Untersuchungen aus der Mengenlehre*).

Von

Felix Bernstein in Halle a./S.

Inhaltsverzeichnis.

---

*) Der gegenwärtige Abdruck meiner Inaugural-Dissertation, die im Jahre 1901 erschienen ist, ist bis auf einige Verbesserungen und Bemerkungen hinsichtlich der seitdem erschienenen Arbeiten, die auf den Gegenstand Bezug haben, eine unveränderte Wiedergabe des bisherigen Textes.

Einleitung.

Gegenwärtig stehen zwei Probleme innerhalb der Mengenlehre im Vordergrund des Interesses. Das eine bezieht sich auf das *Kontinuum*, d. h. die Menge, welche aus allen reellen Zahlen besteht, das andere bezieht sich auf die *Grundlagen* der Mengenlehre.

Das erste ist bereits im Jahre 1873 von dem Schöpfer dieser Disziplin G. Cantor*) in seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand gestellt worden. Es beruht auf der dort gezeigten Tatsache, daß es zwar möglich ist, jeder reellen *algebraischen* Zahl eine bestimmte, für sie völlig charakteristische natürliche Zahl zuzuordnen, daß es aber unmöglich ist, auf diese Weise *alle* reellen Zahlen mit den ganzen rationalen Zahlen in eine umkehrbar eindeutige Beziehung zu setzen. Bezeichnet man zwei aus irgend welchen Dingen bestehende Mengen, welche aufeinander umkehrbar eindeutig abbildbar sind, als *äquivalent* oder von *gleicher Mächtigkeit*, und rechnet man alle äquivalenten Mengen in eine Klasse, so drängt sich sofort die Frage auf:

„*Wieviel verschiedene Klassen dieser Art kann man aus reellen Zahlen bilden?*“

Das ist das Cantorsche Kontinuumproblem.

Es ist für einen großen Teil der bisherigen Forschungen in der Mengenlehre der Leitstern gewesen. Zur Inangriffnahme desselben boten sich naturgemäß zwei verschiedene Wege dar.

Erstens konnte man hoffen, durch Untersuchung der speziellen verschiedenartigen Mengen, die sich im Kontinuum darbieten, für immer umfassendere Gebiete von Mengen die Frage nach der Zahl der Klassen zu lösen, und so durch eine *Art vollständiger Induktion* des Problems Herr zu werden.

Das wichtigste Resultat nach dieser Richtung ist der Satz von G. Cantor:

Alle *abgeschlossenen* Mengen, d. h. alle diejenigen Mengen, welche ihre Grenzelemente enthalten, sind entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

G. Cantor hat die Vermutung ausgesprochen, daß für alle Mengen im Kontinuum das gleiche Resultat zu erwarten sei. Es hat dies jedoch bis jetzt nicht bewiesen werden können. Die Hauptschwierigkeit der Untersuchung bieten die *in sich dichten* Mengen, diejenigen, bei denen

---

*) Hinsichtlich der Literatur verweise ich sowohl auf die Originalabhandlungen G. Cantors als auf das zusammenfassende Referat von A. Schönflies, Jahresberichte d. d. Mathvgg. 1900 Bd. 8, H. 2.

jeder Punkt Grenzpunkt von Punkten der Menge ist. Hier hat eine neuerdings von Baire getroffene Unterscheidung in Mengen erster und zweiter Kategorie mannigfaches Interesse.

Der zweite Weg, der ebenfalls von G. Cantor eingeschlagen wurde, geht von der Menge der natürlichen Zahlen aus. Es gelingt von hier aus neue Mengen zu konstruieren, welche sich in bezug auf ihre Mächtigkeit als die unmittelbare Fortsetzung der erstgenannten Menge erweisen. Man gelangt zu einer ganzen *Reihe von ansteigenden Mächtigkeiten*, die sich in *lückenloser* Folge unbegrenzt aneinander schließen, der Reihe der sog. *Aleph*. Das Kontinuumproblem spitzt sich hier insbesondere auf die Frage zu, die Beziehung der auf die abzählbare Mächtigkeit *zunächst* folgenden, mit Aleph-Eins bezeichneten Menge zum Kontinuum festzustellen. —

Die Untersuchung der *Grundlagen* der Mengenlehre ist aus verschiedenen Gründen zum Bedürfnis geworden.

Mit allen Disziplinen, die sich im Anfang ihrer Entwicklung befinden, teilt die Mengenlehre das Schicksal, daß der Fortschritt in ihr mehr durch sinnreiche Einfälle als durch systematische Methoden erzielt wird. Zwar sind auch in der letzteren Richtung bemerkenswerte Ansätze vorhanden. Die Einführung des *Potenzbegriffes*, der Beweis des später noch zu erwähnenden *Äquivalenzsatzes* haben es gestattet, Schlüsse, die früher nur auf mühsamen Umwegen erreichbar waren, jetzt in einem fast elementaren Kalkül zu erlangen.

Um diesem Kalkül die wünschenswerte Abrundung zu verleihen, ist es notwendig, *diejenigen voneinander unabhängigen Sätze in möglichst vollständiger Zahl aufzustellen und zu beweisen, welche für alle Mengen Gültigkeit haben.*

Die in die neueste Zeit fallende Entdeckung von Mengen, wie z. B. der Menge aller Ordnungszahlen, welche sich in wesentlichen Punkten den für alle Mengen bisher als richtig angesehenen Gesetzen nicht fügen, verleiht den Sätzen, welche für alle Mengen *ohne* Ausnahme gelten, ein wichtiges *theoretisches* Interesse. Besonders fällt hierbei ins Gewicht, daß die Frage noch offen ist, ob das Kontinuum zu den jüngst untersuchten Mengen hinzugehört oder nicht. —

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile.

Im ersten Teil beschäftige ich mich mit Fragen, welche den Grundlagen angehören. Insbesondere beweise ich den allgemeinen Satz, *daß die Teilung der Menge in eine endliche Anzahl von gleichen Teilen im Sinne der Mächtigkeit eindeutig ist.* Hieraus fließt die Erkenntnis, daß das Kontinuum durch fortgesetzte endliche Teilung nicht verkleinert werden kann. Ferner läßt sich die Frage nach der *Addition der Ungleichungen* hieraus für *vergleichbare* Mengen erledigen.

Die Frage nach der Vergleichbarkeit von Mengen bietet außerordentliche Schwierigkeiten. Für gewisse Gebiete von Mengen, innerhalb deren Mengengleichungen gelten, läßt sich jedoch, wie ich ausführe, die Vergleichbarkeit allgemein zeigen.

Im zweiten Teil handelt es sich darum, das Kontinuum mit der Menge $\aleph_1$ in nähere Verbindung zu setzen. Dies geschieht durch einen Satz, welcher eine vollkommen *parallele Definition beider Mengen* aufzustellen gestattet. Die Zahlen der zweiten Zahlenklasse erfahren dabei eine *geometrisch-anschauliche* Deutung.

Im dritten Teil wird die Gesamtheit der Mengen, welche dem Kontinuum angehören und für die die Frage nach der Mächtigkeit gelöst werden kann, mit der Gesamtheit aller Teilmengen des Kontinuums verglichen. Es wird der Satz abgeleitet, *daß die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen mit Hilfe der reellen Zahlen abgezählt werden kann.* Das Resultat des angestellten Vergleichs ergibt einen Maßstab der Beurteilung, wie weit man bisher in der Lösung des Kontinuumproblems auf diesem Wege gekommen ist.

Die Konstruktion eines höheren Typus für das Kontinuum soll zeigen, wie eine Erweiterung der bisherigen Resultate gewonnen werden kann.

Erstes Kapitel.

Über die allgemeinen Eigenschaften der Mengen.

§ 1.

Der Äquivalenzsatz.

Erklärung. Zwei Mengen M und N heißen dann *äquivalent* oder von gleicher *Mächtigkeit*, wenn es ein umkehrbar eindeutiges Beziehungsgesetz φ gibt, welches sie Element für Element aufeinander abbildet (G. Cantor*)). Unter einer *Teilmenge* einer Menge M versteht man eine Menge, deren Elemente sämtlich der Menge M angehören. Sind M und N zwei beliebige Mengen, so sind logisch die folgenden vier Fälle möglich:

1) Es ist M äquivalent einer Teilmenge N_1 von N, dagegen N keiner Teilmenge von M, in Zeichen:
$$N > M.$$

2) Es ist N äquivalent einer Teilmenge M_1 von M, dagegen M keiner Teilmenge von N, in Zeichen:
$$M > N.$$

*) G. Cantor, Journ. f. Math. Bd. 84, S. 242.

3) Es ist M äquivalent einer Teilmenge M_1 von N und ebenso N äquivalent einer Teilmenge N_1 von M.

4) Es ist M äquivalent keiner Teilmenge von N und N keiner Teilmenge von M.

Hinsichtlich des dritten Falles gilt der folgende Satz:

Satz 1. Ist M äquivalent einem Teile M_1 von N und N einem Teile N_1 von M, so ist M äquivalent N.

Dieser Satz ist zuerst von G. Cantor*) behauptet worden und wird auf seinen Vorschlag als *Äquivalenzsatz* der Mengenlehre bezeichnet. Bewiesen wurde derselbe unabhängig von E. Schröder**) und mir.***) Einen Beweis gibt ferner E. Zermelo.†) Auf eine Besonderheit des Beweises sei noch hingewiesen. Ist φ die Abbildung von M auf M_1 und ψ die Abbildung von N auf N_1, so wird die Abbildung χ von M auf N *eindeutig* aus φ und ψ hergeleitet. Ist eine Menge $\Phi = \{\varphi\}$ und eine Menge $\Psi = \{\psi\}$ von Abbildungen φ und ψ gegeben, so entspricht jeder Kombination von φ und ψ eine Abbildung χ, so daß eine Menge $X = \{\chi\}$ entsteht, von der Art, daß für die Kardinalzahlen die Beziehung

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\Phi}} \cdot \overline{\overline{\Psi}}$$

gilt.

§ 2.

Die Division der Mengen durch endliche Zahlen.

Vorbemerkung. Es gelten die folgenden Definitionen und Sätze (G. Cantor):

1. Sind M und N zwei Mengen und nennt man diejenige Menge, welche sowohl die Elemente von M als die von N enthält, die *Summe* $M + N$ dieser Mengen, so ist

$$M + N = N + M. \tag{1}$$

2. Sind M und N zwei Mengen, so nennt man diejenige Menge, welche alle Kombinationen (m, n) der Elemente m und n der beiden Mengen enthält, das *Produkt* $M \cdot N$ dieser Mengen; es ist

$$M \cdot N = N \cdot M. \tag{2}$$

3. Sind M und N zwei Mengen, so nennt man diejenige Menge, welche — im Sinne einer bekannten Ausdrucksweise — alle Kombina-

*) G. Cantor, Ztschr. f. Philosophie Bd. 91.

**) E. Schröder, Jahresb. d. d. Mathvgg. Bd. 5 (S. 81).

***) Vgl. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Eine Darstellung meines Beweises findet sich in dem *Referat* von Schönflies, Jahresb. d. d. Mathvgg. Bd. 8, Hft. 2.

†) E. Zermelo, Gött. Nachr. 1901, p. 1—5.

tionen von Elementen aus M zur N^{ten} Klasse enthält, die *Potenz* M^N (M hoch N). —

Es gelten hinsichtlich des aufgestellten Additions-, Multiplikations- und Potenzbegriffes das assoziative und kommutative Gesetz, wie bei endlichen Zahlen.

Wir untersuchen jetzt die *inversen* Operationen und stellen den folgenden die Division betreffenden Satz auf.

Satz 2. *Aus der Gleichung*
$$2M = 2N$$
folgt
$$M = N.$$

Dem Beweise schicken wir eine Reihe leicht zu beweisender Hilfssätze über umkehrbar eindeutige Abbildungen voraus.

Hilfssatz 1. Die umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines Systems S in sich bilden eine *Gruppe* Φ_S.

Hilfssatz 2. Es sei eine Reihe von umkehrbar eindeutigen Abbildungen vorgelegt,
$$1, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \cdots \tag{1}$$
und es mögen dieselben eine Gruppe bilden, d. h. es sei
$$\chi_\mu \cdot \chi_\nu = \chi_\varrho; \tag{2}$$
ferner möge es zu jedem χ_μ *ein und nur ein* χ_μ' geben, so daß
$$\chi_\mu \cdot \chi_\mu' = 1 \tag{3}$$
ist (wo 1 die identische Abbildung bedeutet).

