach Schröder sein sollte. Die „transfinite Induktion“ versagt hier. Dies schrieb ich Schröder am 8. Mai 1902, worauf er mir am 25. Mai antwortete: „... Ihre Ausstellung gegen meinen (vermeintlichen) Beweis ist richtig. Daß Letzterer ... nicht stichhaltig ist, war mir ebenfalls schon vor längerer Zeit klar geworden, ohne daß ich jedoch Zeit und Gelegenheit gewinnen konnte, publice darauf zurückzukommen. Ich bemerkte es ... zuerst daran, daß auch in meiner Figur (S. 338) die Grenzmengen a_∞, b_∞ in einelementige Punktmengen — die Fußpunkte der dortigen Normalen — degenerieren müssen, sobald man links davon die Figur symmetrisch zur rechten Seite wählt. Es ist ungefähr so, wie wenn man für eine lineare Punktmenge auf einer Geraden zwischen den Schenkeln eines Winkels — durch Parallelverschiebung dieser Geraden bis in den Scheitel hin — die Gleichmäßigkeit derselben mit diesem Scheitelpunkte beweisen wollte.



... Daß ich Herrn F. Bernstein die Ehre, den G. Cantorschen Satz bewiesen zu haben, allein überlasse, hatte ich einstweilen einem Freunde desselben, Herrn Dr. Max Dehn (jetzt in Münster) schon vorigen Herbst resp. Sommer — natürlich zum Weitergeben — gesagt, desgleichen über diese Angelegenheit (unspezifiziert, als eine meinerseits zu erledigende Gewissenssache) Herrn Cantor einen Brief in Aussicht gestellt und Sept. 01 angefangen, jedoch leider noch nicht zu Ende gebracht ...“

In demselben Briefe erwies ich den mit dem Äquivalenzsatze gleichgeltenden Satz

$$(a_2 \preceq a_1 \preceq a_0 \sim a_2) \preceq (a_0 \sim a_1)$$

folgendermaßen. Es sei φ eine (nach Voraussetzung vorhandene) deutliche Abbildung von a_0 in a_2, also $\varphi(a_0) = a_2$, $\breve{\varphi}$ die Umkehrung des binären Relativs φ, a_0' die Menge derjenigen (Anfangs-)Elemente von a_0, für welche $\breve{\varphi}(a_0') = 0$. Zu jedem Elemente oder jeder Menge m aus a_0 gehört durch φ eine „φ-Folge“ m_φ (Summe endlicher oder unendlicher

„Zyklen“ oder abzählbar unendlicher „Ketten“). Die φ-Folgen verschiedener Elemente sind infolge der $1-1$-Deutigkeit von φ elementefremd. Jedes Element von a_0 *bestimmt* also entweder (als Anfangsglied von φ) eine unendliche φ-Kette, oder (als inneres Glied von φ) einen φ-Zyklus.

Es gibt dann eine umfassendste Teilmenge d von a_0 (mag sie auch leer sein), die durch φ in Zyklen zerfällt, und es ist

$$d \mathrel{=\!\!\!\!\in} a_2 \mathrel{=\!\!\!\!\in} a_1 \mathrel{=\!\!\!\!\in} a\,.$$

Die Menge a_2 besteht daher aus den *inneren* Kettenelementen und den Zykluselementen, und diese zusammen mit gewissen Anfangsgliedern der φ-Ketten bilden die Menge a_1. Die deutliche Abbildung φ' von a_1 auf a_0 kann daher mit Hilfe der vorausgesetzten Abbildung φ so zusammengesetzt werden:

Alle Glieder von d entsprechen sich selbst, ebenso jedes Glied einer Kette, die ein a_1 als Anfangsglied hat. Dagegen wird jedem Gliede irgend einer anderen Kette (in der also nur die inneren Glieder Elemente von a_1 sind) das nächstfolgende Element zugeordnet.

Durch binäre Relative läßt sich das viel kürzer ausdrücken. Durch Zerlegung in Ketten erhielt ich damals auch, *innerhalb des festgesetzten Denkbereiches*, den von Schröder (ebendort S. 326) vergeblich gesuchten Beweis des Satzes

$$(a \sim d \mathrel{=\!\!\!\!\in} b) \mathrel{=\!\!\!\!\in} \sum_c (a \mathrel{=\!\!\!\!\in} c \sim b)\,, \tag{21}$$

d. h.: ist a gleichmächtig einer Teilmenge d von b, so gibt es eine a umfassende mit b gleichmächtige Menge c.*)

Eine etwas andere Form des oben gegebenen Beweises sandte ich am 30. Mai 1902 an die Redaktion dieser „Annalen“. Später haben Zermelo und Peano ähnliche Beweise gefunden. Sie haben alle gemeinsam, den Begriff der ganzen Zahl und der vollständigen Induktion nicht *vorauszusetzen.*

Plauen, Ende April 1910.

*) Sei nämlich φ eine deutliche Abbildung von a auf d, φ' die φ-Kette von $a\bar{b}$. Dann erfüllt diejenige Abbildung ψ, welche φ' umfaßt und alle nicht in φ' vorkommenden Elemente von b sich selbst zuordnet, die gestellten Bedingungen. Es ist $c = a + b$.