Über Möglichkeiten im Relativkalkül.

Von

Leopold Löwenheim in Berlin-Lichtenberg.

---

§ 1.

Definitionen.

Wir setzen $1'_{ijk} = 1'_{ij} + 1'_{ik} + 1'_{jk}$, $0'_{ijk} = 0'_{ij}0'_{ik}0'_{jk}$; allgemein:

$$1'_{ijkl\ldots} = 1'_{ij} + 1'_{ik} + 1'_{jk} + 1'_{il} + 1'_{jl} + 1'_{kl}\cdots,$$
$$0'_{ijkl\ldots} = 0'_{ij}0'_{ik}0'_{jk}0'_{il}0'_{jl}0'_{kl}\cdots.$$

Man könnte übrigens auch weiter setzen:

$$1''_{ijkl\ldots} = 1'_{ij}1'_{ik} + 1'_{ij}1'_{il} + 1'_{ij}1'_{kl} + 1'_{ik}1'_{jk} + \cdots,$$
$$1'''_{ijkl\ldots} = 1'_{ij}1'_{ik}1'_{il} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

dual entsprechend für $0''$, $0'''$, $\cdots$.

Dann wäre z. B.

$$1'''_{ijk} = 1'_{ij}1'_{ik}1'_{jk} = (i = j = k) = 1''_{ijk},$$
$$1''''_{ijk} = 0.$$

$1'''_{ijk}$ und $0'''_{ijk}$ kann vielleicht wichtig sein, wird aber in dieser Abhandlung nicht benutzt werden.

Es sei noch nebenbei bemerkt, daß sich aus dem Entwicklungssatz die Definition für a' ergibt:

$$a' = a \cdot 1' + \bar{a} \cdot 0'.$$

Wir wollen im folgenden unter einem *„Relativausdruck"* stets einen Ausdruck zwischen Relativen oder (nicht notwendig binären) Relativkoeffizienten verstehen, in welchem Σ und Π nur endlich viele Male vorkommt, und wo jedes Σ bzw. Π sich erstreckt entweder über die Indizes, d. h. über sämtliche Individuen des Denkbereichs erster Ordnung, den wir mit Schröder 1^1 nennen, oder aber über sämtliche Relative, die sich mit Hilfe des Denkbereichs bilden lassen. Alle Summen und Produkte, welche nicht über die Individuen von 1^1 erstreckt sind oder über sämtliche Relative, werden als endlich vorausgesetzt und stets durch $+$ und $\cdot$ bzw. Nebeneinanderstellung der Faktoren bezeichnet, nie durch Σ oder Π.

Durch Gleichsetzung zweier Relativausdrücke entsteht eine „*Relativgleichung*", die wir uns stets auf 0 gebracht denken wollen. Auf solche Relativgleichungen lassen sich, wie es scheint, alle wichtigen Fragen der Mathematik und des Logikkalküls zurückführen.

Ein Relativausdruck, in welchem jedes Σ und Π über die Indizes, d. h. die Individuen von 1^1, erstreckt ist, also keines über die Relative, heiße ein „*Zählausdruck*". Durch Gleichsetzung zweier solcher entsteht eine „*Zählgleichung*". Beispiel einer solchen:

$$\sum_l \prod_{i,j,k} (\bar{z}_{hi} + \breve{z}_{hj} + 1'_{ij})\, \bar{z}_{li} \sum_k z_{ki} = 0$$

oder „*kondensiert*", d. h. in eine Gleichung zwischen Relativen, nicht Relativkoeffizienten verwandelt:

$$0 \mathbin{\text{ɟ}} \{[1' + (\breve{\bar{z}} \mathbin{\text{ɟ}} \bar{z})](0 \mathbin{\text{ɟ}} \breve{\bar{z}}) \cdot \breve{z} \,;\, 1\} \mathbin{\text{ɟ}} 0 = 0\,.$$

Einen Relativausdruck „*kondensieren*" heißt, ihn so umwandeln, daß kein Σ und Π mehr vorkommt. Zum Beispiel gibt $\sum_h a_{ih} b_{hj}$ kondensiert $(a\,;\,b)_{ij}$.

Eine Relativgleichung kann sein

a) eine identische Gleichung;

b) eine „*Fluchtgleichung*", d. h. eine, die nicht für jedes, wohl aber für jedes endliche 1^1 erfüllt ist (oder ausführlicher: eine Gleichung, die nicht identisch erfüllt ist, die aber stets erfüllt ist, falls die Indizes, über die summiert oder produktiert wird, ein endliches 1^1 zu durchlaufen haben);

c) eine „*Haltgleichung*", d. h. eine, die nicht einmal für jedes endliche 1^1 für beliebige Werte der Indizes erfüllt ist.

§ 2.

Zählgleichungen.

Satz 1: *Es gibt unkondensierbare Gleichungen, z. B.*

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0 \text{ oder } 1,$$

$$\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0 \text{ oder } 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

also erst recht unkondensierbare Zählausdrücke.

Durch obige Beispiele hat Herr Korselt in einer brieflichen Mitteilung an mich den Satz (bis auf unwesentliche Lücken) bewiesen und dazu bemerkt, daß sich kondensieren läßt:

$$\sum_{i,j} 0'_{ij} = 0 \text{ in } 0' = 0,$$

$$\sum_{i,j,k} 0'_{ijk} = 0 \text{ in } 0'(0';0') = 0.$$

Auch ist

$$\sum_{i,j} 0'_{ij} = (1;0';1)_{ij},$$

$$\sum_{i,j,k} 0'_{ijk} = [1;0'(0';0');1]_{ij}.$$

Was dagegen die Gleichung

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0$$

betrifft, so ist sie, wie leicht zu sehen, eine Haltgleichung, die dann und nur dann erfüllt ist, wenn 1^1 höchstens drei Elemente enthält. (Die Gleichung

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 1$$

besagt daher in Worten: „1^1 enthält mindestens vier Elemente". Ebenso besagt

$$\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0$$

„1^1 enthält höchstens vier Elemente", usw.)

Ließen sich nun die Gleichungen in Satz 1 kondensieren, so würde, nachdem sie kondensiert und auf 0 gebracht sind, links kein Relativkoeffizient vorkommen, sondern nur die „Moduln" $1, 0, 1', 0'$, verknüpft durch irgendwelche der sechs logischen Operationen $+, \cdot, \dagger, ;, -, \smile$. Negation und Konversion lassen sich an Modulausdrücken immer ausführen; man kann also erreichen, daß links nur die Knüpfungen $+, \cdot, \dagger, ;$ vorkommen.

Der Ausdruck links ließe sich dann ausrechnen mit Hilfe des Schröderschen „Abacus der Relative" in Schröders Algebra der Logik III, S. 122 bis 123, 13) bis 19).

Nun ist aber (vgl. 19)):

$$0';0' = \begin{cases} 0 = 0', & \text{wenn } 1^1 \text{ ein Element enthält,} \\ 1', & \text{wenn } 1^1 \text{ zwei Elemente enthält,} \\ 1, & \text{wenn } 1^1 \text{ mehr als zwei Elemente enthält.} \end{cases}$$

Auch ist, was Schröder falsch angibt,

$$1;0' = 0';1 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 1^1 \text{ ein Element enthält,} \\ 1, & \text{wenn } 1^1 \text{ mehr als ein Element enthält.} \end{cases}$$

Dual entsprechend $1' \dagger 1'$ und $0 \dagger 1' = 1' \dagger 0$.

Die übrigen Modulknüpfungen sind unabhängig von der Anzahl der Elemente von 1^1. Also ist das Ergebnis jeder Knüpfung zwischen zwei

Moduln bei einem dreielementigen 1^1 genau dasselbe wie bei einem vierelementigen. Daher muß auch bei der Ausrechnung der linken Seite das Schlußergebnis bei einem dreielementigen und vierelementigen 1^1 dasselbe sein; ist also die durch Kondensation erhaltene Gleichung bei einem dreielementigen 1^1 erfüllt, so ist sie es auch bei einem vierelementigen. Sie kann daher nicht durch bloße Umformung (Kondensation) der Gleichungen in Satz 1 entstanden sein, da bei diesen das Gegenteil der Fall ist.