Ist nun s ein Element von S, für welches
$$s \neq \chi_\nu(s) \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots), \tag{4}$$
so ist
$$\chi_\mu(s) \neq \chi_\nu(s) \quad (\nu \neq \mu = 1, 2, 3, \cdots). \tag{5}$$

Hilfsatz 3. Sei $s \neq s'$ und sei
$$s \neq \chi_\nu(s') \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \cdots, \tag{6}$$
so ist auch
$$\chi_\mu(s) \neq \chi_\nu(s') \ (\mu, \nu = 1, 2, 3, \cdots). \tag{7}$$
Denn aus
$$\chi_\mu(s) \neq \chi_\nu(s') \tag{8}$$
folgt durch Multiplikation mit χ_μ'
$$s = \chi_\nu \cdot \chi_\mu'(s') = \chi_\varrho(s').$$

Erklärung. Sind
$$T_1, T_2, T_3, \cdots$$
eine Reihe von Teilmengen des Systems S, von denen keine mit einer andern ein Element gemeinsam hat, so nenne ich sie ein *getrenntes System* von Teilmengen.

Hilfssatz 4. Ist $T = (t)$ eine Teilmenge von S, und ist stets

(9) $$t \neq \chi_\nu(t') \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots; \; t \neq t'),$$

so bilden die äquivalenten Teilmengen

(10) $$T, \chi_1(T), \chi_2(T), \cdots$$

ein *getrenntes System.*

Hilfssatz 5. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes ist

(11) $$S = S + T.$$

Denn bezeichnet man mit $\aleph_0$ die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen, so entsteht durch wiederholte Anwendung der Gleichung (11) eine Zerlegung von der Form:

$$S = T \cdot \aleph_0 + R;$$

also ist

$$T + S = T(\aleph_0 + 1) + R = T\aleph_0 + R,$$

mithin

$$S = S + T.$$

Beweis des Satzes 2. Wir schreiben die Voraussetzungen in der Form

(12) $$\begin{aligned} &\text{a)}\; S = x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \\ &\text{b)}\; x_1 = x_2, \\ &\text{c)}\; x_3 = x_4. \end{aligned}$$

Die den Gleichheitszeichen entsprechenden Abbildungen können als umkehrbar eindeutige Abbildungen des Systems S in sich aufgefaßt werden, wir bezeichnen sie mit $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$. Wie unmittelbar ersichtlich, ist

(13) $$\varphi_a^2 = \varphi_b^2 = \varphi_c^2 = 1.$$

Wie die nachstehende Figur veranschaulicht, zerfallen gemäß der Gleichung (12a) die x in der folgenden Weise:

(14) $$\begin{aligned} x_1 &= x_{13} + x_{14}, \\ x_2 &= x_{23} + x_{24}, \\ x_3 &= x_{31} + x_{32}, \\ x_4 &= x_{41} + x_{42}, \end{aligned} \qquad \text{wo } x_{ik} = x_{ki}.$$

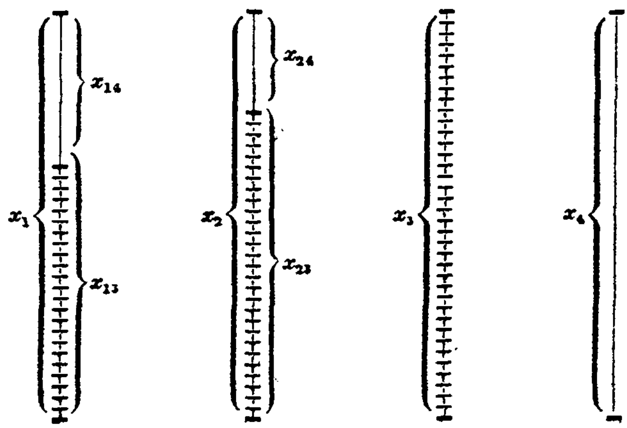


Fig. 1.

Bedeutet T_1 irgend eine Teilmenge von x_1 und T_2 eine äquivalente von x_2, *so kann man* x_1 *und* x_2 *dadurch transformieren, daß man die Elemente von* T_1 *gegen die von* T_2 *austauscht.* Es gelten für die transformierten x_1^* und x_2^* die Beziehung (12) sowie die Gleichungen

$$(14^*) \qquad \begin{array}{l} x_1^* \sim x_1, \\ x_2^* \sim x_2; \end{array} \quad \text{und ebenso} \quad \begin{array}{l} x_3^* \sim x_3, \\ x_4^* \sim x_4. \end{array}$$

Es ist also ausreichend, den Satz 2 für die x_1^*, x_2^* zu beweisen, um den Rückschluß auf die x_1 und x_2 machen zu können. In gleicher Weise gestatten auch die Mengen x_3 und x_4 solche Austauschtransformationen.

Das Ziel des Beweises ist, zu zeigen, daß wir nach geeigneten Transformationen eine solche Zerlegung der Form (14) bekommen, daß x_{13} sowohl gegen x_{14} als gegen x_{23} zu vernachlässigen ist, d. h. daß

$$x_1 = x_{13} + x_{14} \sim x_{14}$$

und

$$x_3 = x_{13} + x_{23} \sim x_{23}$$

ist. Denn hieraus folgen die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = x_{14},$$
$$x_3 = x_4 = x_{23}.$$

Damit sind aber für die Mengen x_2 und x_4 die Voraussetzungen des Äquivalenzsatzes gegeben. Es kann daher der Schluß

$$x_2 = x_4,$$

welcher die Behauptung enthält, gezogen werden.

Wir suchen zu unserem Zwecke die Menge x_{13} mit x_{14} und x_{23} in geeignete Beziehung zu setzen. Hierzu bilden wir aus den Abbildungen φ_b und φ_c alle möglichen Zusammensetzungen, die wir in zwei Reihen so anordnen:

$$(15) \qquad \begin{array}{l} 1 = \chi_0, \ \varphi_b = \chi_2, \ \varphi_b\varphi_c = \chi_4, \ \varphi_b\varphi_c\varphi_b = \chi_6, \cdots \\ \qquad\quad \varphi_c = \chi_3, \ \varphi_c\varphi_b = \chi_5, \ \varphi_c\varphi_b\varphi_c = \chi_7, \cdots \end{array}$$

Zu jeder Abbildung χ gibt es *eine* und *nur eine* inverse, denn es ist unter Berücksichtigung von (13)

$$(16) \qquad \begin{array}{r} \chi_{4n+2}\chi_{4n+2} = 1, \\ \chi_{4n}\chi_{4n+1} = 1, \\ \chi_{4n+3}\chi_{4n+3} = 1. \end{array}$$

Im übrigen liefert die Zusammensetzung von irgend welchen Abbildungen χ wieder eine Abbildung derselben Reihe, die von 1 verschieden ist.

Es bilden infolge ihrer Entstehung die χ eine Gruppe von umkehrbar eindeutigen Abbildungen des Systems $S = x_1 + x_2$ in sich.

Es sind zwei Fälle hinsichtlich der Abbildung eines Elementes e_{13} von x_{13} möglich:

1) e_{13} wird durch eine Abbildung χ mit *endlichem* Index in ein Element von x_{24} übergeführt.

2) e_{13} wird *niemals* durch die Abbildungen der Reihe (15) in ein Element von x_{24} übergeführt.

Der wesentliche Gedanke besteht nun darin, *durch Austausch von Elementen aus x_{13} gegen Elemente von x_{24} es zu erreichen, daß lediglich der zweite Fall eintritt.*

Gesetzt nämlich, es trete für alle Elemente e_{13} der zweite Fall ein, so behaupte ich, daß die Bilder $\chi_{2\nu}(x_{13})$ (resp. $\chi_{2\nu+1}(x_{13})$) *abwechselnd* in x_{23} und x_{14} liegen, und dort ein *getrenntes System* von einfach unendlich vielen Teilmengen bilden. Hieraus folgt dann aber nach Hilfsatz 5, daß

$$x_{13} + x_{14} = x_{14},$$
$$x_{13} + x_{23} = x_{23}$$

ist, woraus, wie oben gezeigt, unser Satz resultiert.

In der Tat, durch die Abbildung χ_2 geht im zweiten Falle x_{13} *gänzlich* in x_{23} über. Durch x_4 gehen dann die Elemente von x_{23} in solche von x_{14} oder x_{24} über, mithin geht nach 2) $\chi_4(x_{13})$ in x_{14} ausschließlich über.

Indem man so fortfährt zu schließen, gelangt man durch vollständige Induktion dahin, daß bei jeder Abbildung mit dem Index $4n$ die Menge x_{13} gänzlich in x_{23}, bei jeder Abbildung mit dem Index $4n+2$ die Menge x_{13} in x_{24} übergeht. Das ganz Analoge aber findet bei den Abbildungen χ_{4n+1} und χ_{4n+3} statt.

Die Reihe der Abbildungen χ erfüllt schließlich die Bedingung, daß sie umkehrbar eindeutige Abbildungen des Systems S in sich sind, außerdem bilden sie den Teil einer Gruppe von solchen Abbildungen, wo es zu jedem Element ein und nur ein inverses Element der Gruppe gibt. Bedenkt man noch, daß die Bilder von x_{13} niemals auf x_{13} zurückfallen, so ergibt sich, daß die Anwendung der Hilfssätze 1 bis 5 erlaubt ist, was zu den gewünschten Schlußfolgerungen führt.

Wir gehen nunmehr zu dem allgemeineren Falle 1) über. Wir verstehen unter x'_{13} diejenigen Elemente von x_{13}, welche durch χ_1 in x_{24} übergehen. Unter x''_{13} ferner verstehen wir diejenigen von x'_{13} verschiedenen Elemente, welche durch χ_2 in solche Elemente von x_{24} übergehen, welche noch nicht durch die Abbildung χ_1 getroffen worden sind. In gleicher Weise definieren wir $x_{13}^{(3)}, \cdots, x_{13}^{(\nu)} \cdots$ Wir erhalten folgendes Schema:

$$(17) \quad \begin{cases} x'_{13}, & \chi_1(x'_{13}) & \text{in } x_{24}, \\ x'_{13} + x''_{13}, & \chi_1(x'_{13}) + \chi_2(x''_{13}) & \text{in } x_{24}, \\ x'_{13} + x''_{13} + x'''_{13}, & \chi_1(x'_{13}) + \chi_2(x''_{13}) + \chi_3(x_{13}^{(3)} & \text{in } x_{24}, \\ x'_{13} + x''_{13} + \cdots + x_{13}^{(\nu)}, & \chi_1(x'_{13}) + \chi_2(x''_{13}) + \cdots + \chi_\nu(x_{13}^{(\nu)}) & \text{in } x_{24}. \end{cases}$$

Wir bilden nunmehr die äquivalenten Summen

$$\bar{x}_{13} = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_{13}^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \bar{x}_{24} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_\nu(x_{13}^{(\nu)}).$$

Nunmehr vollziehen wir einen Austausch von $\bar{x}_{13}$ gegen $\bar{x}_{24}$; setzen wir

(18) $$x_{13} = \bar{x}_{13} + \bar{\bar{x}}_{13} \qquad x_{24} = \bar{x}_{24} + \bar{\bar{x}}_{24}$$

und bezeichnen wir die transformierten x mit x^*, so wird

(19) $$\begin{aligned} x_{13}^* &= \bar{\bar{x}}_{13} \\ x_{14}^* &= x_{14} + \bar{x}_{14} \\ x_{24}^* &= \bar{\bar{x}}_{24} \\ x_{23}^* &= x_{23} + \bar{x}_{13}. \end{aligned}$$

Die neuen x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^* entstehen dann gemäß der Formel (14). Nach den eingangs gemachten Bemerkungen haben wir uns jetzt nur noch mit diesen zu beschäftigen. Untersucht man jetzt das Verhalten von $x_{13}^* = \bar{\bar{x}}_{13}$ gegenüber den Abbildungen (15), so findet man, daß jetzt nur noch der zweite Fall eintreten kann.

