

Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.

Von

Adolf Fraenkel in Marburg.

Wenn man die Cantorsche Mengenlehre¹⁾, unter Ausscheidung der Antinomien und unter Verzicht auf die ihnen Raum gebende Cantorsche Mengendefinition, auf mathematisch befriedigende Grundlagen stellen will, so kommt vorläufig nur die von Herrn Zermelo gegebene Begründung²⁾ in Frage. Einige das Grundgerüst dieser Begründung betreffende und z. T. es modifizierende Bemerkungen bilden den Inhalt der folgenden Zeilen; eine ausführlichere und zusammenhängende Erörterung des hier in einigen Kernpunkten berührten Fragenkomplexes bleibt einem weiteren Aufsatz vorbehalten, in dem eine endgültige axiomatische Begründung versucht wird. Die überaus scharfsinnigen Untersuchungen Zermelos sollen hierdurch nicht umgestoßen, sondern nur vervollständigt und befestigt werden, u. a. auch nach der Richtung der bisher nicht gelungenen Klärung der *Unabhängigkeit der Axiome*.

I. *Die sieben Zermeloschen Axiome reichen nicht aus zur Begründung der Mengenlehre.*

Zum Nachweis dieser Behauptung diene etwa das folgende einfache Beispiel: Es sei Z_0 die Z., S. 267, definierte und als existierend nachgewiesene Menge (Zahlenreihe); die Potenzmenge $\mathfrak{U}Z_0$ (Menge aller Untermengen von Z_0) werde mit Z_1 , $\mathfrak{U}Z_1$ mit Z_2 bezeichnet usw. Dann gestatten die Axiome, wie deren Durchmusterung leicht zeigt, nicht die

¹⁾ Vom Standpunkt Kronecker-Brouwer-Weyl — für die Mengenlehre kommt wesentlich Brouwer in Betracht — wird hier abgesehen; die Differenzen zwischen dieser Auffassung und der heute in der Analysis üblichen, die an die Namen Weierstraß und Cantor geknüpft werden kann, dürften mindestens noch geraume Zeit weiterbestehen.

²⁾ Math. Ann. 65 (1908), S. 261–281. Zitiert als Z.

Bildung der Menge $\{Z_0, Z_1, \dots\}$, also auch nicht die Bildung der Vereinigungsmenge. Es läßt sich daher, wenn man etwa dem Kontinuum eine Mächtigkeit $< \aleph_\omega$ zuschreibt, auf Grund der Axiome z. B. die Existenz von Mengen mit Mächtigkeiten $\geq \aleph_\omega$ nicht beweisen.

Diese bisher nicht bemerkte Lücke der Zermeloschen Begründung ist durch Hinzufügung eines neuen Axioms oder Erweiterung eines vorhandenen auszufüllen. Für das angegebene Beispiel kommt man mit einer — allerdings sehr erheblichen — Erweiterung von Axiom VII aus. Bildet man jedoch, auf dem durch jenes Beispiel beschrittenen Weg systematisch weitergehend, allgemeinere Gegenbeispiele, so sieht man, daß eine *allgemeine* Forderung neuer Art aufgestellt werden muß; man kommt durch solche Überlegung zunächst zu dem folgenden Axiom³⁾:

Ersetzungsaxiom. Ist M eine Menge und wird jedes Element von M durch ein „Ding des Bereiches \mathfrak{B} “ (vgl. Z., S. 262) ersetzt, so geht M wiederum in eine Menge über.

Für das oben angeführte Beispiel hat man, um die Existenz der Menge $\{Z_0, Z_1, \dots\}$ zu zeigen, auf Grund des soeben formulierten Axioms nur das Element 0 von Z_0 durch Z_0 , das Element $\{0\}$ durch Z_1 zu ersetzen usw. Man kann weiter auf die Vereinigungsmenge der so entstehenden Menge das Axiom in analoger Weise anwenden und erlangt, derart weiterschreitend, ersichtlich die erforderliche Freiheit in der Bildung von Mengen.

Für die speziellen Zwecke der Axiomatik der Mengenlehre ist es übrigens (vgl. unten IIb) wünschenswert und möglich, an Stelle des angeführten Axioms ein weniger weitgehendes und schärferes aufzustellen; es gelingt dabei, den Begriff „ersetzen“, der im wesentlichen auf den Funktionsbegriff hinausläuft und einer besonderen Einführung bedürfte, überflüssig zu machen. Die fragliche Formulierung muß der künftigen Gesamtdarstellung vorbehalten bleiben, da sie mit der Klärung des Begriffs „definit“ (vgl. unten IIa) zusammenhängt.