Schröder erklärt in Bd. III, S. 551 die Kondensation für stets ausführbar, benutzt aber dabei die Formel $a_{\varkappa\lambda} = (\breve{\varkappa} ; a ; \lambda)_{ij}$, bei der die Elemente des 1^1 als Relative gedeutet werden. Betrachtet man aber das als zulässig, so ist die Kondensation eine so triviale Sache, daß sie diesen Namen nicht verdient und ganz wertlos ist.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, daß sich die Bedingung dafür, daß das System a höchstens drei Elemente enthält, übersichtlicher als bei Schröder in der Form schreiben läßt:

$$\sum_{h,i,j,k} a_h a_i a_j a_k 0'_{hijk} = 0.$$

Daß die von Schröder versuchte Kondensation der Bedingung unmöglich ist, folgt für $a = 1$ aus dem Vorhergehenden. Entsprechend läßt sich auch ausdrücken, daß das System a höchstens 4, 5, $\cdots$ Elemente besitzt. „Das System a besitzt mindestens drei Elemente“, wird ausgedrückt durch

$$\prod_{h,i,j} (\bar{a}_h + \bar{a}_i + \bar{a}_j + 1'_{hij}) = 0,$$

und die Vereinigung der beiden letzten Gleichungen besagt, daß das System a genau drei Elemente besitzt.

Satz 2: *Jede Fluchtzählgleichung ist bereits in einem abzählbaren Denkbereich nicht mehr für beliebige Werte der Relativkoeffizienten erfüllt.*

Wir denken uns zum Beweise die Gleichung auf 0 gebracht. Wir beweisen zunächst, daß sich jede Zählgleichung auf eine bestimmte Normalform bringen läßt, die auf S. 453 unter (3) steht. *Zunächst suchen wir zu erreichen, daß unter einem* (ein- oder mehrfachen) Π *niemals ein* Π *oder* Σ *vorkommt.* Setzen wir voraus, daß ein Produktand mindestens ein Π oder Σ enthält, so können wir vier Fälle unterscheiden:

1) Der Produktand ist ein $\cdot$ Produkt. Dies läßt sich vermeiden durch Anwendung der Formel

$$\prod_i A_i B_i = \prod_i A_i \prod_i B_i.$$

(Speziell ist z. B. $\prod_{i,j} A_i B_j C_{ij} = \prod_i A_i \prod_j B_j \prod_{i,j} C_{ij}$.)

2) Der Produktand ist ein Π Produkt ($= \prod_k A_{ik}$, wo die A_{ik} Funk-

tionen von Relativkoeffizienten sind). Dann läßt sich dieses aus dem Produktanden herausschaffen mit Hilfe der Formel

$$\prod_i \left(\prod_k A_{ik}\right) = \prod_{i,k} A_{ik}.$$

3) Der Produktand ist eine $+$ Summe, also etwa gleich

$$A + B + C + \cdots \text{ nicht in inf.}$$

Wir unterscheiden hier zwei Unterfälle:

a) Eins oder mehrere der $A, B, \cdots$ sind ($\cdot$ oder Π) Produkte. Dieser Fall läßt sich durch das sog. „Ausaddieren" mit Hilfe der Formel $a + bc = (a + b)(a + c)$ auf 1) und 2) zurückführen.

b) Keines der $A, B, \cdots$ ist ein Produkt. Eine $+$ Summe kann auch keines sein, wenn wirklich die $A, B, \cdots$ die *letzten* Summanden sind, in die sich der Produktand ohne Anwendung von Σ zerlegen läßt. Also ist jedes der $A, B, \cdots$ entweder ein (negierter oder unnegierter) Relativkoeffizient oder ein Σ. Sind alle diese Summanden Relativkoeffizienten, so sind wir schon am Ziel; ist aber z. B.

$$A = \sum_k A_{ik}, \quad B = \sum_k B_{ik},$$

so läßt sich der Produktand in der Form schreiben:

$$\sum_k (A_{ik} + B_{ik} + C + \cdots),$$

womit dieser Fall auf 4) zurückgeführt ist.

4) Der Produktand ist eine Σ Summe. Unsere Aufgabe besteht dann darin, das $\Pi\Sigma$ in $\Sigma\Pi$ zu verwandeln, d. h. das Produkt auszumultiplizieren. Dies geschieht durch die Formel:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda}{}^{\lambda} \prod_i A_{ik_i}.$$

Hier soll das k_λ unter dem $\sum$ bedeuten, daß k_λ *alle* Indizes, d. h. alle Elemente von 1^1, durchlaufen soll, und das λ rechts vom $\sum$ soll bedeuten, daß *jedes* von den k_λ diese Indizes durchlaufen soll, daß wir also, wenn 1^1 n Elemente besitzt (wo n auch eine höhere Mächtigkeit bezeichnen kann), eine $n$fache Summe haben. Die A sind Funktionen von (nicht notwendig binären) Relativkoeffizienten.

Um die obige Formel dem Verständnis näher zu bringen, will ich einmal die darin vorkommenden Σ und Π z. T. ausführen, d. h. ich will hier einmal ausnahmsweise (entgegen der Vorschrift auf S. 448) für dieselben das Zeichen $+$ sowie Nebeneinanderstellung und Punkte benutzen. Die Indizes will ich mit $1, 2, 3, \cdots$ bezeichnen. Dann lautet die Formel:

$$\prod_i (A_{i1} + A_{i2} + A_{i3} + \cdots) = \sum_{k_1, k_2, k_3, \cdots} A_{1 k_1} A_{2 k_2} A_{3 k_3} \cdots$$
$$= \sum_{k_1 = 1, 2, 3, \cdots} \sum_{k_2 = 1, 2, 3, \cdots} \sum_{k_3 = 1, 2, 3, \cdots} \cdots A_{1 k_1} A_{2 k_2} A_{3 k_3} \cdots .$$

Unsere Formel muß bei mehrfachem Σ und Π folgendermaßen verallgemeinert werden:

$$\prod_{i, i', \cdots} \sum_{k, k', \cdots} A_{ii' \cdots kk' \cdots} = \sum_{k_{ii'\ldots} \ldots k'_{ii'\ldots} \cdots} A_{ii' \cdots k_{ii'\ldots} \ldots k'_{ii'\ldots} \ldots} \cdots .$$

Durch das Verfahren unter 1) bis 4) läßt sich nach und nach jedes Σ und Π aus dem Produktanden entfernen. Dabei kann es wohl vorkommen, daß die Umformung unter 4) mehrere Male hintereinander angewendet werden muß, und wir wollen noch angeben, wie dies geschieht:

$$\prod_h \sum_i \prod_k \sum_l A_{hikl} = \prod_h \sum_i \sum_{l_k}{}^{k} \prod_k A_{hikl_k} = \sum_{i_h} \sum_{l_{kh}}{}^{k,h} \prod_{h,k} A_{hi_h k l_{kh}} .$$

Daß man nicht $l_{(k_h)}$ schreiben muß statt l_{kh}, ist zwar für den Fortgang des Beweises unwesentlich; trotzdem aber will ich es dadurch ersichtlich machen, daß ich die Formel für einen 1^1 mit nur zwei Elementen 1, 2 ausführe, indem ich wieder einmal ausnahmsweise (entgegen der Vorschrift auf S. 448) das $+$ und die Nebeneinanderstellung benutze. Auch will ich an Stelle von A_{hikl} kurz $(hikl)$ schreiben:

$$\prod_h \sum_i \prod_k \sum_l (hikl)$$
$$= \prod_h \sum_i [(hi11)(hi21) + (hi11)(hi22) + (hi12)(hi21) + (hi12)(hi22)]$$
$$= \prod_h [(h111)(h121) + (h111)(h122) + (h112)(h121) + (h112)(h122)$$
$$+ (h211)(h221) + (h211)(h222) + (h212)(h221) + (h212)(h222)]$$
$$= \sum_{p, q, r, s, t, u = 1, 2} (1p1r)(1p2s)(2q1t)(2q2u) .$$

Für $1^1 = (1, 2; 3)$ erhält man

$$\sum_{i_1, i_2, i_3, l_{11}, l_{12}, \cdots, l_{33} = 1, 2, 3} (1 i_1 1 l_{11})(1 i_1 2 l_{12})(1 i_1 3 l_{13})(2 i_2 1 l_{21})(2 i_2 2 l_{22})(2 i_2 3 l_{23})$$
$$(3 i_3 1 l_{31})(3 i_3 2 l_{32})(3 i_3 3 l_{33}) .$$

Nachdem die Produktanden alle von Σ und Π befreit sind, bleibt nur noch übrig, alle Klammern aufzulösen, soweit sie nicht direkt hinter einem Σ und Π stehen, und die Produkte der Σ auszumultiplizieren. Dies geschieht mit Hilfe der Formel

$$\sum_i A_i \sum_i B_i = \sum_{i,k} A_i B_k,$$

entsprechend bei mehrfachen Summen.

Genau ebenso kann auch ein $\sum'$ mit einem anderen oder mit einem Σ multipliziert werden, desgleichen auch mehrfache Summen.