Denn gesetzt, es ginge irgend ein Element von $x_{13}^* = \bar{\bar{x}}_{13}$ durch χ_ν in $x_{24}^* = \bar{\bar{x}}_{24}$ über, so träte das in Widerspruch mit der Definition von $x_{13}^{(\nu)}$, denn $x_{13}^{(\nu)}$ soll *alle* Elemente von x_{13} enthalten, welche verschieden sind von $x_{13}' \cdots x_{13}^{(\nu-1)}$ und in Elemente von x_{24} übergehen, die nicht in $\sum_{\aleph=1}^{\nu-1} \chi_\aleph(x_{13}^{(\aleph)})$ liegen.

Sind die betrachteten Mengen *endlich*, so muß der nach der angegebenen Vorschrift vollzogene Austausch zur Folge haben, daß x_{13} und dann aber auch x_{24} völlig verschwunden sind. Dies kann man sich leicht veranschaulichen. Im allgemeinen Falle verfahren wir, wie bereits angegeben. Es resultiert

$$x_1^* = x_3^*$$

und da nach (14*)

$$x_1^* \sim x_1, \quad x_3^* \sim x_3$$

ist, so folgt

(20) $$x_1 = x_3 = x_2 = x_4.$$

Satz 3. *Aus*

$$n \cdot M \sim n \cdot N$$

folgt

$$M \sim N,$$

wenn n eine beliebige endliche Zahl bedeutet.

Der *Beweis* ist eine genaue Verallgemeinerung des soeben geführten. Die einzige Schwierigkeit beruht in der richtigen Wahl der Reihe der Abbildungen χ.

Setzt man entsprechend an:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ x_1 = x_2 = x_3 &= \cdots = x_n \\ y_1 = y_2 = y_3 &= \cdots = y_n \end{aligned}$$

und bezeichnet die Abbildungen der Reihe der x mit

$$\varphi_{12}, \varphi_{13}, \cdots, \text{ die der } y \text{ mit } \psi_{12}, \psi_{13}, \cdots,$$

bildet man ferner die Zerfällungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn}, \end{aligned}$$

so hat man zu zeigen, daß nach gehörigen Vertauschungen

$$(3)\qquad x_{11} = x_{11} + x_{12},$$

nach weiteren Vertauschungen

$$x_{11} = x_{11} + x_{13}$$

usw. wird. Indem man alle Vertauschungen auf einmal vornimmt, bekommt man dann

$$(4)\qquad x_{11} = x_{11} + x_{12} = x_{11} + x_{13} = x_{11} + x_{14} \cdots$$

Dies hat aber, wie man unmittelbar sieht, zur Folge, daß

$$x_1 = x_{11} \quad \text{d. h.} \quad \leq y_1$$

wird. Die Symmetrie der Voraussetzungen erlaubt, denselben Weg bei den y einzuschlagen. Man gelangt dadurch zu der Relation

$$(5)\qquad y_1 = y_{11}, \quad \text{d. h.} \quad \leq x_1,$$

und folgert daraus nach dem Äquivalenzsatz

$$(6)\qquad x_1 = y_1.$$

Um die Vertauschungen zu finden, welche zu der Gleichung (3) führen, hat man zu bilden

$$(7)\qquad \chi_0 = 1, \ \chi_1 = \varphi_{12}, \ \chi_2 = \varphi_{12}\psi_{12}, \ \chi_3 = \varphi_{12}\psi_{12}\varphi_{13}, \cdots$$

und dann nach dem Schema (17) so auszutauschen, daß die Bilder von x_{12} entweder in x_{22} oder in x_{11} zu liegen kommen.

Satz 4. *Aus*

$$2x = x + a$$

folgt

$$x \geq a.$$

Dieser Satz, der die *Subtraktion* behandelt, zeigt aufs deutlichste den Unterschied der Gesetze der transfiniten und der endlichen Mengen.

Beweis. Wir schreiben die Voraussetzungen in der Form

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 ,$$
$$(1) \qquad x_1 = x_2 ,$$
$$x_2 = x_3 .$$

Die Abbildungen $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ bezeichnen wir mit φ,

„ „ $\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$ „ „ „ ψ.

Wir werden dieselben als Abbildungen des Systems (x_1, x_2, x_3) in sich auffassen.

Die Zerlegungen

$$x_1 = x_{13} + x_{14} ,$$
$$x_2 = x_{23} + x_{24}$$

veranschaulicht die nachstehende Figur.

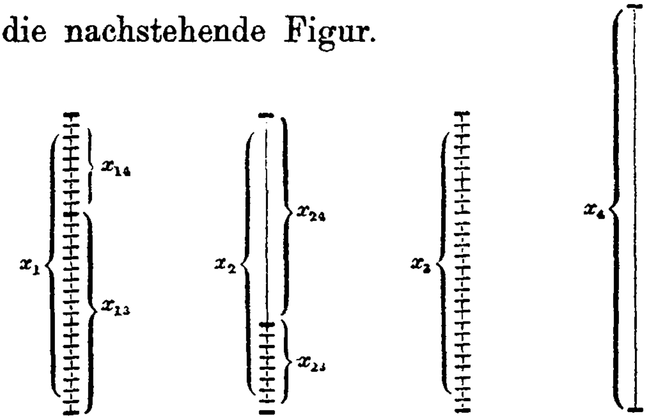


Fig. 2.

Wir bilden die Reihe der Abbildungen

$$\chi_0 = 1, \ \chi_1 = \varphi, \ \chi_2 = \varphi\psi, \ \chi_3 = \varphi\psi\varphi, \cdots$$

und unterscheiden zwei Fälle:

1) Es existieren in x_{14} Elemente e_{14}, welche durch eine Abbildung χ in x_{23} übergeführt werden.

2) Kein Element von x_{14} wird durch die Abbildungen χ in x_{23} übergeführt.

Im zweiten Falle erkennt man leicht, daß die Bilder

$$\chi_1(x_{14}), \ \chi_2(x_{14}), \cdots$$

abwechselnd in x_{13} und x_{24} liegen müssen. Letzteres hat dann (unter Hinzuziehung der Hilfssätze zu Satz 2) zur Folge, daß

$$(4) \qquad x_{14} + x_{24} = x_{24} = x_4$$

ist. Da x_{24} Teil von x_2 ist, so folgt also

$$x_2 \geq x_4 ,$$

d. h.

$$x \geq a .$$

Trifft der erste Fall zu, so führen wieder die dem Schema (17) entsprechenden Vertauschungen zu transformierten x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, und die für diese geltenden Beziehungen führen zu der Ungleichung

$$x_2^* \geq x_4^*,$$

welche wieder

$$x_2 \geq x_4,$$
$$x \geq a$$

nach sich zieht.

§ 3.

Über die Ungleichungen der Mengenlehre.

Erklärung 1. Nachdem der dritte der in § 1 bezüglich des Verhältnisses zweier Mengen M und N aufgestellten Fälle durch den Beweis des Äquivalenzsatzes erledigt ist, bedarf nur noch der vierte Fall

4) „M ist äquivalent keinem Teile von N und N keinem Teile von M“ einer Erläuterung.

Es ist bisher nicht gelungen, zu zeigen, daß dieser Fall bei den unendlichen Mengen ausgeschlossen ist. Man ist daher genötigt, bei gewissen Sätzen diesbezügliche Einschränkungen zu machen. Man bezeichnet das Statthaben resp. Nichtstatthaben desselben als „*Nichtvergleichbarkeit*“ und „*Vergleichbarkeit*“ der betreffenden Mengen.

Erklärung 2. Das „*Größer*“ und „*Kleiner*“ bei Mengen wird folgendermaßen definiert.

Tritt bei zwei Mengen M und N der erste Fall ein, so heißt

M kleiner als N,

in Zeichen

$$M < N.$$

Tritt hingegen der zweite Fall ein, so heißt

M größer als N,

in Zeichen

$$M > N.$$

Wir stellen nun das folgende Theorem auf:

Satz 1. *Sind a und b zwei Mengen, für die*

(1) $$a > b$$

gilt, und ist c eine weitere Menge, für die

(2) $$b \geq c$$

ist, so besteht die Ungleichung

(3) $$a + c > b + c.$$

Beweis. Wir schreiben die Voraussetzungen in der Form

(4) $$a = a' + a'' + a'''; \; b = a'' + a''', \; c = a''.$$

Es ist jedenfalls

(5) $$a + c \geq b + c.$$

Das Gleichheitszeichen führt zum Widerspruch, denn sei

(6) $$a + c = b + c, \text{ d. h. } a' + (a'' + 2a''') = (a'' + 2a'''),$$

so folgt, indem man links für $(a'' + a''')$ seinen Wert $a' + (a'' + 2a''')$ einsetzt,

(7) $$2a' + a'' + 2a''' = a'' + 2a''';$$

durch Addition von a'' erhält man

(8) $$2(a' + a'' + a''') = 2(a'' + a'''),$$

d. h. $2a = 2b$ und dies erlaubt nach Satz 2 des vorigen Paragraphen auf $a = b$, also einen Widerspruch gegen die Gleichung (1), zu schließen. Es ist also in der Tat

$$a + c > b + c.$$

Satz 2. *Aus*

(1) $$a > b, \quad c > d$$

und aus der Beziehung

(2) $$b \text{ vergleichbar mit } d,$$

$$\text{d. h. } b \gtreqless d,$$

folgt

(3) $$a + c > b + d.$$

Beweis. Sei etwa

(4) $$b \geq d,$$

so folgt aus Satz 1

(5) $$a + d > b + d.$$

Ferner ist offenbar

(6) $$a + c \geq a + d,$$

also ist

$$a + c > b + d.$$

Satz 3. *Damit aus*

$$a > b; \ c > d$$

folge

$$a + c > b + d,$$

ist es notwendig, daß b und d vergleichbar sind, oder solche nicht vergleichbare Mengen, für welche die Relation

$$2m > m$$

erfüllt ist.

Beweis. Gesetzt nämlich, es sind b und d solche unvergleichbare Mengen, für die außerdem

(1) $$2b = b, \quad 2d = d$$

ist. (Dieses letztere tritt beispielsweise ein, wenn $b = \aleph_0 b'$, $d = \aleph_0 d'$ ist.)

Dann setzen wir

$$a = b + d,$$
$$(2) \qquad c = b + d,$$

dann ist sicher

$$a > b, \quad c > d.$$

Die Addition der Ungleichungen (2) liefert aber

$$a + c = (b + d)2 = b + d.$$

Bemerkung. Man kann mit Hilfe der im vorigen Paragraphen gegebenen Schlußweisen auch unmittelbar die Richtigkeit des Satzes 1 zeigen. Um dann den Satz 2 des § 1 zu zeigen, ist es nötig, aus

$$2x = 2a$$

die Vergleichbarkeit von x und a zu zeigen. Dies ist jedoch nur in speziellen Fällen $a = 2a$, $a = a^2$ usw. einfach.

§ 4.

Über die Vergleichbarkeit der Mengen.

Man kann auf die Vergleichbarkeit von Mengen M und N zuweilen aus Gleichungen schließen, die zwischen ihnen bestehen.

Satz 1. *Ist*

$$(1) \qquad M + N = M \cdot N,$$

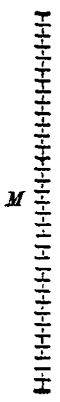
so ist

$$M \text{ vergleichbar } N.$$

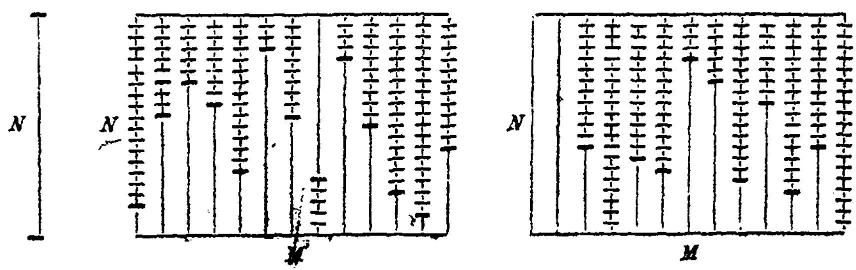
Beweis. Wir setzen

$$(2) \qquad M = \{m\}, \quad N = \{n\}.$$

Gemäß der Gleichung (1) zerfällt $M \cdot N$, wie die Figur veranschaulicht, in zwei Teile R und S. Wir setzen



$$(3) \qquad \begin{aligned} M \sim R &= \{m_r, n_r\}, \\ N \sim S &= \{m_s, n_s\}, \end{aligned}$$



1ter Fall. 2ter Fall.