II. Gewisse Bemerkungen zu einzelnen der Zermeloschen Axiome und Grundbegriffe sollen hier Platz finden, Bemerkungen, die nicht nur an sich hervorhebenswert erscheinen, sondern auch die folgende Erörterung des Unabhängigkeitsproblems vorbereiten wollen.

a) Der schwächste oder vielmehr — neben der unter I bemerkten Lücke — der einzige schwache Punkt in Zermelos Axiomatik ist die „Definition“ des Begriffs einer „definiten“ Frage oder Klassenaussage

³⁾ In speziellerer und präziserer Form bereits in meinem Aufsatze „Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen (Math. Zeitschrift (1922))“ verwendet (vgl. die dortige Definition 2).

(Z., Nr. 4 und Axiom III, S. 263). Der Zermelosche (an Cantor sich anschließende) Standpunkt, der hier wohl in schärfstem Gegensatz zur Brouwerschen Auffassung steht, bedarf im Rahmen seiner Theorie einer scharfen Präzisierung, die zweckmäßigerweise davon ausgeht, daß von vornherein die Beziehungen $m \in M$ („ m ist Element von M “) und $M = N$ als definit erklärt werden. Ein Versuch der Ausfüllung dieser Lücke bleibe der zusammenhängenden Darstellung vorbehalten.

b) Sehr weit verbreitet sind gewisse Auffassungen in bezug auf das *Auswahlaxiom* VI (Z., S. 266), die mir als durchaus mißverständlich erscheinen. Es heißt dort:

„Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1 , welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat. (Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken, daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente M, N, R, \dots von T ein einzelnes Element m, n, r, \dots *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.“

Dieser letzte Satz hat vielfach die Meinung hervorgerufen, der Kern des Axioms liege in der Forderung der Möglichkeit der „Auswahl eines ausgezeichneten Elements“ aus jeder der Mengen M, N, \dots oder in der Forderung der Möglichkeit der „gleichzeitigen Auswahl“ aus ihnen allen. Beide Auffassungen dürften unzutreffend sein. Denn für jede einzelne Menge M oder, anders ausgedrückt, für den Fall, daß T nur ein einziges Element M besitzt, ist die in dem Axiom geforderte Auswahl *beweisbar*; ist nämlich a irgendein Element⁴⁾ der (voraussetzungsgemäß von 0 verschiedenen) Menge M , so existiert die Menge $\{a\}$ nach Axiom II und sie besitzt die gewünschte Eigenschaft. Ist so die Auswahl für jede einzelne Menge möglich, so ist sie es natürlich auch gleichzeitig für alle Mengen von T , da die Auswahl wie jede mathematische Operation als etwas Zeitloses anzusehen ist.

Der oben angeführte, das Auswahlaxiom erläuternde Satz ist indes, wie ich freundlicher brieflicher Bestätigung von Herrn Zermelo verdanke, „nur als eine Anmerkung, welche die Theorie nicht berührt, aufzufassen“; jener Satz wie auch die Bezeichnung „Axiom der Auswahl“ betreffen nur eine psychologische Veranschaulichungsweise, während das Axiom, wie

⁴⁾ Eine derartige (keine versteckte Voraussetzung enthaltende) Schlußweise wird auch bei Zermelo vor Einführung des Auswahlaxioms (Z., Nr. 18, S. 266 oben) verwandt.

auch seine Fassung hinreichend zeigt, als reines *Existenzaxiom* (gleich den übrigen Axiomen II bis VII) zu betrachten ist. Um seine Unabhängigkeit von den übrigen Axiomen nachzuweisen, wird man also eine mit den übrigen Axiomen verträgliche Realisierung der Beziehung $m \in M$, d. h. des Mengenbegriffs, anzugeben haben, bei der folgendes eintritt: Bildet man irgendwie oder in bestimmter Weise zu der gegebenen Menge T Mengen $\{m\}$, $\{n\}$, ..., so daß $m \in M$, $n \in N$, ..., so existiert *keine* Menge S_1 , die die Elemente m, n, \dots und nur sie enthält. Vgl. unten S. 236 f.