Es entsteht zuletzt eine Gleichung von der Form

$$\begin{aligned}(1)\qquad & C + \sum D_1 + \sum D_2 + \cdots \text{ nicht in inf.}\\ & + \prod E_1 + \prod E_2 + \cdots \text{ nicht in inf.}\\ & + \sum \prod F_1 + \sum \prod F_2 + \text{ nicht in inf.} = 0,\end{aligned}$$

wo die Summen und Produkte im allgemeinen mehrfache sein werden und die C, D_ν, E_ν, F_ν identische Funktionen von Relativkoeffizienten ohne Σ und Π sind. In unserem Beispiel auf S. 448 entsteht durch die angedeuteten Umformungen

$$\sum_l \sum_{k_\lambda}{}^{\lambda} \prod_{i,j,h} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij}) \bar{z}_{li} z_{kli} = 0.$$

Nun kann man in (1) zunächst dafür sorgen, daß unter allen Σ genau die gleichen Summationsindizes stehen, indem man fehlende einfach hinzufügt (da $\sum_i a_i = \sum_{i,j} a_i$). Bei den Gliedern ohne Σ kann man ein Σ einfach hinzufügen (da $a = \sum_i a$). Darauf kann man alle Σ in ein einziges Σ zusammenfassen [da $\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i)$]. Es entsteht eine Gleichung von der Form

$$(2)\qquad \sum (F_0 + \prod F_1 + \prod F_2 + \cdots \text{ nicht in inf.}) = 0$$

oder ausaddiert nach der Formel $\prod_i a_i + \prod_i b_i = \prod_{i,j} (a_i + b_j)$:

$$\sum \prod (F_0 + F_1 + F_2 + \cdots \text{ nicht in inf.}) = 0$$

oder kurz

$$(3)\qquad \sum \prod F = 0.$$

Wollen wir nun entscheiden, ob (3) in irgendeinem Denkbereich identisch erfüllt ist oder nicht, so können wir bei unserer Betrachtung das Σ weglassen und die Gleichung untersuchen

$$(4)\qquad \prod F = 0$$

oder in unserem Beispiel

$$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij}) \bar{z}_{li} z_{kli} = 0.$$

Denn daß diese Gleichung *identisch* erfüllt sei, bedeutet doch nichts anderes, als daß sie für *beliebige* Werte von (z und) l sowie von den k_i (d. h. von $k_1, k_2, \cdots$) erfüllt sei. Etwas anderes besagte aber das weggelassene Σ auch nicht, war also für uns wenigstens überflüssig. (Man hätte besser auch schon in (1) die Σ weglassen können, ebenso in unserem Beispiel auf S. 448 das $\sum\limits_{l}$ schon *vor* Herstellung der Normalform, aber nicht in diesem Beispiel das $\sum\limits_{k}$, allgemein kein Σ, das unter einem Π vorkommt, da bei einem solchen die obigen Betrachtungen nicht gelten.)

F kann drei Arten von Indizes enthalten:

1) „*Konstante*" Indizes, d. h. solche, die in jedem Faktor des Π immer dieselben sein müssen (l in unserem Beispiel). Wir wollen sie in irgendeiner Reihenfolge durch die ersten Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bezeichnen. Wir setzen also $l = 1$ in unserem Beispiel.

2) „*Produktionsindizes*" (i, j, h in unserem Beispiel). Sie durchlaufen unabhängig voneinander sämtliche Elemente des Denkbereichs, so daß also *jedem* Wertsystem derselben ein Faktor des Π entspricht und umgekehrt.

3) „*Fluchtindizes*" (wie k_i in unserem Beispiel sowie i_h und l_{kh} auf S. 452). Ihre „*Subindizes*" (i bzw. h bzw. k, h) sind Produktionsindizes, und die Fluchtindizes sind (nicht notwendig eindeutige) Funktionen ihrer Subindizes, d. h. z. B. l_{kh} bezeichnet in allen denjenigen Faktoren des Π ein und dasselbe Element, in denen die Produktionsindizes k und h dieselben Werte haben (aber in anderen Faktoren bezeichnet l_{kh} nicht notwendig andere Elemente).

Wir schreiben nun von den Faktoren des Π in (4) zunächst nur alle diejenigen hin, in denen die sämtlichen Produktionsindizes keine anderen als die oben unter 1) definierten Werte $1, 2, \cdots, n$ haben, oder sollten konstante Indizes fehlen, so nehmen wir irgendein Element des Denkbereichs, bezeichnen es mit 1 und schreiben den Faktor hin, in dem alle Produktionsindizes den Wert 1 haben. Wir setzen in diesem Falle $n = 1$. In F werden aber auch Fluchtindizes vorkommen, etwa

$$i_j, \; k_{lm}, \; \cdots.$$

In jedem der bisher hingeschriebenen Faktoren haben $j, l, m, \cdots$ als Produktionsindizes irgendwelche von den Werten $1, 2, \cdots, n$; wir werden also in diesen Faktoren als Fluchtindizes haben:

$$i_1, i_2, \cdots, i_n, k_{11}, k_{12}, k_{21}, \cdots, k_{nn}, \cdots.$$

Dies sind keine Funktionen von Indizes mehr, sondern bezeichnen ganz bestimmte Elemente, die wir auch in irgendeiner Reihenfolge mit den Zahlen $n + 1, n + 2, \cdots, n_1$ bezeichnen wollen. (Ausdrücklich sei bemerkt, daß zwei Elemente, die durch verschiedene der Zahlen von 1 bis n_1 bezeichnet sind, weder als gleich *noch als verschieden* vorausgesetzt werden.)

Das bis jetzt hingeschriebene Produkt nennen wir P_1. In unserem Beispiel wäre also

$$P_1 = \bar{z}_{11}(\bar{z}_{11} + \bar{z}_{11} + 1'_{11}) z_{21} = \bar{z}_{11} z_{21}.$$

(Hier durfte $1'_{11} = 1$ gesetzt werden; wäre aber $1'_{12}$ vorgekommen, so hätte dieses nicht gleich 0 gesetzt werden dürfen, da ja nicht vorausgesetzt wird, daß 2 ein anderes Element bezeichnet als 1. Man hätte vielmehr $1'_{12}$ stehen lassen müssen.)

ΠF wird zum mindesten dann in jedem Denkbereich identisch verschwinden, wenn P_1 dies tut, d. h. wenn P_1 sowohl verschwindet, falls sämtliche Elemente $1, 2, \cdots, n_1$ untereinander verschieden sind, als auch, wenn beliebig viele derselben einander gleich sind. Um zu sehen, ob alles dies der Fall ist, gehen wir alle diese Möglichkeiten durch; bilden also aus P_1 alle diejenigen (endlich vielen) Spezialisierungen $P_1', P_1'', P_1''', \cdots$, welche entstehen, wenn man unter den Elementen $1, 2, \cdots, n_1$ beliebig viele oder wenige als gleich betrachtet (wobei dann auch die Relativkoeffizienten von $1'$ und $0'$ ausgewertet werden).

Verschwinden also alle $P_1^{(\nu)}$ identisch, so ist (4) identisch erfüllt. Wenn nicht, so schreiben wir jetzt von dem ΠF alle diejenigen noch nicht in P_1 aufgenommenen Faktoren zu den schon in P_1 aufgenommenen hinzu, in denen die sämtlichen Produktionsindizes keine anderen als die Werte von 1 bis n_1 haben. Das so entstehende Produkt (das also die alten Faktoren von P_1 auch enthalten soll,) nennen wir P_2. In P_2 werden die Fluchtindizes $i_j, k_m, \cdots$ die Werte haben:

$$i_1, i_2, \cdots, i_{n_1}, k_{11}, k_{12}, k_{21}, \cdots, k_{n_1 n_1}, \cdots,$$

von denen wir diejenigen, die nicht schon durch eine Zahl benannt sind, durch die Zahlen $n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n_2$ benennen. (Auch von diesen wird nicht vorausgesetzt, daß sie verschiedene Elemente darstellen, oder Elemente, die sich von den alten unterscheiden.)

In unserem Beispiel ist, wenn man statt $z_{\varkappa\lambda}$ kurz $\varkappa\lambda$ schreibt:

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 &(\overline{11} + \overline{12} + 1'_{12})(\overline{12} + \overline{11} + 1'_{21})(\overline{12} + \overline{12} + 1'_{22})(\overline{21} + \overline{21} + 1'_{11}) \\ &(\overline{21} + \overline{22} + 1'_{12})(\overline{22} + \overline{21} + 1'_{21})(\overline{22} + \overline{22} + 1'_{22})\overline{12} \cdot 32 \\ = P_1 &(\overline{21} + \overline{22} + 1'_{12})\overline{12} \cdot 32 = (\overline{22} + 1'_{12}) \cdot \overline{11} \cdot \overline{12} \cdot 21 \cdot 32. \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt in P_2 (wie früher in P_1) die benutzten Indizes auf alle erdenklichen Arten einander gleich und ungleich. Die so aus P_2 entstehenden Produkte nennen wir

$$P_2', P_2'', P_2''', \cdots.$$

Verschwinden sie alle, so ist die Gleichung (4) identisch erfüllt. Wenn nicht, so bilden wir P_3, indem wir sämtliche Faktoren des ΠF hinschreiben, in denen die Produktionsindizes zwischen 1 und n_2 liegen. Die neuen Fluchtindizes nennen wir n_2+1, n_2+2, $\cdots$, n_3.