Es können nun zwei Fälle eintreten.

1. Es gibt für jeden Wert von m_r mindestens ein (m_r, n'_r), welches

nicht in R vorkommt. In diesem Falle gehört eine Menge $M \sim \{m_r, n'_r\}$, wo m_r alle Werte von M durchläuft, zu S. Sie bildet also eine Teilmenge derselben. Es ist mithin

$$M \leq S, \quad \text{d. h.} \quad M \leq N.$$

2. Es gibt einen Wert von m_r, m_r^*, so daß alle $\{m_r^*, n_r\}$, wo n_r die Werte von N durchläuft, zu R gehören. Es ist also

$$N \sim \{m_r^*, n_r\} \text{ eine Teilmenge von } R.$$

Mithin ist

$$N \leq R, \quad \text{d. i.} \quad N \leq M.^{*)}$$

Erklärung 1. Ein System S von Mengen derart, daß die Summe zweier Mengen des Systems wieder dem System angehört, heiße ein *vollständiges* System.

Erklärung 2. Ein System S von Mengen, welche alle untereinander vergleichbar sind, heiße ein *Bereich* von Mengen.

Satz 2. *Gilt für jede Menge M eines vollständigen Systems S von Mengen die Gleichung*

$$M^2 = M, \tag{1}$$

so bildet S einen Bereich.

Beweis. Seien a und b zwei Mengen des Systems S, so ist

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = a + 2a \cdot b + b = a(1 + b) + b(1 + a). \tag{2}$$

Ferner folgt unter Benutzung des Äquivalenzsatzes aus

$$a^2 = a, \qquad b^2 = b,$$

und

$$2a \geq a^2, \qquad b^2 \leq 2b,$$

$$2a \leq a \cdot a, \qquad b \cdot b \geq 2 \cdot b$$

die Beziehung

$$a = a^2 = 2a, \qquad b = b^2 = 2b$$

und aus demselben Grunde

$$a = a + 1, \quad b = b + 1;$$

also ist

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 2 \cdot a \cdot b = a \cdot b. \tag{3}$$

Andrerseits ist $(a + b)$ eine Menge des Systems S, also ist

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = (a + b)^2 = a + b, \tag{4}$$

*) Wie Herr Beppo Levi, Intorno alla teoria degli aggregati (Lomb. Ist. Rend. II, 35, p. 863) mit Recht bemerkt, wird hier von dem folgenden Schluß Gebrauch gemacht: Es zerfalle eine Menge A in Teilmengen s, von denen nicht zwei ein Element gemein haben; es sei $S = \{s\}$ die Menge dieser Teilmengen. Dann gibt es wenigstens eine Teilmenge von A, welche äquivalent S ist. Über die Bedeutung dieses Schlusses siehe ferner: F. Bernstein, Bemerkung zur Mengenlehre (Gött. Nachr. 1904, pg. 6).

mithin

$$a + b = a \cdot b, \tag{5}$$

woraus nach Satz I die Behauptung folgt.

§ 5.

Anwendungen auf das Kontinuum.

Die in Paragraph 1—4 bewiesenen Sätze beruhen lediglich auf den Eigenschaften der umkehrbar eindeutigen Abbildung. Sie haben daher für *alle* Mengen, gleichgültig welche Eigenschaften ihnen sonst zukommen, Gültigkeit. Dies hat namentlich Bedeutung für diejenigen Mengen, von denen nicht bewiesen ist, daß sie in wohlgeordnete Form gebracht werden können. Insbesondere erhalten wir für das Kontinuum den folgenden neuen Satz.

Satz 1. *Teilt man das Kontinuum in eine endliche Anzahl gleicher Teilmengen, so ist jede dieser Teilmengen gleich dem Kontinuum.**)

Es kann also das Kontinuum durch fortgesetzte endliche Teilungen nicht verkleinert werden.

Beweis. Bezeichnet c die Mächtigkeit des Kontinuums, so ist also

$$n \cdot x = c \tag{1}$$

und da

$$c = n \cdot c$$

$$nx = nc,$$

also nach § 1, Satz 3

$$x = c.$$

Des Interesses halber, welches der Satz 1 bietet, füge ich noch den folgenden einfachen Beweis desselben hinzu.

Hilfssatz. Aus

$$x^2 = 2y, \quad x \geq y \tag{2}$$

folgt

$$x = y.$$

Denn schreiben wir (2) in der Form

$$x \cdot x' = y + y,$$

so erkennt man mittels des in § 3, Satz 1 angewandten Verfahrens, daß entweder

$$y \geq x, \tag{3}$$

oder

$$y \geq x' = x$$

*) Diese Teilmengen sind nicht als Intervalle, sondern als ganz unregelmäßig verteilte Punktmengen vorzustellen.

ist. In Verbindung mit (2) ergibt dies

$$y = x.$$

Wir führen der Einfachheit halber den Beweis des Satzes 1 für den Fall $n = 2$. Es sei

(4) $$2x = c.$$

Offenbar ist

(5) $$x^4 = x^3 \cdot x \geq 2x \geq c.$$

Wir betrachten $16x^4$. Einerseits ist

$$16x^4 = c^4 = c.$$

Andrerseits ist

(6) $$16x^4 \geq x^4 \quad \text{also} \quad c \geq x^4.$$

Es ist also nach (5) und (6)

$$c \geq x^4 \geq c,$$

d. h. es ist nach dem Äquivalenzsatz

(7) $$x^4 = c = 2x.$$

Wir wenden jetzt die Formel des Hilfssatzes an, und erhalten so

(8) $$x = x^2.$$

Es ist nun

$$x \leq 2x \leq x \cdot x,$$

also nach (8)

$$x = 2x = c.$$

Der Beweis, der hier geführt ist, benutzt allein die Eigenschaft des Kontinuums, daß es seinem Quadrat äquivalent ist. *Er hat für alle Mengen, für die $M^2 = M$ ist, Gültigkeit.*

Zweites Kapitel.

Das Kontinuum und die Ordnungstypen.

§ 6.

Ein Satz von G. Cantor.

Für das folgende bedürfen wir eines von G. Cantor herrührenden bisher unpublizierten Theorems. Dasselbe verdanke ich einer freundlichen persönlichen Mitteilung des Autors. Wir schicken die folgenden Erläuterungen voraus.

Erklärung 1. Ist eine *abzählbare* Menge M einfach geordnet, d. h. gilt für die Ordnung der Elemente das Gesetz:

$$\text{aus } a > b \text{ und } b > c \text{ folgt } a > c,$$

so gehört zu ihr ein ganz bestimmter *Ordnungstypus* μ. Derselbe entsteht, wenn man von der individuellen Beschaffenheit der Elemente abstrahiert. Zu allen abzählbaren, einfach geordneten Mengen, welche auf die vorgelegte Menge ähnlich d. h. unter Aufrechterhaltung der Rangbeziehung der Elemente, abgebildet werden können, gehört derselbe Ordnungstypus μ.

Der Satz von Cantor bezieht sich nun auf die Menge $O = \{\mu\}$, welche aus *allen* einfach geordneten Typen erster Mächtigkeit besteht, und setzt die Mächtigkeit derselben in Vergleich mit der des Kontinuums d. h. des Inbegriffs aller reellen Zahlen. Er lautet:

Theorem I. *Das Kontinuum ist äquivalent einer Teilmenge der Menge $O = \{\mu\}$ aller einfach geordneten Typen erster Mächtigkeit.*

Beweis. Man denke sich die reellen Zahlen etwa im dyadischen Zahlsystem dargestellt. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf eine für Mächtigkeitsfragen irrelevante Menge erster Mächtigkeit. Das Kontinuum sei durch die Zahlen der Einheitsstrecke repräsentiert. Jeder reellen Zahl x zwischen 0 und 1 entspricht dann eine einfach unendliche Folge von Nullen und Einsen. Diese umkehrbar eindeutige Beziehung schreiben wir symbolisch

$$x = (\mu_1, \mu_2, \cdots), \tag{1}$$

wo $\mu_1, \mu_2, \cdots$ Nullen oder Einsen bedeuten.

Wir erinnern ferner an die bekannten und leicht zu erweisenden Eigenschaften*) des Ordnungstypus ω der Reihe der natürlichen Zahlen. Versteht man unter ν eine endliche ganze Zahl, unter $\nu + \omega$ denjenigen Ordnungstypus, den man erhält, wenn man den Elementen von ω noch ν einfach geordnete Elemente vorausschickt, so ist

$$\nu + \omega = \omega.$$

Bei entsprechender Bedeutung des Summenzeichens erkennt man, daß

$$\omega + \nu \neq \omega$$

ist. Es folgt vielmehr, wenn λ eine andere ganze Zahl bedeutet, aus

$$\omega + \nu = \omega + \lambda$$
$$\nu = \lambda.$$

Die Eigenschaften von ω übertragen sich entsprechend auf den entgegengesetzten Typus ω^* der Reihe der negativen ganzen Zahlen.

Man erkennt nunmehr leicht die wichtige Eigenschaft des Typus $\omega^* + \omega = \pi$ der negativen und positiven ganzen Zahlenreihe:

*) G. Cantor, Grundlage einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

Aus den Gleichungen

$$\nu + \pi = \lambda + \pi$$

oder

(2) $$\pi + \nu = \pi + \lambda$$

folgt notwendig

$$\nu = \lambda.$$

Während also der Typus ω sich mit den vor ihm stehenden Elementen vereinigen kann, verschmilzt der Typus π weder mit irgend welchen vor ihm, noch mit irgend welchen hinter ihm stehenden Elementen.

Ihren allgemeinsten Ausdruck findet diese Eigenschaft von π in dem folgenden Satze:

„Bedeuten ν und ν' endliche ganze Zahlen, ζ und ζ' beliebige abzählbare einfach geordnete Typen, so folgt aus der Gleichung

(3) $$\nu + \pi + \zeta = \nu' + \pi + \zeta'$$

sowohl

$$\nu = \nu'$$

als

$$\zeta = \zeta'.\text{“}$$

Beweis. Bei ähnlicher Abbildung bleibt die Anordnung der Elemente erhalten, also entspricht das niederste Glied der linken Seite von (3) dem niedersten Gliede der rechten Seite, das zweite dem zweiten usw. Daraus folgt sofort der erste Teil der Behauptung.

Zugleich reduziert sich die Gleichung (3) auf die folgende

$$\pi + \zeta = \pi' + \zeta',$$
$$\pi = \pi'.$$

Da die beiden ähnlich aufeinander abgebildeten Mengen eindimensional geordnet sind und die niedersten Elemente den niedersten entsprechen, so können nur die folgenden drei Fälle eintreten: Entweder fällt das Bild von π auf einen Teil von π', oder es ist π' enthalten in dem Bild von π, oder es ist π' selbst das Bild von π. Im ersten und zweiten Falle müßte es eine Zerlegung des Ordnungstypus π

$$\pi = \pi_1 + \pi_2,$$
$$\pi = \pi_1$$

geben. Geht man jedoch auf die Definition von $\pi = \omega^* + \omega$ zurück, so leuchtet ein, daß π nur auf *eine* — nämlich durch die Definition gegebene — Weise in zwei Summanden zerlegt werden kann.

Es wird also π auf π' abgebildet.

Infolgedessen wird aber auch ζ auf ζ' abgebildet, es ist, wie behauptet

$$\zeta = \zeta'.$$

Wir werden das ausgesprochene Theorem bewiesen haben, wenn wir ein Verfahren angeben können, zu jeder gegebenen reellen Zahl einen bestimmten, für sie charakteristischen Ordnungstypus zu finden. Es geschieht dies nach dem folgenden Gedanken.

Wir schieben in der rechten Seite von 1) hinter jedes μ_ν eine Menge vom Typus π ein. Es entsteht so das Aggregat

$$\mu_1 \pi \, \mu_2 \pi \, \mu_3 \pi \cdots$$

Die Gesamtzahl aller *von Null verschiedenen* Elemente dieses Aggregates bildet in der vorliegenden Reihenfolge eine einfach geordnete Menge. Wir bezeichnen den Ordnungstypus derselben mit μ und schreiben

$$\mu = \mu_1 + \pi + \mu_2 + \pi + \mu_3 + \cdots.^{*)}$$

Dann lassen wir der Zahl x den Ordnungstypus μ entsprechen.