Unter Zuhilfenahme des unter I eingeführten Ersetzungsaxioms wird übrigens die Existenz der Menge S_1 und damit das Auswahlaxiom anscheinend *beweisbar*. Denn nach jenem Axiom *existiert* die Menge S_1 , die aus T dadurch entsteht, daß jede der (von 0 verschiedenen) Mengen M, N, \dots durch eines ihrer Elemente ersetzt wird. (Dieser Gedankengang, gegen den übrigens vielleicht Bedenken möglich sind, will natürlich nichts über die *Konstruktion* der Menge S_1 aussagen, sondern nur zeigen, daß die *Nichtexistenz* einer Menge S_1 mit den übrigen Axiomen unverträglich wird, wenn man zu diesen das Ersetzungsaxiom hinzunimmt.) Obgleich das Ersetzungsaxiom weniger mißverständlich und mindestens ebenso plausibel sein dürfte wie das Auswahlaxiom, empfiehlt es sich dennoch nicht, dieses zugunsten von jenem aufzugeben; unter anderem auch deshalb, weil das Auswahlaxiom für die *allgemeine* Mengenlehre erforderlich ist, während das Ersetzungsaxiom (ebenso wie Zermelos Axiom VII) nur die Existenz *spezieller* Klassen von Mengen sichert. Es ist daher vom axiomatischen Standpunkt vorzuziehen (und auch durchzuführen), nur den über das Auswahlaxiom hinausgehenden Bestandteil des Ersetzungsaxioms als neues Axiom zu formulieren.

c) Hat sich unter I der Zermelosche Mengenbegriff als zu eng für die Cantorsche Mengenlehre erwiesen, so ist er in anderer Beziehung weiter, als es die Bedürfnisse der Mathematik zu erfordern scheinen. Zunächst nämlich können unter den „Dingen“ des „Bereichs \mathfrak{B} “, aus denen auf Grund der Axiome die Mengen ihre Existenz herleiten, sich auch solche nichtmathematischer und überhaupt nichtbegrifflicher Herkunft befinden. Ferner läßt das Axiomensystem Raum z. B. für die von Herrn Mirimanoff⁵⁾ als „ensembles extraordinaires“ bezeichneten Mengen M von der Art, daß, wenn $M_1 \in M$ und wenn k eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, M_k stets ein Element M_{k+1} enthält. Solche Mengen können zwar nicht auf Grund der Axiome aus den „unzerlegbaren“ (d. h. keine Menge darstellenden) Dingen von \mathfrak{B} aufgebaut werden, sie *können* aber in \mathfrak{B} vorkommen.

⁵⁾ L'Enseignement mathématique 19 (1917), S. 42.

Während Mengen der ersten wie der zweiten Art für die Mengenlehre als mathematische Disziplin nicht benötigt werden, geht aus der Tatsache, daß sie innerhalb der Zermeloschen Axiomatik Platz finden, jedenfalls hervor, daß das Axiomensystem (auch bei der unter I und IIb angedeuteten Ergänzung) keinen „kategorischen Charakter“⁶⁾ besitzt, nämlich die Gesamtheit der Mengen nicht vollständig festlegt. Die Sachlage ist in gewissem Sinn umgekehrt analog derjenigen, die für Herrn Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ vor der Einfügung des Vollständigkeitsaxioms bestand; wie dort durch dieses, so kann hier den angegebenen Übelständen durch ein als neuntes und letztes Axiom aufzustellendes „*Beschränktheitsaxiom*“⁷⁾ abgeholfen werden, das dem Mengenbegriff oder zweckmäßiger dem Bereich \mathfrak{B} *den geringsten mit den übrigen Axiomen verträglichen Umfang* auferlegt. Verfährt man in dieser Art, so wird die Nullmenge zu dem einzigen Ding, das keine Menge ist; das genügt für alle mathematischen Zwecke und vereinfacht die Betrachtung sachlich und z. T. auch formal.

III. Die Untersuchung der *Unabhängigkeit des Zermeloschen Axiomensystems* war bisher zwar (im allgemeinen wie namentlich für das Auswahlaxiom) als eine wichtige Aufgabe erkannt⁸⁾, aber nicht durchgeführt worden; sie gibt erst vollen Aufschluß über Bedeutung und Tragweite der einzelnen Axiome. Nähere Prüfung ergab, daß nur Axiom II (Axiom der Elementarmengen) wesentlich reduziert (wenn auch natürlich nicht entbehrt) werden kann, während im übrigen die Axiome voneinander unabhängig sind; für die Beweise ist allerdings — namentlich beim Auswahlaxiom — die ungenügende Bestimmtheit des Begriffs „definit“ und damit des Axioms III, von der oben (IIa) die Rede war, sehr störend, wie dies weiter unten hervortreten wird. Für die Axiome II, IV, V, VII sind geeignete Unabhängigkeitsbeweise naheliegend und ohne besondere Schwierigkeit durchführbar; zum Nachweis der Unabhängigkeit von Axiom I kann man z. B. *geordnete* Mengen in Betracht ziehen, wobei zu bedenken ist, daß die Axiome (namentlich auch Axiom IV) nichts über die eindeutige Bestimmtheit der geforderten Mengen aussagen. Während die Ausführung der Beweise für diese Axiome einer künftigen Betrachtung, die von dem vervollständigten Axiomensystem ausgeht, vorbehalten bleiben mag, sollen die zwei wichtigsten Unabhängigkeitsbeweise, die für die

⁶⁾ Vgl. meine (für den vorliegenden Zweck in leicht ersichtlicher Weise zu modifizierende) Formulierung und Verweisung im Journ. f. Math. 141 (1911), S. 76.