In unserem Beispiel ist

$$P_3 = (\overline{22}+1'_{12})(\overline{23}+1'_{13})(\overline{22}+\overline{23}+1'_{23})(\overline{31}+1'_{12})(\overline{31}+\overline{33}+1'_{13})(\overline{33}+1'_{23}) \\ \cdot \overline{11}\cdot\overline{12}\cdot\overline{13}\cdot 21\cdot 32\cdot 43.$$

Durch Gleich- bzw. Ungleichsetzung der Indizes bilden wir wieder

$$P_3',\ P_3'',\ P_3''',\ \cdots$$

usf. Da sich hiernach leicht beschreiben läßt, wie man aus dem P_n das P_{n+1} und die P'_{n+1}, P''_{n+1}, P'''_{n+1}, $\cdots$ bildet, so ist die abzählbar unendliche Reihe der $P_\varkappa$ hiermit als definiert anzusehen und ebenso die $P_\varkappa^{(\nu)}$.

Verschwinden für ein $\varkappa$ (und daher auch für alle darauffolgenden) sämtliche $P_\varkappa^{(\nu)}$, so ist die Gleichung identisch erfüllt. Wenn nicht, so ist die Gleichung schon in dem soeben konstruierten abzählbaren Denkbereich erster Ordnung nicht mehr erfüllt. Es gibt dann nämlich unter den P_1', P_1'', P_1''', $\cdots$ mindestens ein Q_1, welches in unendlich vielen der nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ als Faktor auftritt (weil ja jedes der unendlich vielen nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ eins der endlich vielen $P_1^{(\nu)}$ als Faktor enthält). Ferner gibt es unter den P_2', P_2'', P_2''', $\cdots$ mindestens ein Q_2, welches Q_1 als Faktor enthält und in unendlich vielen der nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ als Faktor auftritt (weil jedes der unendlich vielen nicht verschwindenden und Q_1 als Faktor enthaltenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ eins der endlich vielen $P_2^{(\nu)}$ als Faktor enthält). Ebenso gibt es unter den P_3', P_3'', P_3''', $\cdots$ mindestens ein Q_3, welches Q_2 als Faktor enthält und in unendlich vielen der nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ als Faktor auftritt, usf.

Jedes Q_ν ist $=1$, also ist auch

$$1 = Q_1 Q_2 Q_3 \cdots \text{ in inf.}$$

Nun ist aber ΠF für diejenigen Werte der Summationsindizes, durch deren Einsetzung die Q_1, Q_2, Q_3, $\cdots$ entstanden sind, $= Q_1 Q_2 Q_3 \cdots$, also $=1$. Daher verschwindet ΠF nicht identisch. Die Gleichung (4) ist also schon in einem abzählbaren Denkbereich nicht mehr erfüllt, q.e.d.

Anwendung: *Alle Fragen über Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Schröderschen oder Müllerschen oder Huntingtonschen Gebietsaxiome sind, (wenn überhaupt,) schon in einem abzählbaren Denkbereich entscheidbar.*

Die Axiomsysteme für den Gebietekalkül von Schröder, Müller u. a. lassen sich als Relativgleichungen schreiben, wenn man den Denkbereich erster Ordnung 1^1 alle Gebiete umfassen läßt und die Beziehung sub zwischen Gebieten als ein Relativ s bezeichnet. (Hier ist also wohl zu unterscheiden: einmal die Beziehungen der Subsumtion, Addition usw. für die *Gebiete*, und andererseits die Beziehungen für die *Relativkoeffizienten*. Erstere Subsumtion „a sub b“ wird mit $s_{ab} = 1$, letztere Subsumtion, etwa „s_{ab} sub s_{cd}“ mit $s_{ab} \prec\!\!\!= s_{cd}$ bezeichnet.)

Die Müllerschen Axiome I $a \prec\!\!\!= a$, II $(a \prec\!\!\!= b)(b \prec\!\!\!= c) \prec\!\!\!= (a \prec\!\!\!= c)$, III $(a \prec\!\!\!= b)(b \prec\!\!\!= a) = (a = b)$, $\mathrm{IV}_\times$ $0 \prec\!\!\!= a$, IV_+ $a \prec\!\!\!= 1$, V $1 \not\prec\!\!\!= 0$ geben, wenn man in diesen für 0 und 1 lieber n und e schreibt zur Vermeidung von Verwechslungen: I $s_{aa} = 1$, II $s_{ab} s_{bc} \prec\!\!\!= s_{ac}$, III $s_{ab} s_{ba} = 1'_{ab}$, $\mathrm{IV}_\times$ $s_{na} = 1$, IV_+ $s_{ae} = 1$, V $s_{en} = 0$. Da aber die Axiome für beliebige a, b, c gelten sollen, so wäre noch überall $\prod_a$ bzw. $\prod_{a,b}$, $\prod_{a,b,c}$ hinzuzufügen, und vor $\mathrm{IV}_\times$, IV_+ noch, dem Sinn dieser Axiome gemäß, $\sum_n$, $\sum_e$.

VI könnte ausgedrückt werden mit Hilfe von ternären Relativen π, σ, indem man setzt:

$$(\pi_{abc} = 1) = (ab = c), \quad (\sigma_{abc} = 1) = (a + b = c).$$

Man kann aber auch VI ausdrücken, ohne diese ternären Relative zu Hilfe zu nehmen. $\mathrm{VI}_\times$ fordert, daß es zu je zwei Gebieten a, b ein größtes, d. h. allen anderen Untergebieten übergeordnetes Untergebiet c gibt (das man Produkt von a und b nennt), ein Gebiet c also, für das in der Schröder-Müllerschen Schreibweise:

$$1)\ (c \prec\!\!\!= a)(c \prec\!\!\!= b),$$

$$2)\ \prod_x (x \prec\!\!\!= a)(x \prec\!\!\!= b) \prec\!\!\!= (x \prec\!\!\!= c),$$

d. h. also in der neuen hier anzuwendenden Schreibweise:

$$1)\ s_{ca} s_{cb} = 1,$$

$$2)\ \prod_x (s_{xa} s_{xb} \prec\!\!\!= s_{xc}).$$

Demnach ist

$$(\pi_{abc} = 1) = (s_{ca} s_{cb} = 1) \prod_x (s_{xa} s_{xb} \prec\!\!\!= s_{xc})$$

oder

$$\pi_{abc} = s_{ca} s_{cb} \prod_x (\bar{s}_{xa} + \bar{s}_{xb} + s_{xc}),$$

dual entsprechend σ_{abc}.

Es ist

$$\mathrm{VI}_\times \prod_{a,b} \sum_c \pi_{abc} = 1, \quad \mathrm{VI}_+ \prod_{a,b} \sum_c \sigma_{abc} = 1,$$

wo für π_{abc} und σ_{abc} obige binäre Ausdrücke einzusetzen sind, d. h.

$$\mathrm{VI}_\times \prod_{a,b} \sum_c s_{ca} s_{cb} \prod_d (\bar{s}_{da} + \bar{s}_{db} + s_{dc}) = 1,$$

dual entsprechend VI_+.

VII lautet bei Müller $(a+z)(\bar{a}+z)=z=az+\bar{a}z$ und fordert die Existenz eines „Negats" zu a, das eben dieser Gleichung genügt. Schreiben wir also b statt $\bar{a}$, so ist vor die ganze Gleichung noch $\sum_b$ zu setzen und dann noch vor das Ganze $\prod_{a,z}$. Um die an dieser Stelle unzulässige Bezeichnung von Produkt und Summe von Gebieten durch π und σ ersetzen zu können, zerlegen wir VII folgendermaßen:

$$\prod_{a,z}\sum_b\prod_{cdfghi}[(a+z=c)(b+z=d)(cd=f)(az=g)(bz=h)(g+h=i)=(f=z=i)].$$

So wird durch Benutzung von π und σ

$$\text{VII}\quad \prod_{a,z}\sum_b\prod_{cdfghi}(\sigma_{azc}\sigma_{bzd}\pi_{cdf}\pi_{azg}\pi_{bzh}\sigma_{ghi} \mathrel{=\!\!\!<} 1'_{fzi}),$$

wo noch für die Relativkoeffizienten von π und σ die obigen Werte auf S. 457 einzusetzen sind.