Es erübrigt noch zu beweisen, daß auch wirklich zwei verschiedenen Zahlen x und x' zwei verschiedene Ordnungstypen μ und μ' entsprechen. Es sei

$$x' = (\mu_1', \mu_2', \mu_3', \cdots), \tag{4}$$

$$\mu' = \mu_1' + \pi + \mu_2' + \pi + \mu_3' + \cdots \tag{5}$$

Die Gleichung

$$\mu = \mu' \tag{6}$$

schreiben wir in der Form

$$\mu_1 + \pi + \zeta_1 = \mu_1' + \pi + \zeta_1'.$$

Indem wir nun den bewiesenen Hilfssatz anwenden, folgern wir

$$\mu_1 = \mu_1',$$
$$\zeta_1 = \zeta_1'.$$

Dann schreiben wir die letztere Gleichung

$$\mu_2 + \pi + \zeta_2 = \mu_2' + \pi + \zeta_2'$$

und folgern ebenso

$$\mu_2 = \mu_2',$$
$$\zeta_2 = \zeta_2'$$

usw. Aus den Gleichungen

$$\mu_1 = \mu_1',$$
$$\mu_2 = \mu_2',$$
$$\cdots\cdots$$

aber folgt

$$x = x'. \tag{7}$$

*) Hierbei benutzen wir das Summenzeichen in der erweiterten Bedeutung, daß $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ sein soll, wenn α irgend einen Typus bedeutet.

Es besteht somit eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den x und den μ, wir können demgemäß in der üblichen Weise schreiben

$$(8) \qquad \{x\} \sim \{\mu\}.$$

Bezeichnet man die Kardinalzahl des Kontinuums mit $\mathfrak{c}$, diejenige von O mit $\mathfrak{o}$, so folgt unmittelbar

$$(9) \qquad \mathfrak{c} = \overline{\overline{\{\mu\}}} \leq \mathfrak{o}.$$

Wie bereits erwähnt, hat das Problem, die Mächtigkeit des Kontinuums zu bestimmen, die spezielle Gestalt gewonnen, zu entscheiden, ob das Kontinuum größer oder gleich der auf die abzählbare Mächtigkeit zunächst folgenden Mächtigkeit $\aleph_1$ ist. Da das Kontinuum definiert ist als Begriff der *reellen Zahlen*, $\aleph_1$ hingegen als die Mächtigkeit des Inbegriffs aller *Ordnungstypen wohlgeordneter* abzählbarer Mengen, so ist es eine Vorbedingung zur Lösung dieser Frage, *eine solche Beziehung zwischen den reellen Zahlen und den Ordnungstypen zu gewinnen, daß beide Mengen als Systeme von Elementen gleicher Beschaffenheit erscheinen.*

Dies geschieht durch den folgenden Satz.

Satz 1. *Das Kontinuum ist äquivalent der Gesamtheit O aller Ordnungstypen einfach geordneter Mengen erster Mächtigkeit.*

Der Beweis dieses Satzes geschieht durch Anwendung des Äquivalenzsatzes. Die eine Hälfte der Behauptung, nämlich das Kleiner- resp. Gleichsein des Kontinuums gegenüber der Menge aller genannten Typen, ist von G. Cantor schon frühzeitig bewiesen worden. Der Beweis, daß das Kontinuum größer oder gleich der in Rede stehenden Gesamtheit von Ordnungstypen ist, wird im Anschluß an eine allgemeine Diskussion des Ordnungsbegriffes geführt werden, die uns zugleich eine anschauliche Deutung der transfiniten Ordnungszahlen liefern wird.

§ 7.

Ordnungstypen und Ordnungsfunktionen.

Alle Begriffe der Mengenlehre können zurückgeführt werden auf die folgenden drei:

Element, System, Abbildung (Funktion).

Die Ordnung einer Menge M stellt eine Bestimmung hinsichtlich der Paare (a, b) von Elementen dar, welche zwei Möglichkeiten $a < b$, $b < a$ bietet. Sie kann repräsentiert werden durch eine Funktion $f_{a,b}$ der Menge M^2 der Paare (a, b), welche gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem $a < b$ oder $a > b$ ist (und die für $a = b$ den Wert 0 erhält).

Das Gesetz — aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ — drückt sich so aus:

(1) $$\text{aus} \quad f_{a,b} = f_{b,c} \quad \text{folgt} \quad f_{a,c} = f_{b,c}.$$

Es entsteht die Frage, wann repräsentieren zwei Ordnungsfunktionen, die sich auf dieselbe Menge beziehen, denselben Ordnungstypus? Dies beantwortet der

Satz: Zwei Ordnungsfunktionen f_1 und f_2 repräsentieren *dann und nur dann* denselben Ordnungstypus, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ der Menge M in sich gibt, so daß

(2) $$f_{1\,\varphi(a),\varphi(b)} \equiv f_{2\,a,b} \text{ (wo } a \text{ und } b \text{ alle Werte von } M \text{ durchlaufen).}$$

Denn ist $\overline{M} = \{\bar{a}\}$ der zu M gehörige Ordnungstypus, und ist erstens

$$\psi(a) = \bar{a}$$

die *ähnliche* Abbildung, welche die nach $f_{2\,a,b}$ geordnete Menge auf $\overline{M}$ hat, so ist

(3) $$\psi[\varphi(a)] = \overline{\varphi(a)}$$

diejenige ähnliche Abbildung, welche die nach f_1 geordnete Menge auf den Ordnungstypus abbildet. Repräsentiert zweitens f_1 und f_2 denselben Ordnungstypus, so sind zwei Abbildungen ψ_1 und ψ_2 gegeben, so daß

(4) $$\psi_1(a) = \bar{a}, \qquad \psi_2(a) = \bar{a},$$

welche die nach f_1 resp. f_2 geordnete Menge ähnlich auf den Ordnungstypus abbilden. Aus der Ähnlichkeit der Abbildung folgt dann, daß

$$f_{1\,\psi_1(a),\,\psi_1(b)} \equiv f_{2\,\psi_2(a),\,\psi_2(b)}$$

ist, wo a, b, alle Werte von M durchlaufen.

Ich setze nunmehr $\psi_2^{-1}(a)$, $\psi_2^{-1}(b)$ an Stelle von a und b und erhalte

$$f_{1\,\psi_1\psi_2^{-1}(a),\,\psi_1\psi_2^{-1}(b)} = f_{2\,a,b}.$$

Diejenigen Ordnungsfunktionen, welche zu demselben Ordnungstypus gehören, sollen eine *Schar* von Ordnungsfunktionen heißen. Man erkennt aus dem Bewiesenen den

Satz: Die Gesamtheit aller Ordnungsfunktionen einer Schar bilden eine Menge von der gleichen Mächtigkeit, wie die Gruppe der umkehrbar eindeutigen Abbildungen der Menge in sich.

Der Ordnungstypus erscheint hier als die Invariante der Schar.

Bevor ich die obigen Sätze auf die Zahlen der zweiten Zahlenklasse anwende, möchte ich erwähnen, daß mit Hilfe der eingeführten Begriffe das Problem, das Kontinuum in eine wohlgeordnete Menge zu verwandeln, eine einfache Gestalt gewinnt.

Eine wohlgeordnete Menge können wir nämlich auch als eine solche definieren, in welcher jede Teilmenge ein niederstes Element besitzt.

Legen wir nun das Kontinuum in der Form der Einheitsstrecke mit ihren Punkten zugrunde, so können wir sagen:

Es wird die Existenz einer eindeutigen Funktion $f(x, y)$ der reellen Variabelen x und y behauptet, welche

1) definiert ist für alle Punkte des Einheitsquadrates,

2) welche den Gleichungen

$$f(x, y) = -f(y, x) = \pm 1$$

genügt und auf der Geraden $x = y$ Null ist,

3) welche in bezug auf jede Teilmenge $P = (p)$ der Zahlen zwischen 0 und 1 für *ein und nur ein* Element p der Gleichung $f(p, q) = +1$ genügt (wo q alle Werte von P durchläuft).

Solche Funktionen will ich mit $C(x, y)$ bezeichnen. Sie sind überall unstetige Funktionen, aber ihre sehr merkwürdigen Eigenschaften weichen von denen der bisher studierten unstetigen Funktionen in hohem Maße ab.

§ 8.

Der Beweis des Satzes 1 (§ 6) auf Grund der Eigenschaften der Ordnungsfunktionen.

Um die Ordnungsfunktionen für die abzählbaren Mengen darzustellen, sei eine einfach unendliche Teilmenge der reellen positiven Zahlen zugrunde gelegt. Besondere Einfachheit und Anschaulichkeit erreicht man, wenn man die Menge der rationalen Zahlen oder die Reihe der natürlichen Zahlen wählt. Bei letzteren insbesondere wird die Menge der Paare durch das ebene Punktgitter dargestellt, welches alle Punkte (x, y) mit positiven ganzzahligen x und y enthält. Man hat dann zur Repräsentierung der *natürlichen* Ordnung die Punkte $x < y$ mit der positiven, die Punkte $x > y$ mit der negativen Einheit zu belegen. Ist $f_1(x, y)$ eine beliebige Ordnungsfunktion derselben Menge, so wird sie durch eine Belegung des Punktgitters mit demselben oder dem entgegengesetzten Wert dargestellt, je nachdem die Rangordnung zwischen x und y mit der Größenbeziehung übereinstimmt oder entgegengesetzt ist.

Nicht jede Belegung des Punktgitters mit positiven oder negativen Einheiten stellt eine Ordnung dar. Vielmehr wird erstens

$$f_1(x, y) = -f_1(y, x) \quad \text{und} \quad f(y, y) = 0$$

gefordert; zweitens muß auch die Bedingung des Einfachgeordnetseins (aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$) zum Ausdruck kommen. Übersichtlich geschieht dies in der folgenden Weise. Man verbinde alle Punkte, welche den Wert $+1$ (oder 0) tragen, untereinander durch geradlinige Strecken und in gleicher Weise alle, welche den Wert -1 (oder 0) tragen. Man nenne das eine Streckensystem das positive, das andere Streckensystem das negative. Versteht man ferner unter der zu der Strecke $(x_1 y_1 \cdots x_2 y_2)$ *konjugierten* Strecke die mit $(x_1 y_2 \cdots x_2 y_1)$ zu signierende, so kann man einfach sagen: die zweite Bedingung, damit eine Belegung eines Punktgitters mit positiven und negativen Einheiten eine Ordnungsfunktion darstelle, besteht darin, daß *niemals* eine Strecke des positiven Systems konjugiert ist mit einer Strecke des negativen Systems.

Denn haben wir ein derart beschaffenes Punktgitter, und sind a, b, c drei beliebige Elemente der Menge, so daß

$$f_{a,b} = f_{b,c} = \varepsilon = \pm 1$$

ist, so sei etwa

$$f_{a,c} = + \eta.$$

Wir betrachten das Viereck (a, b) (b, b) (b, c) (a, c); die Strecke $(ab \cdots bc)$ gehört zum ε-System, also muß die konjugierte Strecke $(bb \cdots ac)$ entweder selbst eine Strecke des ε-Systems, oder eine Verbindungsstrecke eines positiven mit einem negativen Punkte sein. Da jedoch $f_{b,b} = 0$ ist, so kann das letztere nicht stattfinden, also ist auch $f_{a,c} = \varepsilon$.

Ist umgekehrt das Ordnungsgesetz erfüllt, und ist

$$f_{x_1, y_1} = f_{x_2, y_2},$$
$$f_{x_1, y_2} = f_{x_2, y_1},$$

so folgt aus

$$f_{x_1, y_1} = - f_{x_1, y_2}$$

ein Widerspruch. Denn es ist einerseits

$$f_{x_1, x_2} = f_{y_1, x_2} = f_{x_1, y_1},$$

andererseits

$$- f_{x_1, x_2} = f_{x_2, x_1} = f_{y_2, x_1} = f_{x_2, y_2} = f_{x_1, y_1}.$$

Hieraus würde folgen $x_1 = x_2 = y_1 = y_2$, was mit der Annahme $(x_1 y_1) \neq (x_2 y_2)$ unverträglich ist.