⁷⁾ Ein solches Beschränktheitsaxiom habe ich mit Vorteil in meiner oben unter 3) zitierten Arbeit verwandt (Axiom X), auf die ich betreffs der scharfen Formulierung verweise; man würde hier etwa zu fordern haben, daß der Bereich \mathfrak{B} , falls er einen kleinsten dem Axiomensystem genügenden Teilbereich besitze, mit diesem identisch sei.

⁸⁾ Vgl. Z., S. 262 oben, sowie Zermelo, Math. Ann. 65 (1908), S. 111 ff.

Axiome III (Axiom der Aussonderung) und VI (Axiom der Auswahl), im folgenden gegeben bzw. (für Axiom VI) der Richtung nach angedeutet werden.

Zu Axiom III. Die Nullmenge 0 sei das einzige unzerlegbare, d. h. keine Menge darstellende Ding des Bereichs \mathfrak{B} , dem im übrigen nur die im folgenden zu kennzeichnenden Mengen angehören. Zur Abkürzung werde $\{0\}$ mit 1 , $\{1\}$ mit 2 bezeichnet usw. Während „enthalten“, d. h. die *Beziehung* zwischen Element und Menge, im üblichen Sinn verstanden werde, soll der Begriff „Menge“ folgendermaßen eingeschränkt sein: Als Menge gilt jeder Bereich von endlich vielen Dingen aus \mathfrak{B} (insbesondere also von endlich vielen Mengen), ferner der Bereich $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, endlich jeder Bereich, der aus einer Menge entweder durch Bildung der Potenzmenge (Axiom IV) oder durch Bildung der Vereinigungsmenge (Axiom V) hervorgeht. Dabei ist für die Bildung der Potenzmenge die Definition des Begriffs „Untermenge“ (Z., S. 262) zu beachten, wonach deren Mengeneigenschaft im voraus feststehen muß; „endlich viele“ sowie „endliche“ und „unendliche Menge“ sind im gewöhnlichen Sinne zu verstehen, wobei auch die Nullmenge als endlich gilt.

Hiernach ist Z_0 *Untermenge jeder unendlichen Menge*. Da sowohl die Potenzmenge einer endlichen Menge wie auch die Vereinigungsmenge einer keine unendliche Menge als Element enthaltenden endlichen Menge jedenfalls endlich sind, so genügt es zum Beweis der ausgesprochenen Behauptung folgendes zu zeigen: Die Potenzmenge einer Z_0 als Untermenge enthaltenden Menge enthält selbst Z_0 als Untermenge; das nämliche gilt zweitens von der Vereinigungsmenge einer Z_0 als Untermenge enthaltenden Menge und drittens von der Vereinigungsmenge einer Menge, unter deren Elementen sich eine Z_0 als Untermenge enthaltende Menge befindet. Im letzten Fall folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar aus der Definition der Vereinigungsmenge (Axiom V). Was den ersten Fall betrifft, so sei M eine Z_0 als Untermenge enthaltende Menge; dann enthält die Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ die Elemente $\{0\} = 1$, $\{1\} = 2, \dots$, ferner nach Definition (vgl. Z., Nr. 6, S. 263) das Element 0 , so daß Z_0 wirklich Untermenge von $\mathfrak{U}M$ ist. Unter der nämlichen Voraussetzung für M enthält $\mathfrak{S}M$ das Element 0 (als Element des Elements 1 von M), ebenso 1 (als Element von $2 \varepsilon M$) usw., d. h. auch im zweiten Fall ist Z_0 Untermenge von $\mathfrak{S}M$.

Bei den getroffenen Festsetzungen sind die Axiome I, II, IV, V, VII offensichtlich erfüllt. Aber auch Axiom VI (Auswahlaxiom) wird befriedigt. Dann ist T eine *endliche* Menge, deren Elemente lauter von 0 verschiedene, untereinander elementefremde Mengen sind, so existiert eine Menge S_1 von der durch Axiom VI geforderten Art als eine Menge von endlich

vielen Dingen aus \mathfrak{B} . Ist aber T eine *unendliche* Menge, so enthält T nach dem im vorigen Absatz geführten Beweis jedenfalls das Element 0, so daß Axiom VI gegenstandslos wird. Dagegen ist Axiom III nicht erfüllt; z. B. besitzt Z_0 keine Untermenge, die alle und nur diejenigen Elemente von Z_0 enthält, welche von 0 verschieden sind. Axiom III ist also von den übrigen 6 Axiomen unabhängig.