Bei den Unabhängigkeitsuntersuchungen ist nun zu entscheiden, ob aus gewissen Axiomen ein anderes folgt. Daß dieses der Fall ist, läßt sich aber durch eine Relativgleichung ausdrücken, die man primär machen kann. Es kommt also bei den Unabhängigkeitsuntersuchungen darauf hinaus, zu entscheiden, ob eine gewisse Relativgleichung und zwar nach dem Vorhergehenden eine Zählgleichung identisch erfüllt ist oder nicht. Ist es aber nicht der Fall, so läßt sich nach Satz 2 bereits ein Gegenbeispiel in einem endlichen oder abzählbaren Denkbereich geben, qed.

Auf Grund dieser Überlegungen habe ich die Unabhängigkeit der einzelnen Axiome untersucht und denke die Resultate bei anderer Gelegenheit zu veröffentlichen. Die Arbeit von Huntington darüber halte ich für verfehlt, weil er bei unbequemen Axiomen einfach in ihrer Formulierung hinzufügt: „Wenn die vorhergehenden Axiome erfüllt sind", ein billiges Mittel, um nach Belieben Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen!

Satz 3: *Die Auswertung eines Produktes oder einer Summe über Relative ist nicht immer möglich.*

Es läßt sich nämlich mit den Schröderschen Hilfsmitteln ohne weiteres eine Gleichung aufstellen, welche besagt, daß der Denkbereich endlich oder abzählbar sei, d. h. daß jedes System $a;1$ endlich oder ~ 1 (dem Denkbereich ähnlich) sei:

$$(a;1 \text{ endlich}) + (a;1 \sim 1).$$

Daß $a;1$ endlich ist, bedeutet, daß keine Abbildung z das $a;1$ ähnlich auf einen echten Teil b seiner selbst abbildet. Daß aber z ein System a ähnlich auf b abbildet, wird nach Schröder, Algebra der Logik, Bd. III, S. 605, (10) ausgedrückt durch

(1) $$(z;\breve{z}+\breve{z};z \mathrel{=\!\!\!<} 1')(b \mathrel{=\!\!\!<} z;a)(a \mathrel{=\!\!\!<} \breve{z};b),$$

und daß b echter Teil von a ist, durch

(2) $$(b \mathrel{-\!\!\!\in} a)(b \neq a)(b \neq 0),$$

$a ; 1 \sim 1$ nach (1) durch

$$\sum_z (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \mathrel{-\!\!\!\in} 1')(1 \mathrel{-\!\!\!\in} z ; a ; 1)(a ; 1 \mathrel{-\!\!\!\in} \breve{z} ; 1).$$

Daß also 1^1 endlich oder abzählbar ist, wird ausgedrückt durch

$$\{0 = \sum_z \sum_b (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \mathrel{-\!\!\!\in} 1')(b \mathrel{-\!\!\!\in} z ; a)(a \mathrel{-\!\!\!\in} \breve{z} ; b)(b \mathrel{-\!\!\!\in} a)(b \neq a)(b \neq 0)\}$$
$$+ \sum_z (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \mathrel{-\!\!\!\in} 1')(1 \mathrel{-\!\!\!\in} z ; a ; 1)(a ; 1 \mathrel{-\!\!\!\in} \breve{z} ; 1).$$

Dies ist, wie jede Sekundärgleichung, leicht in eine Primärgleichung zu verwandeln (vgl. Schröder, Bd. III, S. 150—151) und diese wieder in eine Koeffizientenbeziehung. Wären nun $\prod_z$ und $\sum_z$ auswertbar, so müßte die Gleichung nach Satz 2 identisch erfüllt oder bereits in einem endlichen oder abzählbaren Denkbereich nicht erfüllt sein, was alles nicht der Fall ist.

Der Leser wird fragen, warum sich nicht der Beweis von Satz 2 Wort für Wort auch auf die obige Gleichung übertragen läßt, die doch gewiß nicht in einem endlichen oder abzählbaren 1^1 erfüllt ist. Allerdings läßt sich nach der Methode jenes Beweises ein Denkbereich konstruieren, in dem die Gleichung nicht identisch erfüllt ist; nur erweist sich dieser Denkbereich nicht als abzählbar. Da nämlich auch über *Relative* z produktiert wird, treten auch Fluchtindizes von der Form i_z auf, wo z kein „Subindex“, sondern ein „Subrelativ“ ist, so daß zu jedem z ein Index gehört. Nähert sich aber die Indexzahl dem Unendlichen, so nähert sich die Zahl der möglichen z dem Kontinuum und damit auch die Anzahl der nötigen Fluchtindizes, d. h. die Mächtigkeit des erforderlichen Denkbereichs. (Dadurch wird aber wiederum die Menge der möglichen z von noch höherer Mächtigkeit, als die des Kontinuums ist, und folglich ebenso die Menge der nötigen Fluchtindizes usw. in inf.)

§ 3.

Uninäre Gleichungen.

Satz 4: *Zwischen uninären Relativkoeffizienten gibt es keine Fluchtgleichungen, nicht einmal dann, wenn die Relativkoeffizienten von* $1'$ *und* $0'$ *als einzige binäre noch dazu treten.*

Wenn letztere fehlen, so läßt sich sehr leicht zeigen, daß Fluchtindizes überhaupt zu umgehen sind und daher bei der Konstruktion des Denkbereichs auf S. 454ff. überhaupt gar kein Anlaß vorliegt, ihn unendlich zu machen.

Kommen aber Koeffizienten von $1'$ oder $0'$ vor, so stellen wir eine bestimmte Normalform her. Die linke Seite der auf 0 gebrachten Gleichungen ist symmetrisch in bezug auf alle Indizes, d. h. in bezug auf alle Elemente des 1^1 mit Ausnahme einer *endlichen* Anzahl ganz bestimmter, die ich die *„ausgezeichneten Indizes"* nennen will. Die zu diesen Indizes gehörigen Relativkoeffizienten sowie etwa die vorkommenden indexlosen Gebiete will ich die *„ausgezeichneten Gebiete"* nennen. Sie können übrigens auch fehlen. Alle in der Gleichung hingeschriebenen Indizes sind entweder Summations- oder Produktionsindizes oder ausgezeichnete Indizes.

Wir denken uns nun die linke Seite der Gleichung in der Booleschen Weise entwickelt nach den ausgezeichneten Gebieten. Die in Rede stehende Normalform, deren Herstellbarkeit ich oben behauptete, will ich nun zunächst einmal beschreiben. Sie ist

1) dadurch gekennzeichnet, daß die Entwicklungskoeffizienten Funktionen sind, die symmetrisch sind in bezug auf *alle*, (auch die ausgezeichneten) Indizes,

2) durch eine Eigenschaft eben dieser symmetrischen Funktionen, die wir jetzt erörtern wollen.

Wir können zunächst annehmen, daß diese symmetrischen Funktionen (die ja Entwicklungskoeffizienten waren bei der Booleschen Entwicklung nach den ausgezeichneten Gebieten), keine indexlosen Gebiete mehr enthalten (da diese ja mit zu den ausgezeichneten Gebieten gehören, nach denen entwickelt wurde). Die symmetrischen Funktionen enthalten, wie wir behaupten, keine Koeffizienten von $1'$ und $0'$. Sie lassen sich nach Boole in der Weise entwickeln, daß nur die Koeffizienten 0 und 1 vorkommen. Obgleich wir uns nur die Glieder mit dem Koeffizienten 1 hingeschrieben denken wollen, so können es doch unendlich viele Glieder sein, so daß wir an eine Abkürzung denken müssen.

Kommt in der Entwicklung z. B. das Glied vor

$$a_1 a_2 a_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5 \bar{a}_6 \bar{a}_7 \cdots = a_1 a_2 a_3 \prod_i (\bar{a}_i + 1'_{123i}),$$

so kommen auch alle Glieder vor, welche aus diesem durch Indexvertauschung hervorgehen. Deren Summe will ich bezeichnen mit $(3, \infty)_a$, also

$$(3, \infty)_a = \sum_{h,i,j} a_h a_i a_j 0'_{hij} \prod_k (\bar{a}_k + 1'_{hijk})$$

und die Summe der Glieder, welche aus

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \cdots$$

durch Indexvertauschung hervorgehen, will ich bezeichnen durch $(\infty, 3)_a$. Allgemein setzen wir

$$(n, \infty)_a = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} 0'_{i_1 i_2 \cdots i_n} \prod_k (\bar{a}_k + 1'_{i_1 i_2 \cdots i_n k}).$$

Entsprechend entsteht $(\infty, n)_a$ hieraus durch Vertauschung von a_λ und $\bar{a}_\lambda$ für jedes λ.