B e w e i s d e s S a t z e s 1. Wir zeigen zunächst, daß

$$\mathfrak{o} = \overline{\overline{O}} \leq \mathfrak{c}$$

ist.

Nach den Ausführungen im vorigen Paragraphen gehörte zu jedem Ordnungstypus eine Schar von darstellenden Ordnungsfunktionen. Insbesondere gehört also zu jedem Ordnungstypus einer lineargeordneten abzählbaren Menge eine Schar von Punktgittern.

Die Mächtigkeit, welche eine Schar von Ordnungsfunktionen, aufgefaßt als Menge, besitzt, ist gleich der Mächtigkeit der Gesamtheit Π aller Permutationen der natürlichen Zahlenreihe. Den Wert von Π werden wir noch genauer bestimmen. Jedenfalls ist die Gesamtheit O der Ordnungstypen kleiner oder gleich der Gesamtheit der Ordnungsfunktionen:

$$O \leq \{f_{a,b}\}.$$

Es läßt sich aber noch eine zweite Auffassung der Ordnungsfunktionen bilden. Man fasse das Punktgitter als eine *Doppelreihe von Nullen, positiven und negativen Einheiten auf und verwandle es in der bekannten Weise in eine einfache Reihe.* Ersetzt man dann noch die -1 durch $+2$, so stellt die letztere eine bestimmte reelle Zahl zwischen Null und Eins im triadischen Zahlensystem dar. Diese Darstellung ist im wesentlichen eindeutig. Vergleicht man nun O mit dem Kontinuum, so erhellt daraus

$$\overline{\overline{O}} \leq \mathfrak{c}.$$

Wir ziehen nunmehr das Resultat aus § 6 heran

$$\overline{\overline{O}} \geq \mathfrak{c}.$$

Der Äquivalenzsatz erlaubt jetzt den Schluß

$$\overline{\overline{O}} = \mathfrak{c}.$$

Zusatz. Die Gesamtheit Π aller Permutationen der natürlichen Zahlenreihe hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Beweis. Die Gesamtheit aller Teilmengen der natürlichen Zahlenmenge hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Denn man setze für alle Zahlen der Reihe $(1, 2, 3 \cdots)$, welche in einer Teilmenge vorkommen, *Einsen*, für die nicht vorkommenden *Nullen*. Die so entstehende Folge von Nullen und Einsen stellt eine reelle Zahl im dyadischen System dar. So entsteht eine umkehrbare, im wesentlichen eindeutige Beziehung zwischen dem Kontinuum und der Menge der Teilmengen.

Der wesentlichste Punkt des Beweises ist, zu zeigen, daß jede Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen eine Permutation besitzt, bei der jede Zahl derselben den Platz wechselt. Man stellt eine solche dadurch dar, daß man in der Teilmenge die $(2n)^{\text{te}}$ Zahl mit der $(2n+1)^{\text{ten}}$ vertauscht.

Für zwei verschiedene Teilmengen sind die auf solche Weise definierten Permutationen natürlich verschieden. Es ist also Π größer oder gleich der Gesamtheit der Teilmengen, d. h. größer oder gleich dem Kontinuum. Daß aber Π auch kleiner oder gleich dem Kontinuum ist, folgt sehr einfach. Faßt man nämlich die Zahlen der Permutation in ihrer Reihenfolge als die Teilnenner eines Kettenbruchs auf, so erhält man für jede Permutation einen bestimmten Kettenbruch, der eine reelle Zahl darstellt. Jeder Permutation entspricht so eindeutig eine reelle Zahl. Die Gesamtheit Π entspricht einer Teilmenge der Gesamtheit der reellen Zahlen.

Da also Π erstens nicht kleiner, zweitens nicht größer ist als das Kontinuum, so folgt aus dem Äquivalenzsatz, daß

$$\Pi = \mathfrak{c}$$

ist.

§ 9.

Verallgemeinerung und zweiter Beweis des Satzes 1 (§ 6).

Nach der in § 2, 3 angeführten Definition des Potenzbegriffes läßt sich die Kardinalzahl des Kontinuums in die Form $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ setzen, wenn $\aleph_0$ die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen bedeutet (G. Cantor*)).

Wir können demgemäß dem Satze 1 des § 6 auch die folgende Fassung geben:

Die Gesamtheit der Typen einfach geordneter Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Die bekannte Definition der Kardinalzahl $\aleph_1$ lautet (G. Cantor**)):

Die Gesamtheit aller Typen der wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ hat die Mächtigkeit $\aleph_1$.

Diese Parallelität der Definition von $\aleph_1$ und $2^{\aleph_0}$ überträgt sich ebenso auf die höheren Aleph. Es ist die Gesamtheit der einfach geordneten Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ die Potenz $2^{\aleph_\alpha}$, die Gesamtheit der wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ liefert die nächstfolgende Kardinalzahl $\aleph_{\alpha+1}$.

Der Beweis ist in jeder Beziehung analog dem im einfachsten Falle geführten, so daß derselbe hier übergangen werden kann.***)

Dagegen soll für den speziellen hier ausgeführten Fall ein zweiter einfacherer Beweis gegeben werden, der auf einer Eigenschaft des Typus η der rationalen Zahlen beruht. Es gelten die beiden folgenden Sätze (G. Cantor*)):

Hilfssatz 1. Liegt zwischen je zwei Elementen einer einfach geordneten *abzählbaren* Menge stets ein Element, so ist sie vom Typus η (d. h. man kann sie ähnlich auf die Menge der rationalen Zahlen abbilden), wenn man ihr niedrigstes und ihr höchstes Glied beseitigt.

Hilfssatz 2. Es ist die Menge

$$(\eta, 1, \eta) = \eta + 1 + \eta$$

---

*) Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 481.

**) G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

***) F. Hausdorff hat in einer Arbeit: „Über eine gewisse Art geordneter Mengen" (Ber. d. k. s. Ges. d. Wiss. Leipzig; Math. Phys. Kl. 1901, p. 460—475) diesen Satz verallgemeinert, indem er ihn für alle „gestuften" Mengen beweist, die ihrem Quadrat äquivalent sind.

selbst vom Typus η, also

$$\eta + 1 + \eta = \eta.$$

Hierauf gründen wir den folgenden Satz.

Satz 1. Ist μ ein Ordnungstypus einer beliebigen abzählbaren, einfach geordneten Menge, so gibt es stets eine Teilmenge von η, welche den Typus μ besitzt.

Beweis. Wir gehen aus von dem Ordnungstypus μ und zeigen, daß wir durch Einschaltung von Elementen an geeigneten Stellen denselben zum Typus η umwandeln können.

Diejenigen Elemente, welche *zwischen* zwei Elementen e_1 und e_2 des Typus μ liegen, sind völlig bestimmt, wir nennen sie das Intervall $(e_1 e_2)$. Enthalten sämtliche vorhandenen Intervalle Elemente, so ist der Typus μ nach Hilfssatz 1 von der Form η, oder $1 + \eta$, $\eta + 1$, $1 + \eta + 1$, da man durch Streichung der niedrigsten und höchsten Glieder von μ dann stets den Typus η erhält. Fügt man daher den Typus η sowohl vor als hinter den Typus μ hinzu, so ist sicher nach Hilfssatz 2

$$\eta + \mu + \eta = \eta.$$

Enthalten nicht sämtliche Intervalle Elemente der Menge, so schieben wir in alle elementfreien Intervalle Mengen vom Typus η ein. Die so entstehende Menge μ^* erfüllt sicher die Bedingungen des Hilfssatzes 1, daß in jedem Intervall Elemente vorhanden sind. Es ist also wieder

$$\eta + \mu^* + \eta = \eta.$$

Schließlich erinnern wir noch an den Satz:

Hilfssatz 3. Die Gesamtheit der Punkte eines abzählbar unendlich-dimensionalen Kontinuums besitzt die Mächtigkeit des Linearkontinuums. In Zeichen

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Beweis zu Satz 1 (§ 6).

Der Typus η sei repräsentiert durch die Gesamtheit der rationalen Zahlen. Nach Satz 1 gibt es Teilmengen von rationalen Zahlen, welche einen beliebigen vorgelegten Typus μ darstellen. Die Menge O aller Typen μ ist daher kleiner oder gleich der Menge R aller Teilmengen aus rationalen Zahlen.

Wir denken uns nunmehr ein abzählbar unendlich-dimensionales Kontinuum. Jeder Teilmenge $(r_1, r_2, \cdots)$ der rationalen Zahlenmenge können eindeutig diejenigen Punkte zugeordnet werden, deren Ordinaten $(x_1, x_2, \cdots)$ in irgend einer Reihenfolge $(r_1, r_2, \cdots)$ sind.

Die Menge R aller Teilmengen aus rationalen Zahlen ist daher kleiner oder gleich der Menge der Punkte des unendlich-dimensionalen Kontinuums.

Nach Hilfssatz 3 ist also

$$R \leq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Nun war andererseits

$$O \leq R \quad \text{also} \quad O \leq \mathfrak{c}.$$

Hiermit sind wir aber unter Zuhilfenahme des Theorems I wieder zum Beweise des Satzes 1 gelangt.

Drittes Kapitel.

Die Mengen im Kontinuum und das Ultrakontinuum.

Die Behauptung von G. Cantor, daß im Kontinuum nur zwei verschiedene Mächtigkeiten vorkommen, ist eine Aussage, welche sich auf *alle* Teilmengen des Kontinuums bezieht. Man kann sie in der Form aussprechen:

Jede Teilmenge T des Kontinuums ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Bisher bewiesen ist dieser Satz nur für die *abgeschlossenen* Mengen A, d. h. diejenigen, welche alle ihre Grenzelemente enthalten.

Um nun den Umfang des bereits Geleisteten und des noch zu Leistenden abzuschätzen, wird man die Frage aufwerfen:

Welche Stellung nehmen die abgeschlossenen Mengen unter allen Teilmengen des Kontinuums ein?

Wir beantworten diese Frage mit Hilfe einer der Mengenlehre eigentümlichen *Betrachtungsweise*, die darin besteht, daß wir die *Häufigkeit* beider Arten von Mengen in Vergleich ziehen.

Wir bilden also diejenigen beiden Mengen $\{A\}$ und $\{T\}$, deren einzelne Elemente die Mengen A und T sind, und stellen das Verhältnis ihrer Mächtigkeiten fest.

Die Menge $\{T\}$ aller Teilmengen des Kontinuums war schon bei anderer Gelegenheit von G. Cantor untersucht, und er hatte gefunden, daß dieselbe eine höhere Mächtigkeit als das Kontinuum besitzt.

Von der Menge $\{A\}$ beweisen wir dagegen den folgenden Satz:

Die Gesamtheit $\{A\}$ aller abgeschlossenen Mengen hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Wir erhalten also das Resultat, daß die abgeschlossenen Mengen in *geringerer* Anzahl vorhanden sind, als die nichtabgeschlossenen. Das Verhältnis beider ist ein ähnliches wie das zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen. Der Satz wird in der Art bewiesen, daß ein Verfahren angegeben wird, wie man zu jeder abgeschlossenen Menge eine bestimmte reelle Zahl finden kann, welche sie umgekehrt völlig charakterisiert.

Zu den abgeschlossenen Punktmengen gehören alle Kurven und Flächen im Raume von den mannigfachsten Formen und Gestalten, und es ist eine merkwürdige Tatsache, *daß somit eine einzige reelle Zahl ausreicht, um jede auch noch so komplizierte unter ihnen zu beherrschen.*

Dieselbe Betrachtungsweise, wie sie auf die abgeschlossenen Mengen angewendet wurde, läßt sich auch auf die von Baire eingeführten Mengen erster und zweiter Kategorie ausdehnen. Das Resultat ist hier ein *negatives*, es läßt sich mit Hilfe dieser Begriffe keine wesentliche Erweiterung der bisherigen Sätze erlangen.

Es fragt sich nun, *wie gelangt man zu einer Erweiterung der Sätze in dem angegebenen Sinne?*

Der hier eingeschlagene Weg besteht darin, daß das Kontinuum auf *eine andere Form* gebracht wird. Es wird ein höherer Typus konstruiert, innerhalb dessen es gelingt, für eine Teilmengenklasse, welche $2^{\aleph_1}$ Mengen enthält, die Mächtigkeitsfrage zu entscheiden.