Zu Axiom VI. Der Begriff „enthalten“ und die Bezeichnungen „endlich“, „unendlich“, Z_0 usw. sollen ebenso wie im vorangehenden gebraucht werden. Von Wichtigkeit ist für das Folgende der Begriff „definit“; es mag der Zermeloschen Definition (Z., Nr. 4, S. 263) ein *bestimmter* Sinn beigelegt werden, ohne daß hier in eine nähere Erörterung eingetreten wird; z. B. mag von einer definiten Aussage \mathfrak{G} gesprochen werden, falls sie mittels der Grundbeziehungen $m \varepsilon M$ und $M = N$ „im Sinn des heutigen Standes der Wissenschaft“ formuliert und „intern entscheidbar“ gedacht werden kann. Der Mangel an präzisiertem Gehalt, der hierbei dem Axiom III anhaftet, beeinträchtigt wohl die Beweiskraft der folgenden Betrachtung, tut dem Gedankengang und seiner Konsequenz aber keinen Abbruch; erst die Beseitigung jener Lücke ermöglicht es, aus der nachstehend nur skizzierten Überlegung einen strengen Beweis zu formen, namentlich eine konkrete Realisierung der im nächsten Absatz bezeichneten Menge T herzustellen.

Als Mengen sollen zunächst die Bereiche gelten, die auf Grund der Axiome II–V existieren, wenn man von der Nullmenge und der Menge $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ausgeht. Es existiere ferner eine abzählbare Menge $T = \{M_1, M_2, \dots\}$ von folgenden zwei Eigenschaften: M_1, M_2, \dots sind lauter elementefremde Mengen von je mindestens zwei Elementen; jede mittels der Grundbeziehungen des Bereiches \mathfrak{B} herstellbare, für die Elemente der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}T$ definite Klassenaussage $\mathfrak{G}(x)$, die für mindestens je ein Element jeder der Mengen M_k wahr ist, ist für alle Elemente mindestens einer dieser Klassen wahr⁹⁾. Hierbei können die Mengen M_k und T entweder schon auf Grund der zu Beginn dieses Absatzes getroffenen Festsetzung existieren oder nicht; im letzteren (begrifflich wohl einfacheren) Fall mag zur Vereinfachung vorausgesetzt werden, daß die Elemente der Mengen M_k , die sämtlich dem Bereich \mathfrak{B} angehören sollen, keine Mengen seien. Als Mengen (und um so mehr als Dinge von \mathfrak{B}) gelten dann noch alle aus den Elementen der Mengen M_k , diesen Mengen selbst, der Menge T und den bereits vorher eingeführten

⁹⁾ Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn jede definite Eigenschaft, die für unendlich viele Elemente von $\mathfrak{S}T$ wahr ist, für alle Elemente mindestens einer der Mengen M_k wahr ist.

Mengen auf Grund der Axiome II—V hervorgehenden Mengen; dazu gehören insbesondere alle Bereiche von endlich vielen Elementen der M_k , während eine Menge, die aus *jeder* Menge M_k ein Element enthält, mindestens *eine* Menge M_k als Untermenge besitzen muß.

Die Axiome II—V und VII sind gemäß der getroffenen Verfügung über den Mengenbegriff erfüllt, ebenso Axiom I gemäß der Deutung des Begriffs „enthalten“. Es gibt nach Axiom II zu jeder der Mengen M_k Mengen $\{m_k\}$, die genau *ein* Element von M_k enthalten. Dagegen erzeugt die (durch die Axiome nicht gestattete) Vereinigung einer vollständigen Serie solcher Mengen keine Menge; denn der so entstehende Bereich, der aus jeder Menge M_k ein Element enthält, müßte nach der im letzten Absatz angegebenen zweiten Eigenschaft von T jedenfalls eine der Mengen M_k als Untermenge enthalten, wenn er selbst eine Menge darstellte. Die Menge $\mathfrak{S}T$ besitzt also keine Untermenge S_1 von der in Axiom VI angegebenen Eigenschaft, d. h. das Axiom der Auswahl ist (im Sinne des angegebenen Vorbehalts) von den übrigen Axiomen unabhängig.

Marburg, 10. Juli 1921.

(Eingegangen am 10. 8. 1921.)