Kommen mehrere Relative vor, z. B. a und b, so bezeichnen wir z. B. die Summe der Glieder, welche aus

$$(a_1 b_1 a_2 b_2)\,(a_3 \bar{b}_3 a_4 \bar{b}_4 a_5 \bar{b}_5)\,(\bar{a}_6 b_6)\,(\bar{a}_7 \bar{b}_7 \bar{a}_8 \bar{b}_8 \cdots)$$

durch Indexvertauschung hervorgehen, durch

$$(2, 3, 1, \infty)_{a,b}.$$

Ebenso bezeichnen wir z. B. die Summe der durch Indexvertauschung aus

$$(a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_i b_i)\,\bigl(\prod_\varrho a_\varrho \bar{b}_\varrho + 1'_{1,2,\ldots,i+k+l,\varrho}\bigr)\,(\bar{a}_{i+1} b_{i+1} \bar{a}_{i+2} b_{i+2} \cdots \bar{a}_{i+k} b_{i+k})$$
$$(\bar{a}_{i+k+1} \bar{b}_{i+k+1} \bar{a}_{i+k+2} \bar{b}_{i+k+2} \cdots \bar{a}_{i+k+l} \bar{b}_{i+k+l})$$

hervorgehender Summe durch

$$(i, \infty, k, l)_{a,b}.$$

Hiernach ist das allgemeine Bildungsgesetz wohl klar. Daß überhaupt an allen Stellen bis auf eine stets lauter endliche Zahlen stehen, wird als das eine Kennzeichen gerade unserer symmetrischen Funktionen anzusehen sein.

Aber auch bei dieser abgekürzten Schreibweise kann die Entwicklung noch unendlich viele Glieder enthalten. Wir bezeichnen nun beispielsweise mit

$$(\geqq 2, \geqq 5)_a$$

die Summe aller derjenigen Glieder, in denen mindestens zwei unnegierte und mindestens fünf negierte a_ν vorkommen, d. h. es ist

$$(\geqq 2, \geqq 5)_a = (2, \infty)_a + (3, \infty)_a + (4, \infty)_a + \cdots + (\infty, 5)_a + (\infty, 6)_a + (\infty, 7)_a + \cdots$$
$$= \sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \ldots, \sigma} a_\varkappa a_\lambda \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \bar{a}_\pi \bar{a}_\varrho \bar{a}_\sigma 0'_{\varkappa\lambda\mu\nu\pi\varrho\sigma}.$$

Allgemein:

$$(\geqq p, \geqq q)_a = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_q}} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} \bar{a}_{j_1} \bar{a}_{j_2} \cdots \bar{a}_{j_q} 0'_{i_1 i_2 \ldots i_p j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Daß sich nun bei Anwendung dieser Schreibweise die ganze symmetrische Funktion als Summe *endlich* vieler Glieder darstellen läßt, ist ein zweites Kennzeichen gerade unserer symmetrischen Funktionen und überhaupt der Kernpunkt des ganzen Beweises.

Die Herstellungsmethode einer solchen Normalform will ich nur andeuten. Jeder Relativausdruck baut sich aus solchen Relativausdrücken, welche kein Σ oder Π enthalten und daher schon die verlangte Normalform besitzen, durch wiederholte Anwendung der vier Operationen 1) $+$, 2) $\cdot$, 3) Σ, 4) Π auf: Man wird also jeden Relativausdruck auf die Normalform bringen können, wenn man einen solchen Ausdruck auf die Normalform bringen kann, welcher aus bereits Normalform besitzenden Ausdrücken entsteht durch *einmalige* Anwendung einer jener vier Operationen. Die Ausarbeitung einer Methode für jede einzelne dieser vier Operationen ist nicht schwer und sei dem Leser überlassen.

Die Normalform läßt sich also herstellen. Sie ist eine Boolesche Entwicklung. Hat bei ihrer Herstellung sich alles weggehoben, so ist die Gleichung in jedem beliebigen Denkbereich identisch erfüllt. Ist aber auch nur ein einziges Glied stehen geblieben, so kann man sofort einen *endlichen* Denkbereich angeben, in welchem dieses Glied und folglich die ganze linke Seite der Gleichung nicht identisch verschwindet. Ist z. B. ein Glied

$$p(\geqq 2, \geqq 3, 1, \infty)_{a,b}$$

stehen geblieben, wo p Produkt ausgezeichneter Gebiete ist, so verschwindet das Glied nicht in einem Denkbereich mit sechs Elementen, in welchem

$$\begin{array}{ll} p = 1, & \\ a_1 = a_2 = 1, & b_1 = b_2 = 1, \\ a_3 = a_4 = a_5 = 1, & b_3 = b_4 = b_5 = 0, \\ a_6 = 0, & b_6 = 1 \end{array}$$

ist.

Folgerung: *Fluchtgleichungen enthalten außer den Moduln auch noch andere Relative.*

Satz 5: *Die Auswertung eines Π oder Σ über alle Relative ist stets möglich für einen Ausdruck, der nur uninäre Relativkoeffizienten oder höchstens noch die Koeffizienten von $1'$ oder $0'$ enthält und endlich viele Σ oder Π über sämtliche Indizes.*

Es sei ein Σ über Relative auszuwerten; beim Π verfährt man dual entsprechend.

Man entwickle in die Normalform des vorigen Satzes. Dann kann man die Glieder einzeln auswerten. Es ist z. B.

$$\sum_b (5, 7, 3, \infty)_{a,b} = (5+7, 3+\infty)_a = (12, \infty)_a,$$

$$\sum_a (5, 7, \geqq 3, 4)_{a,b} = (\geqq 5+3, 7+4)_a = (\geqq 8, 11)_a.$$

Kommt unter einem $\sum\limits_a$ ein ausgezeichneter Koeffizient a_i vor, so ist er bei der Auswertung zu streichen (d. h. $= 1$ zu setzen), ebenso wäre $\bar{a}_i$ zu streichen.

Es bleibt nur noch die Aufgabe, das Ergebnis aus der Normalform in einen gewöhnlichen Relativausdruck zurückzuverwandeln. Die Methode hierfür zeige folgendes Beispiel:

$$(2, 1, 3, \infty)_{a,b} = \sum_{h,i,j,k,l,m} (a_h b_h a_i b_i)(a_j \bar{b}_j)(\bar{a}_k b_k \bar{a}_l b_l \bar{a}_m b_m)\, 0'_{hijklm} \prod_n (\bar{a}_n \bar{b}_n + 1'_{hijklmn}).$$

§ 4.

Zurückführung des höheren Relativkalküls auf binären.

Satz 6: *Jede Relativgleichung bzw. Zählgleichung ist einer binären äquivalent*, d. h. ist eine beliebige Relativgleichung bzw. Zählgleichung $f = 0$ gegeben, so kann man eine binäre Relativgleichung bzw. Zählgleichung $F = 0$ angeben, welche dann und nur dann identisch bzw. nicht identisch bzw. niemals (für kein Wertsystem der Parameter) erfüllt ist, wenn das entsprechende von $f = 0$ gilt; ebenso eine binäre Gleichung bzw. Zählgleichung $F' = 0$, welche dann und nur dann für einige Wertsysteme erfüllt ist, falls es $f = 0$ ist. Dieses läßt sich ja auf jenes zurückführen. F' stimmt aber nicht mit F überein.

Dieser Satz hat im Relativkalkül die Bedeutung, die in der Algebra der Weierstraßsche Satz hat, daß alle Probleme, die sich mit solchen komplexen Zahlen mit mehr als zwei Grundeinheiten lösen lassen, für welche dieselben Formeln gelten wie für unsere Zahlen, sich auch mit den binären komplexen Zahlen lösen lassen. Ebenso sind auch alle Probleme, die sich mit Hilfe des ternären und höheren Relativkalküls lösen lassen, auch schon im binären zu erledigen. (Einfacher kann freilich unter Umständen die Heranziehung ternärer und höherer Relative sein.)

Die Bedeutung unseres Satzes kann man daraus ermessen, daß jeder Satz der Mathematik oder irgend eines Kalküls, der sich erfinden läßt, sich als eine Relativgleichung schreiben läßt, mit deren Erfülltsein der mathematische Satz steht und fällt. Diese Umwandlung beliebiger mathematischer Sätze in Relativgleichungen wird, wie ich denke, wohl jeder ausführen können, der die Arbeiten von Whitehead und Russel kennt. Da nun zufolge unseres Satzes sich aller Relativkalkül auf binären Relativkalkül zurückführen läßt, so folgt daraus, daß man die Richtigkeit jedes beliebigen mathematischen Satzes entscheiden kann, wenn man nur entscheiden kann, ob eine binäre Relativgleichung identisch erfüllt ist oder nicht.