Daß die Kardinalzahl $2^{\aleph_1}$ größer ist als die Kardinalzahl $2^{\aleph_0}$, ist sehr wahrscheinlich. Der Beweis hierfür steht jedoch noch aus.

§ 10.

Die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen.

Erklärung 1. Zwei Teilmengen des Kontinuums betrachten wir als verschieden, wenn sie in irgend einem Punkte nicht übereinstimmen. Die *Gesamtheit* aller Teilmengen $T_\mathfrak{c}$ bezeichnen wir mit $\{T_\mathfrak{c}\}$; ihre Mächtigkeit ist (G. Cantor)

$$2^\mathfrak{c} > \mathfrak{c}. \tag{1}$$

Erklärung 2. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Grenzpunkte enthält. Die Gesamtheit der voneinander verschiedenen abgeschlossenen Mengen A bezeichnen wir mit $\{A\}$. Wir behaupten den folgenden Satz:

Satz 1. *Es ist*

$$\{A\} \sim \mathfrak{c}, \tag{2}$$

d. h.: *Die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.**)

Dem Beweise schicken wir die folgenden Hilfssätze voraus.

---

*) Beppo Levi gibt (l. c.) einen Beweis dieses Satzes, bei welchem er unter Benutzung der Maßbestimmung im Kontinuum eine Abbildung von A auf $\mathfrak{c}$ *eindeutig* herstellt, während hier unter alleiniger Benutzung des Ordnungstypus des Kontinuums eine Menge von Abbildungen erhalten werden, unter denen keine ausgezeichnet ist. (Hierüber vgl. F. Bernstein, Bemerkung zur Mengenlehre, Gött. Nachr. 1904, p. 6.)

Hilfssatz 1. Alle abzählbaren Teilmengen B_n eines n-dimensionalen Raumes C_n bilden in ihrer Gesamtheit eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Beweis. Die Mächtigkeit aller Punkte des n-dimensionalen Raumes beträgt nach den bekannten Sätzen $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Die Gesamtheit aller abzählbaren Teilmengen desselben $\{B_n\}$ ist jedenfalls kleiner oder gleich der Menge aller Kombinationen dieser Punkte zu Klassen von $\aleph_0$ Elementen. Nach der Cantorschen Definition des Potenzbegriffes ist also die Kardinalzahl $\overline{\overline{\{B_n\}}}$

$$\overline{\overline{\{B_n\}}} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0};$$

da aber

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

so ist erstens

$$\overline{\overline{\{B_n\}}} \leq \mathfrak{c}.$$

Daß aber andererseits

$$\overline{\overline{\{B_n\}}} \geq \mathfrak{c}$$

ist, erhellt daraus, daß jeder Punkt des $\aleph_0$-dimensionalen Kontinuums für sich genommen eine abzählbare Teilmenge des eindimensionalen Kontinuums repräsentiert, so daß die Anzahl der letzteren sicher die Anzahl $\mathfrak{c}$ der ersteren erreicht. Das Äquivalenztheorem liefert dann die Behauptung

$$\{B_n\} \sim \mathfrak{c}.$$

Erklärung 3. a) Jede abgeschlossene *lineare* Menge ist bestimmt durch die zugehörige Menge punktfreier Intervalle (G. Cantor*)) und b) jede Menge von getrennten Intervallen bestimmt eine abgeschlossene Menge, welche durch die Endpunkte der Intervalle und deren Grenzpunkte gebildet wird.

Hilfssatz 2. Die Gesamtheit aller Mengen, welche aus getrennten Intervallen bestehen, beträgt

$$\overline{\overline{\{I\}}} = \mathfrak{c}.$$

Beweis. Jede Menge, welche aus getrennten Intervallen besteht, ist bekanntlich abzählbar. Das gleiche gilt infolgedessen auch für die Menge der Intervall-Endpunkte.

Werden zwei verschiedene Mengen von getrennten Intervallen durch dieselbe Menge E von Endpunkten bestimmt, so wollen wir sie *zusammengehörig* nennen.

Jedenfalls machen alle durch dieselbe Menge E bestimmten zusammengehörigen Intervallmengen höchstens eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ aus. Denn es gibt eine durch E eindeutig bestimmte Intervallmenge I^*, welche *alle* aneinander grenzenden, durch die Punkte von E getrennten Intervalle enthält. I^* enthält eine *abzählbare* Anzahl von

*) G. Cantor, Acta Math. Bd. 2.

Intervallen, die übrigen Intervallmengen entstehen durch Auslassung von Intervallen, d. h. sie stehen zu I^* in dem Verhältnis von Teilmengen. Ihre Gesamtheit ist daher höchstens $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Die Gesamtheit aller Intervallmengen ist also höchstens $\{E\}\,\mathfrak{c}$.

(9) $$\overline{\overline{\{I\}}} \leq \overline{\overline{\{E\}}}\,\mathfrak{c}.$$

Die Menge E ist eine abzählbare Teilmenge des Kontinuums. Also ist nach Hilfssatz 1

(10) $$\overline{\overline{\{E\}}} \leq \overline{\overline{\{A\}}} \leq \mathfrak{c}.$$

Mithin ist

(11) $$\overline{\overline{\{I\}}} \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}.$$

Ferner ist aber

(12) $$\overline{\overline{\{I\}}} \geq \mathfrak{c}.$$

Denn die kongruente stetige Verschiebung einer Intervallmenge stellt in jeder Lage eine andere Intervallmenge derselben Art dar.

Es folgt also

(13) $$\overline{\overline{\{I\}}} = \mathfrak{c}.$$

Beweis von Satz 1. Nach der Erklärung 3a) und 3b) gehört zu jeder Menge A eine Menge I umkehrbar eindeutig hinzu. Es ist also

$$\overline{\overline{\{A\}}} = \overline{\overline{\{I\}}}.$$

Mithin ist auch

(14) $$\overline{\overline{\{A\}}} = \mathfrak{c}.$$

Folgerung. Die perfekten Mengen, welche für die Analysis von vielfacher Verwendung sind, sind ein Spezialfall der abgeschlossenen Mengen. Es folgt aber für diese sofort

$$\overline{\overline{\{P\}}} \leq \mathfrak{c}.$$

Andererseits ist, wie leicht zu sehen,

$$\overline{\overline{\{P\}}} \geq \mathfrak{c}$$

und somit

$$\overline{\overline{\{P\}}} = \mathfrak{c}.$$

Man kann also jede perfekte Menge durch eine einzige reelle Zahl völlig charakterisieren und ihre Gesamtheit durch die reellen Zahlen abzählen.

Zusatz 1. Der Satz 1 bleibt auch für die abgeschlossenen Mengen im n-dimensionalen Kontinuum gültig.

Um dies zu beweisen, beziehen wir uns auf den von G. Cantor gegebenen Satz.

Hilfssatz 3. Jede abgeschlossene Menge im C_n läßt sich als Ableitung einer abzählbaren Menge auffassen.

Jede Menge bestimmt ihre Ableitung eindeutig. Die Gesamtheit der Ableitungen der abzählbaren Mengen ist daher kleiner oder gleich der Gesamtheit $\mathfrak{c}$ derselben.

Also ist auch

$$\overline{\overline{\{A_n\}}} \leq \mathfrak{c}.$$

Und da nach Satz 1 die linearen Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben, so ist auch

$$\overline{\overline{\{A_n\}}} \geq \mathfrak{c}.$$

Mithin ist

$$\overline{\overline{\{A_n\}}} = \mathfrak{c}.$$

§ 11.

Die Mengen erster und zweiter Kategorie.

Es werden für die Mengen erster und zweiter Kategorie (Baire*)) zweckmäßig folgende Definitionen gegeben:

Erklärung 1. Sind $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu, \cdots$ nirgends dichte Mengen und ist das kleinste gemeinschaftliche Multiplum $\mathfrak{M}(Q_\nu)$ derselben eine überall dichte Menge, so heißt $\mathfrak{M}(Q_\nu)$ eine Menge erster Kategorie.

Ist R die Komplementärmenge zu $\mathfrak{M}(Q_\nu)$, so soll R als eine Menge zweiter Kategorie bezeichnet werden.

Die Begriffe „überall dicht, nirgends dicht, Komplementärmenge“ beziehen sich hier auf das Kontinuum. Legt man an Stelle desselben eine perfekte oder abgeschlossene Menge zugrunde, so wird man zu entsprechenden Begriffen geführt.

Erklärung 2. Für Mächtigkeitsuntersuchungen ist es zweckmäßig, von den Mengen Q_ν noch das *Abgeschlossensein* zu fordern. Man bezeichne die so entstehenden Mengen erster resp. zweiter Kategorie als *geschlossen.*

Baire hat bewiesen, daß die Mengen zweiter Kategorie stets die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben. Die geschlossenen Mengen erster Kategorie haben offenbar stets die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder $\mathfrak{c}$.

Satz 1. Die Gesamtheit aller *geschlossenen* Mengen erster resp. zweiter Kategorie bildet eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Beweis. Wir bezeichnen die fragliche Gesamtheit mit $\{K_1\}$. Zu jeder Menge erster Kategorie gibt es eine sie definierende einfach unendliche Reihe abgeschlossener Mengen Q_ν. Es ist daher $\{K_1\}$ kleiner oder gleich der Gesamtheit aller einfach unendlichen Reihen aus abgeschlossenen Mengen. Alle Kombinationen zu je $\aleph_0$ Elementen aus abgeschlossenen Mengen bilden eine Menge von der Mächtigkeit

$$\overline{\overline{\{A\}}}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Es ist mithin

$$\{K_1\} \leq \mathfrak{c}.$$

*) Baire, Ann. di mat. Bd. 3 (1899), S. 67.

Daß aber $\{K_1\}$ nicht kleiner ist als $\mathfrak{c}$, folgt sehr leicht, wenn man bedenkt, daß kongruente Verschiebung einer Menge erster Kategorie in jeder Lage eine Menge erster Kategorie darstellt. Es ist also

$$\overline{\{K_1\}} = \mathfrak{c}.$$

Die Verallgemeinerung des Satzes 1 auf beliebige abgeschlossene Mengen vollzieht sich in der folgenden Weise.

Erklärung 3. Eine Menge Q heißt *nirgends dicht* in bezug auf eine abgeschlossene Menge P, wenn sie eine Teilmenge derselben ist und es kein Intervall der Menge P gibt, in welchem P und Q identisch sind. Sie heißt *überall dicht* in bezug auf P, wenn jedes Element von P der Menge Q oder ihrer Ableitung angehört. Sie heißt *abgeschlossen* in bezug auf P, wenn sie ihre in P liegende Ableitung enthält.

Satz 2. Die Gesamtheit aller geschlossenen Mengen erster resp. zweiter Kategorie in bezug auf eine abgeschlossene Menge bilden eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Faßt man nun die Gesamtheit aller Mengen erster und zweiter Kategorie ins Auge, gleichgültig in welchen (abgeschlossenen) Mengen sie definiert sind, so sieht man:

Satz 3. *Die Gesamtheit aller Mengen K_1 ist* $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.*)

§ 12.

Das Ultrakontinuum.

Es handelt sich im folgenden zunächst um die Konstruktion einer Menge, welche dieselbe Mächtigkeit wie das Kontinuum, aber einen anderen Ordnungstypus besitzt. Zuvor leite ich einen Satz über alle Aleph mit endlichem Index ab.

Satz 1. *Es ist*

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu,$$

wo ν und μ endliche Indizes bedeuten.

Dem Beweise stelle ich die Hilfssätze voran:

Hilfssatz 1. Es sei n eine ganze endliche Zahl, so ist

$$\aleph^n = \aleph$$

für jedes Aleph.

Den Beweis des Satzes, den ich aus mündlicher Mitteilung von G. Cantor kenne, führt man analog wie im einfachsten Falle $\aleph = \aleph_0$ durch Verwandlung *einer Doppelreihe in eine einfache Reihe.* Man benutzt

*) Es ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 3, daß auch alle einfach unendlichen Summen aus Mengen zweiter Kategorie, die geschlossen sind, eine Menge von der Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ ausmachen. Ein von anderer Seite ausgesprochener Satz, der diesem Resultat widerstreitet, ist seitdem zurückgezogen.

dabei die aus den Zahlen der Zahlenklasse, welche die Mächtigkeit $\aleph$ darstellt, gebildete Folge.

