Zum Kontinuumproblem.

Von

Felix Bernstein in Halle a./S.

In einem Aufsatz betitelt „Zum Kontinuumproblem“ (Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904, abgedruckt Math. Ann. Bd. 60, Heft 2, p. 177—180) bringt Herr König im Anschluß an seinen Heidelberger Vortrag einen von mir gelegentlich ausgesprochenen Satz in Beziehung zu dem Kontinuumproblem, was mich veranlaßt, an gleicher Stelle meinerseits den Sachverhalt darzulegen. Herr König schreibt:

„Herr Bernstein hat den allgemeinen Satz

$$\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x \cdot 2^{\aleph_0}$$

aufgestellt, aus dem, wenn man voraussetzt, daß das Kontinuum irgend einer wohlgeordneten Menge A_μ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$ äquivalent ist, und $\aleph_x = \aleph_{\mu+\omega}$ gesetzt wird,

$$\aleph_{\mu+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+\omega} \cdot \aleph_\mu = \aleph_{\mu+\omega}$$

folgen würde. Die Annahme, daß das Kontinuum einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, wäre also gewiß falsch, wenn der Bernsteinsche Satz allgemein richtig wäre. Leider hat jedoch dessen Beweis eine wesentliche Lücke, da für $\aleph_\omega$ und jede der oben betrachteten singulären wohlgeordneten Mengen die Annahme, daß jede abzählbare Teilmenge in einem Abschnitt der ganzen Menge liegt, nicht mehr statthaft ist.

Ich erwähne dies vor allem, um den Schluß, den ich in meinem Kongreßvortrage unter Annahme der Richtigkeit des Bernsteinschen Satzes aus diesem zog, ausdrücklich zurückzunehmen.

Doch glaube ich, daß die Sache noch außer der historischen Treue ein größeres Interesse bietet . . .“

Hierzu ist folgendes hinzuzufügen:

1. In dem letzten Paragraphen meiner Dissertation, welcher das *Ultrakontinuum* zum Gegenstand hat, habe ich in meiner Hilfsbetrachtung die Gleichung

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\nu}$$

aufgestellt. Ich bemerke dazu ausdrücklich:

„Wir werden hier nur von dem speziellen Falle des Satzes $\aleph_\nu = \aleph_0$, $\aleph_\mu = \aleph_1$ Gebrauch machen.“

Nun gilt der Satz, sowie der von mir gegebene Beweis überdies für alle endlichen μ und ν, so daß die Resultate der Dissertation, welche sich auf diesen Satz stützen, durchaus gültig bleiben.

2. Völlig allgemeingültig ist der erste Teil des Beweises, in dem $\nu \geqq \mu$ vorausgesetzt ist, so daß der Satz besteht:

Es ist

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \quad (\aleph_\nu \geqq \aleph_\mu > 1).$$

Dies hat unabhängig von mir später Herr Ph. Jourdain (On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates, Philos. Mag., Vol. VII, Sixth Ser., p. 61 und 294) wiedergefunden. Er gibt sogar noch eine erweiterte Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichung. — Die Schlußweise, welche ich für den Fall $\mu > \nu$ angewandt habe, versagt aber, wenn die Zahl ν keinen Vorgänger besitzt.*)

3. Um daher das Gesagte, soweit es meine Sache betrifft, zusammenzufassen:

Es ist in einer Hilfsbetrachtung ein an sich richtiger Satz, der richtig bewiesen und richtig angewendet ist, von mir versehentlich in einem zu weiten Umfang ausgesprochen worden, ohne daß irgend eine weitere Anwendung von ihm gemacht worden wäre, oder daß irgend ein weiterer Irrtum daraus entstanden wäre.

4. Herr König hat nun den in Rede stehenden Satz zur Grundlage von weittragenden Schlüssen gemacht, die eine prinzipielle Bedeutung beanspruchen. Darin liegt der wesentliche Unterschied seiner Verwendung des Satzes von der meinen. Es ist übrigens wenig wahrscheinlich, daß das Kontinuumproblem mit den bisher entwickelten Begriffen und Methoden gelöst werden kann.

---

*) Auf freundliches Anraten des Herausgebers dieser Zeitschrift, Herrn Prof. Hilbert, wollte ich ursprünglich das Versehen nur in dem demnächst in diesen Annalen erscheinenden Wiederabdruck der Dissertation berichtigen. Herrn Königs Publikation aber hat mich veranlaßt, mich ausdrücklich zu der Sache zu erklären.