Es sei nun zunächst eine quaternäre Relativgleichung vorgelegt; die ternäre läßt sich als ein Sonderfall hiervon auffassen. Denn sind ternäre Relativkoeffizienten a_{ijk} gegeben, so kann man quaternäre definieren durch die Gleichungen $a_{ijkl} = a_{ijk}$.

Wir betrachten einen neuen Denkbereich, dessen Elemente die *Elementenpaare* des alten 1^1 sind, den wir also 1^2 nennen müssen. Ist also

$$1^1 = (i, j, k, \cdots)$$

so ist

$$1^2 = ((i, i),\ (i, j),\ (j, i),\ (j, j),\ (i, k) \cdots).$$

Der neue Denkbereich $\mathfrak{E}$, den wir im folgenden zugrunde legen wollen, entsteht nun aus 1^2, indem man (i, i) durch i, (j, j) durch j, usw. ersetzt. Es ist also

$$\mathfrak{E} = (i,\ (i, j),\ (j, i),\ j,\ (i, k) \cdots).$$

Die Elemente benennen wir zweckmäßig mit einzelnen Buchstaben, etwa $I, K, L, \cdots$. Ist $I = (i, j)$, so nennen wir i das *Vorderglied*, j das *Hinterglied* von I. *i wollen wir als sein eigenes Vorder- und Hinterglied betrachten.*

Jedem quaternären Relativ a, dessen Indizes 1^1 zu durchlaufen haben, ordnen wir nun ein binäres Relativ A zu, dessen Indizes $\mathfrak{E}$ durchlaufen sollen, und zwar in der Weise, daß für $I = (i, j)$ $K = (k, l)$

$$a_{ijkl} = A_{IK}, \quad a_{iikl} = A_{iK}, \quad a_{ijkk} = A_{Ik}, \quad a_{iikk} = A_{ik}$$

ist. Damit ist, wenn a als gegeben betrachtet wird, A vollständig definiert als binäres Relativ mit $\mathfrak{E}$ als Denkbereich erster Ordnung.

Auf Grund dieser Zuordnung ersetzen wir nun in $f = 0$ alle quaternären Relative durch die zugeordneten binären. Da die Relativkoeffizienten nicht mehr durchweg Elemente von 1^1, sondern Elemente von $\mathfrak{E}$ sind, so sind auch die Summations- und Produktionsindizes so abzuändern, daß sie sich über das ganze $\mathfrak{E}$ erstrecken. Kommt z. B. in f vor

$$\sum_i a_{ijkl}\, b_{jkli}, \tag{1}$$

und wird a_{ijkl} durch A_{IK}, b_{jkli} durch B_{JL} ersetzt, so kommt der Summationsindex i vor in $I = (i, j)$ und in $L = (l, i)$; daher ersetzen wir die Summation über i zunächst durch eine solche über I und L und schreiben

$$\sum_I \sum_L A_{IK}\, B_{JL}. \tag{2}$$

Wir müssen nun aber bedenken, daß diese neue Summe mehr Summanden enthält als die alte (da sich I und L jetzt über das ganze $\mathfrak{E}$ erstrecken und nicht nur über 1^1). Diesem Übelstande müssen wir abhelfen, denn wir wollen ja eine Gleichung herstellen, welche genau soviel Summanden und Faktoren enthält, wie die alte, ja, welche sich von der alten durch nichts unterscheidet als durch die Bezeichnung (mit einer Ausnahme freilich). Wir erreichen unsern Zweck, indem wir jedes $A_{IK}\,B_{JL}$ mit je einem Faktor multiplizieren, welcher gleich 1 ist bei denjenigen Summanden, welche auch in der alten Summe auftreten, bei den übrigen aber gleich 0. Wir definieren nämlich zwei Relative V und H durch

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases}(V_{IJ}=1)=(I \text{ ist Vorderglied zu } J),\\(H_{IJ}=1)=(I \text{ ist Hinterglied von } J).\end{cases}$$

Diese Definitionseigenschaften von V und H sind später auch noch in die Gleichung aufzunehmen; einstweilen betrachten wir V und H als gegebene Relative, deren Indizes Elemente von $\mathfrak{E}$ bedeuten. Denn auch die Vorder- und Hinterglieder sind ja Elemente von $\mathfrak{E}$. Es gilt

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases}\big((\breve{V};\,V)_{IJ}=1\big)=(\text{Vorderglied von } I=\text{Vorderglied von } J),\\\big((\breve{V};\,H)_{IJ}=1\big)=(\text{Vorderglied von } I=\text{Hinterglied von } J),\\\big((\breve{H};\,H)_{IJ}=1\big)=(\text{Hinterglied von } I=\text{Hinterglied von } J).\end{cases}$$

Die Summe

$$\text{(5)}\qquad \sum_I\sum_L A_{IK}\,B_{JL}\,H_{jJ}\,V_{lL}$$

ist nur der Form nach eine Summation über $\mathfrak{E}$, in Wirklichkeit ist es nur eine Summation über 1^1, da die zu (2) hinzugefügten Faktoren alle Glieder wegfallen lassen außer denjenigen, in denen die Summationsindizes die Hinterglieder bzw. die Vorderglieder von j bzw. l haben. Trotzdem enthält auch diese Summe immer noch mehr Summanden als (1); und es sind nur diejenigen Summanden beizubehalten, für die das Vorderglied von I übereinstimmt mit dem Hinterglied von L, d. h. es ist noch der Faktor $(\breve{V};\,H)_{IL}$ hinzuzufügen.

$$\text{(6)}\qquad \sum_I\sum_L A_{IK}\,B_{JL}\,H_{jI}\,V_{lL}\,(\breve{V};\,H)_{IL}$$

enthält nun genau so viel Summanden wie das vorgelegte (1), doch ist (6) allgemeiner als (1), weil die Übereinstimmung der beiden Indizes j, der beiden k, der beiden l, welche in (1) zu sehen ist, nicht in (6) zum Ausdruck hommt. Dies muß noch geschehen mit Hilfe von (4):

$$\text{(7)}\qquad \sum_I\sum_L A_{IK}\,B_{JL}\,H_{jI}\,V_{lL}\,(\breve{V};\,H)_{IL}\,(\breve{V};\,H)_{JI}\,(\breve{V};\,H)_{KJ}\,(\breve{V};\,H)_{LK}$$

ist an Stelle von (1) zu setzen und von derselben Allgemeinheit wie (1). Das Produktieren geschieht dual entsprechend wie das Summieren.

Wie in diesem Beispiel durch die letzten Faktoren die Gleichheit gewisser Indizes der vorgelegten Gleichung zum Ausdruck gebracht wird (eine Gleichheit, die bei der Einführung der neuen Relativkoeffizienten zunächst nicht mehr zum Ausdruck kam), so hat man überall zu suchen, wo in $f = 0$ gleiche Indizes vorkommen oder wo die Gleichheit bzw. Ungleichheit von Indizes durch Koeffizienten wie $1'_{ij}$ oder $0'_{ij}$ zum Ausdruck kommt; und wo dann durch Einführung der neuen Relativkoeffizienten diese Gleichheit bzw. Ungleichheit nicht mehr zum Ausdruck kommt, hat man sie wieder durch Einführung entsprechender Faktoren bzw. Summanden wie in dem letzten Beispiel zum Ausdruck zu bringen. Nur dann kann man sicher sein, daß die neue Gleichung genau die entsprechenden Umformungen gestattet wie $f = 0$ und folglich genau dann identisch erfüllt ist, wenn $f = 0$ es ist, da ja dann beide Gleichungen genau dieselben Funktionen von Relativkoeffizienten enthalten, nur daß die Argumente, d. h. die Relativkoeffizienten, anders benannt sind.

Jetzt sind noch die Eigenschaften von V und H in die neue Gleichung aufzunehmen. Ich will im folgenden Relative stets in Form einer Tabelle schreiben, d. h., wenn etwa $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ die Elemente eines Denkbereichs erster Ordnung sind, so will ich das Relaliv a folgendermaßen schreiben:

$$a = \left\{ \begin{array}{c|cccc} & \alpha & \beta & \gamma & \cdots \\ \hline \alpha & a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} & \cdots \\ \beta & a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} & \cdots \\ \gamma & a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

Jeder Untermenge des Denkbereichs erster Ordnung entspricht dann ein „System“ im Schröderschen Sinne, z. B. der Menge

$$\mathfrak{A} = (\alpha, \gamma, \delta)$$

entspricht das System

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \cdots \\ \hline \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \delta & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

in welchem die zu den Elementen α, γ, δ von $\mathfrak{A}$ gehörenden Zeilen lauter Einsen enthalten, die übrigen Zeilen dagegen lauter Nullen.