Hilfssatz 2. Sind M und N irgend welche Mengen, so ist

$$\Sigma M \cdot n = M \Sigma n \quad \text{(wo } n \text{ alle Elemente von } N \text{ durchläuft).}$$

Hilfssatz 3. Ist

$$\aleph_\mu \geqq \aleph_\nu,$$

so ist

$$\aleph_\mu \cdot \aleph_\nu = \aleph_\mu . \tag{3}$$

Dieser Satz folgt aus Hilfssatz 1 und dem Äquivalenzsatz; denn es ist

$$\aleph_\mu \aleph_\nu \geqq \aleph_\mu$$

und

$$\aleph_\mu \aleph_\nu \leqq \aleph_\mu^2 = \aleph_\mu .$$

Wir unterscheiden bei dem Beweise des Satzes 1 zwei Fälle. Erstens sei

$$\aleph_\nu \geqq \aleph_\mu . \tag{4}$$

Dann ist auch

$$2^{\aleph_\nu} > \aleph_\mu , \tag{5}$$

also

$$(2^{\aleph_\nu})^{\aleph_\nu} \geqq \aleph_\mu^{\aleph_\nu} .$$

Nach den Gesetzen für die Potenzen der Mengen und nach Hilfssatz 1 ist also

$$2^{\aleph_\nu} \geqq \aleph_\mu^{\aleph_\nu} .$$

Also ist, da auch

$$2^{\aleph_\nu} \leqq \aleph_\mu^{\aleph_\nu} ,$$

$$2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu} .\text{*)} \tag{6}$$

Die Multiplikation mit $\aleph_\mu$ liefert dann

$$\aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu} .$$

Nunmehr sei zweitens

$$\aleph_\mu > \aleph_\nu . \tag{7}$$

Es durchlaufe α_μ alle Zahlen der Klasse $\{\alpha_\mu\}$ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Versteht man unter $\overline{\alpha}_\mu$ die zu α_μ gehörige Kardinalzahl, so ist jedenfalls

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} \leqq \sum_{\alpha_\mu} \overline{\alpha}_\mu^{\aleph_\nu} . \tag{8}$$

*) Man bemerkt, daß diese Ableitung auch für beliebige Aleph gültig ist, so daß stets aus

$$\aleph_\nu \geqq \aleph_\mu ,$$

$$2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu}$$

folgt, was auch ν und μ für Indizes sein mögen. In einer interessanten Arbeit: On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates (Philos. Mag. VII. 6. Serie (1904), p. 61—74 u. 294—302) hat Herr Ph. Jourdain den gleichen Satz gefunden. Dagegen ist der Satz 1 nicht, wie ich ursprünglich angenommen hatte, für beliebige Aleph beweisbar.

Denn jede Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\nu$, gebildet aus den Elementen von $\aleph_\mu$, befindet sich, gemäß der Gleichung 7, in einem *Abschnitt* der wohlgeordneten Menge von Zahlen $\{\alpha_\mu\}$. Die Menge rechts ist aber offenbar äquivalent der Gesamtheit *aller* Teilmengen *aller* Abschnitte von $\{\alpha_\mu\}$. Es kommt daher jede der links stehenden Teilmengen auch rechts vor.

Wir nehmen nun an, der Satz 1 sei für alle $\aleph_\lambda < \aleph_\mu$ bereits bewiesen. Dann folgt nach dem Bemerkten sofort

$$\bar{\alpha}_\mu^{\aleph_\nu} = \bar{\alpha}_\mu 2^{\aleph_\nu}.$$

Hierdurch verwandelt sich (8) in

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \sum \bar{\alpha}_\mu 2^{\aleph_\nu}. \tag{9}$$

Nach Hilfssatz 2 folgt hieraus

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \cdot \sum \bar{\alpha}_\mu.$$

Es ist nun

$$\sum_{\alpha_\mu} \bar{\alpha}_\mu = \aleph_\mu.$$

Denn ersetzt man $\bar{\alpha}_\mu$ durch $\aleph_\mu$, so entsteht offenbar $\aleph_\mu^2$, welches gleich $\aleph_\mu$ ist. Hieraus erhellt unter Berücksichtigung der Definition von $\aleph_\mu$ sofort das Behauptete. Demgemäß gewinnen wir das Resultat

$$2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu = \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Wir werden hier nur von dem speziellen Falle des Satzes $\aleph_\nu = \aleph_0$, $\aleph_\mu = \aleph_1$ Gebrauch machen. Derselbe wurde jedoch allgemein bewiesen, um die Möglichkeit der Verallgemeinerung der hier bewiesenen Sätze auf höhere Aleph zu zeigen.

Wir treffen die folgenden Festsetzungen:

Erklärung 1. Sei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ eine einfach unendliche Menge von Zahlen der zweiten Zahlklasse. Wir setzen als Element einer Menge X_u

$$x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots]. \tag{10}$$

Sind x und x' zwei Elemente der Menge, so heiße x größer als x', wenn für ein ungerades n

$$\alpha_1 = \alpha_1',$$
$$\alpha_2 = \alpha_2',$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}',$$

dagegen

$$\alpha_n > \alpha_n'$$

ist. Ist n gerade, so heiße $x < x'$. Offenbar ist entweder x größer oder kleiner oder gleich x'.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort, daß aus

$$x_1 > x_2 \quad \text{und} \quad x_2 > x_3$$

folgt

$$x_1 > x_3 .$$

Damit ist die Menge X_u als eine *einfach geordnete* charakterisiert.

Sind $x_1, x_2, \cdots$ eine einfach unendliche Reihe ständig wachsender (oder abnehmender) Elemente, und nennen wir ein Element x, welches größer ist als alle diese und unter all den größeren Elementen selbst das kleinste ist, den Limes von $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, so können wir den Satz beweisen:

Jede einfach unendliche Folge von ständig wachsenden Elementen hat einen Limes.

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft der Zahlen der zweiten Zahlenklasse, daß je einfach unendlich viele derselben *ein* Grenzelement bestimmen.

Es sei

$$x_n = (\alpha_1^{(n)}, \ \alpha_2^{(n)}, \cdots)$$

gesetzt. Da die $\alpha_1^{(n)}$ wachsen, so sind sie entweder von einem gewissen n ab alle gleich α_1 oder sie haben einen von ihnen selbst verschiedenen Limes α_1. Im *zweiten* Falle setzen wir

$$\lim_{n=\infty} x_n = x = (\alpha_1, \ 0,0 \cdots), \ \alpha_1 = \lim_{n=\infty} \alpha_1^{(n)}.$$

Im ersten Falle bestimmen wir α_2 auf dieselbe Weise aus $\alpha_2^{(n)} \cdots$ usw.

Es ist dann $x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ der Limes von x_n.

Erklärung 2. Eine Teilmenge der Menge X_u ist offenbar die Menge der Zahlen x, welche nur eine endliche Anzahl von Zahlen α, im übrigen aber Nullen enthalten. Wir bezeichnen sie mit R_u und nennen die Zahlen die *ultrarationalen* Zahlen.

Es ist offenbar, daß zwischen je zwei Elementen der Menge X_u Elemente von R_u liegen. In bezug auf R_u gilt der Satz:

Satz 2. Es ist

$$\overline{\overline{R}}_u = \aleph_1 .$$

Beweis. Offenbar ist

$$\overline{\overline{R}}_u \equiv \aleph_0 \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_1^n ,$$

da jedes Element r_u von R_u eine Kombination von einer endlichen Anzahl n von Elementen aus $\aleph_1$ darstellt, die sich auf $\aleph_0$ verschiedene Weisen auf die Stellen von r_u verteilen kann.

Da

$$\aleph_1^n = \aleph_1$$

ist, so erhalten wir

$$\bar{R}_u = \aleph_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_1 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 .$$

Satz 3. Es ist

$$\bar{\bar{X}}_u = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} .$$

Beweis. Offenbar ist

$$\bar{\bar{X}}_u = \aleph_1^{\aleph_0} ,$$

da jede einfach unendliche Kombination von Zahlen aus $\aleph_1$ eine Zahl von X_u liefert. Es ist aber nach Satz 1

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 2^{\aleph_0} .$$

Die Ungleichung

$$2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$$

liefert, wenn man sie mit $2^{\aleph_0}$ multipliziert,

$$2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^2 \geq \aleph_1 2^{\aleph_0} ,$$

woraus sofort

$$\aleph_1 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

und die Behauptung

$$\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \bar{\bar{X}}_u$$

folgt.

Die nähere Bestimmung des Ordnungstypus Θ_u der Menge X_u, welche wir als *Ultrakontinuum* bezeichnen, hat darum ein besonderes Interesse, weil es wahrscheinlich ist, daß es nur zwei völlig homogene Ordnungstypen einfach geordneter perfekter Mengen gibt, die von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ sind, nämlich das Kontinuum und das Ultrakontinuum.

Erklärung 3. Sei T eine Teilmenge von X_u. Unter der Ableitung T' von T verstehe ich die Menge der Grenzelemente von T.

Erklärung 4. Ist T' enthalten in T, so nenne ich T, wie üblich, *abgeschlossen*; ist $T \equiv T'$, *perfekt*.

Satz 4. Jede perfekte Menge P_u ist von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Ich kann den Beweis hier nur andeuten. Er beruht auf dem folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 4. Jede Menge in X_u, von der kein Element Grenzelement der übrigen ist, hat die Mächtigkeit $\aleph_1$, oder sie ist abzählbar.

Denn sie definiert eine mit ihr äquivalente Menge von aneinandergrenzenden Intervallen. In dem Innern derselben liegt mindestens *ein* ultrarationales Element. Also ist sie höchstens von der Mächtigkeit der letzteren, $\aleph_1$. Andererseits gibt es wirklich derartige Mengen von dieser Mächtigkeit, z. B. die Menge der ganzen ultrarationalen Zahlen erster Art.

Der Satz 4 kann nunmehr ganz analog bewiesen werden, wie im

Kontinuum der reellen Zahlen der entsprechende Satz. Ebenso ergibt sich das Theorem

Satz 5. Jede abgeschlossene Menge A_u ist entweder abzählbar, von der Mächtigkeit $\aleph_1$ oder von der des Kontinuums.

Derjenige Satz, welcher uns in diesem Zusammenhange am meisten interessiert, lautet:

Satz 6. Die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen $\{A_u\}$ ist von der Mächtigkeit $2^{\aleph_1}$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich durch Betrachtung der Intervallmenge J_u, welche die abgeschlossene Menge völlig bestimmt.

Unter Anwendung des Hilfssatzes 4 gelangen wir dazu, die Gesamtheit der Intervallmengen $\{J_u\}$ mit der Gesamtheit aller Teilmengen des Ultrakontinuums X_u von $\aleph_1$ Elementen in Beziehung zu setzen. Die letztere hat die Mächtigkeit

$$\overline{X}_u^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \aleph_1} = 2^{\aleph_1}.$$

Es folgt durch leichte Betrachtung hieraus

$$\overline{\overline{\{A_u\}}} \leq 2^{\aleph_1}.$$

Daß aber

$$\overline{\overline{\{A_u\}}} \geq 2^{\aleph_1}$$

ist, sieht man sofort, wenn man bedenkt, daß jede Teilmenge der Zahlen a erster Art durch Hinzunahme geeigneter Zahlen zweiter Art zu einer abgeschlossenen Menge wird, und daß jede solche vervollständigte Teilmenge der Menge R_u angehört, also auch eine Teilmenge A_u von X_u darstellt.

Da das Ultrakontinuum die Mächtigkeit des Kontinuums hat, so existiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung Φ, welche das Ultrakontinuum auf das Kontinuum abbildet.

Jede Menge A_u geht dabei in eine — im allgemeinen nicht abgeschlossene — Menge von reellen Zahlen über. Für diese gilt natürlich ebenfalls der Satz 5. Es ist also dann die Frage nach der Mächtigkeit derselben beantwortbar.

Ist, wie zu vermuten steht, $2^{\aleph_1}$ größer als $2^{\aleph_0}$, so wäre damit die Klassifikation nach Mächtigkeiten für ein größeres Gebiet von Mengen entschieden, als dies bisher möglich war.