Der Untermenge 1^1 von $\mathfrak{E}$ entspricht nun ein System q, nämlich

$$
q = \left\{ \begin{array}{c|ccccc}
 & i & (i,j) & (j,i) & j & (i,k) \cdots \\
\hline
i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \cdots \\
(i,j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
(j,i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
j & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \cdots \\
(i,k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
\cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array} \right.
$$

Ferner ist

$$
V = \left\{ \begin{array}{c|ccccc}
 & i & (i,j) & (j,i) & j & (i,k) \cdots \\
\hline
i & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \cdots \\
(i,j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
(j,i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
j & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \cdots \\
(i,k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
\cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array} \right.
$$

$$
H = \left\{ \begin{array}{c|ccccc}
 & i & (i,j) & (j,i) & j & (i,k) \cdots \\
\hline
i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots \\
(i,j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
(j,i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
j & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \cdots \\
(i,k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\
\cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array} \right.
$$

Wir wollen nun die Eigenschaften von V und H durch bloße Relativgleichungen ausdrücken. Diese Eigenschaften bestehen kurz gesagt darin, daß sie die Elemente von $\mathfrak{E}$ in ein quadratisches Schema ordnen. Diese Eigenschaft ist nun im folgenden logisch zu zergliedern und in Relativgleichungen zu übersetzen.

Zunächst sind V und H das, was Schröder eine Funktion im engeren Sinne nennt, d. h. V und H ordnen jedem Element I von $\mathfrak{E}$ ein und nur ein Element zu (nämlich das Vorder- bzw. Hinterglied von I). Diese Eigenschaft wird ausgedrückt durch

(1) $$V ; \breve{V} \preccurlyeq 1' \preccurlyeq \breve{V} ; V,$$

(2) $$H ; \breve{H} \preccurlyeq 1' \preccurlyeq \breve{H} ; H$$

(vgl. Schröder Bd. III, S. 587, 17)).

Die Menge sämtlicher Vorderglieder ist das frühere 1^1, das System sämtlicher Vorderglieder ist also q (vgl. S. 467), d. h. es ist $q = V; 1$; da aber ebenso $q = H; 1$ ist, so ist

$$V; 1 = H; 1. \tag{3}$$

Eine weitere Eigenschaft von V und H besteht darin, daß jedes Element von 1^1 sein eigenes Vorderglied ist, d. h.

$$q \cdot 1' \preccurlyeq V \cdot 1'$$

oder

$$V; 1 \cdot 1' \preccurlyeq V \cdot 1', \tag{4}$$

ebenso

$$H; 1 \cdot 1' \preccurlyeq H \cdot 1'. \tag{5}$$

Wegen $V \preccurlyeq V; 1$ darf statt $\preccurlyeq$ auch $=$ stehen in (4) und (5).

Man denke sich nun ein quadratisches Schema hergestellt von folgender Art

	i	j	k	$\cdot$	$\cdot\ \cdot$
i					
j					
k					
$\cdot$					
$\cdot$					

wo $i, j, k, \cdots$ die sämtlichen Elemente von 1^1 sind, d. h. die sämtlichen Vorder- und Hinterglieder. Wir schreiben nun ein Element von $\mathfrak{E}$, welches das Vorderglied m und das Hinterglied n besitzt, in das Feld der m^{ten} Zeile und n^{ten} Spalte unseres Schemas. Durch (1), (2), (3) ist zum Ausdruck gebracht, daß jedes Element von $\mathfrak{E}$ genau ein Vorder- und ein Hinterglied besitzt, d. h. also nach unserer Vorschrift in genau ein Feld unseres Schemas hineingeschrieben wird. Es ist nun zum Ausdruck zu bringen, daß jedes Feld ein und nur ein Element enthält.

Daß jedes Feld *höchstens* ein Element enthält, bedeutet folgendes: Haben zwei Elemente I und J dasselbe Vorder- und Hinterglied, ist also

$$(\breve{V}; V)_{IJ} = 1, \qquad (\breve{H}; H)_{IJ} = 1,$$

so stimmt I und J überein, d. h. $1'_{IJ} = 1$; es ist also

$$(\breve{V}; V)_{IJ}\,(\breve{H}; H)_{IJ} \preccurlyeq 1'_{IJ}$$

und da dies für beliebige I, J gilt, ist

$$\breve{V}; V \cdot \breve{H}; H \preccurlyeq 1'. \tag{6}$$

Daß endlich jedes Feld des Schemas *mindestens* ein Element von $\mathfrak{E}$ enthält, bedeutet folgendes: Wenn I und J zu 1^1 gehören, wenn also $q_{IJ} = 1$, $q_{JI} \equiv \breve{q}_{IJ} = 1$, so muß ein Element K existieren, welches I zum Vorderglied und J zum Hinterglied hat, es muß dann also sein

$$1 = \sum_K V_{IK} H_{JK} \equiv \sum_K V_{IK} \breve{H}_{KJ} \equiv (V;\breve{H})_{KJ}.$$

Daher ist $q_{IJ}\breve{q}_{IJ} \Subset (V;\breve{H})_{IJ}$ für beliebige I, J, d. h.

$$q\breve{q} \Subset V;\breve{H}$$

oder

(7) $$V;1\cdot 1;\breve{H} \Subset V;\breve{H}.$$

Der Gleichung $F' = 0$ ist also noch (1) bis (7) als Voraussetzung voranzuschicken:

(8) $$(1) \text{ bis } (7) \Subset (F' = 0).$$

Dies gibt, in eine Primärgleichung verwandelt und auf 0 gebracht, die gesuchte Gleichung $F = 0$.

Ist in der Tat $f = 0$ nicht identisch erfüllt, so gibt es einen Bereich 1^1 und ein Wertsystem der Relativkoeffizienten von den in f vorkommenden Relativen $a, b, \cdots$, für welche sie nicht erfüllt ist. Konstruiert man dann aus 1^1 durch Paarbildung den Bereich $\mathfrak{E}$ und definiert V und H wie auf S. 465, so ist für diese V und H die Vor. (1) bis (7) erfüllt, kann also wegbleiben, und $F = 0$ kann durch $F' = 0$ ersetzt werden. Jedem Koeffizienten aber, der in $f = 0$ vorkommt, entspricht ein Koeffizient, der in $F' = 0$ vorkommt; und mit einem Wertsystem, das $f = 0$ nicht erfüllt, ist auch eins gegeben, das $F' = 0$ und damit $F = 0$ nicht erfüllt, qed.

Ist umgekehrt ein Bereich $\mathfrak{E}$ und ein Wertsystem der Relativkoeffizienten der in $F = 0$ vorkommenden Relative $A, B, \cdots, H, V$ gegeben, welches $F = 0$ nicht erfüllt, so gehören zu diesem Wertsystem auch Werte von V und H, und zwar solche, welche (1) bis (7) erfüllen; denn für andere Wertsysteme ist ja $F = 0$ nach (8) identisch erfüllt. $F' = 0$ kann daher nach (8) durch das gegebene Wertsystem nicht erfüllt sein. Wir können nun einen Bereich 1^1 und ein zu diesem gehöriges Wertsystem der in $f = 0$ vorkommenden Relativkoeffizienten finden, für das auch $f = 0$ nicht erfüllt ist. Setzen wir nämlich $V;1 = q$, so entspricht diesem System eine Menge, die wir als Bereich 1^1 für $f = 0$ zugrunde legen wollen. Kommt in $F' = 0$ ein Koeffizient A_{IK} vor, so gibt es nach (1) bis (7) genau je ein Element i, j, k, l, so daß

$$V_{iI} = 1, \quad H_{jI} = 1, \quad V_{kK} = 1, \quad H_{lK} = 1.$$

Nach Bestimmung dieser Werte i, j, k, l lassen wir dem A_{IK} ein a_{ijkl} entsprechen und erteilen dem a_{ijkl} denselben Wert, der für A_{IK} gegeben ist.

So gelangen wir zu einem Wertsystem, welches $f = 0$ nicht erfüllt, da es $F' = 0$ nicht erfüllt. Mit $f = 0$ ist daher auch $F = 0$ identisch erfüllt und umgekehrt.

Liegt nun eine höhere Relativgleichung vor, etwa eine senäre mit Koeffizienten a_{ijklmn}, so kann man diese nach derselben Methode in eine ternäre verwandeln, (deren Umwandlung in eine binäre wir bereits kennen), indem man setzt:

$$(i, j) = I, \quad (k, l) = K, \quad (m, n) = M,$$

oder man kann sie mit unwesentlicher Abänderung der Methode auch gleich in eine binäre verwandeln, indem man setzt

$$(i, j, k) = I, \quad (l, m, n) = L.$$

Quinäre, septenäre usw. Gleichungen lassen sich auf senäre, oktonäre usw. zurückführen.