

Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder.

Von

OTTO BLUMENTHAL in Aachen.

Ein wichtiger Satz der mathematischen Physik besagt, daß ein überall endliches und stetiges, im Unendlichen verschwindendes Vektorfeld sich stets in zwei einfache Komponenten, ein wirbelfreies (lamellares) und ein quellenfreies (solenoidales) Feld, zerlegen läßt.*)

Trotzdem dieser Satz in mannigfacher Weise angewandt wird, scheint er doch noch nicht allgemein bewiesen zu sein. Die mir bekannten Beweise setzen nämlich sämtlich eine spezielle Art des Verschwindens im Unendlichen voraus: es wird entweder vorausgesetzt, daß das Feld außerhalb einer endlichen Fläche überhaupt weder Quellen noch Wirbel besitze (Abraham-Föppl), oder, daß es im Unendlichen verschwinde wie $\frac{1}{r^2}$ (Math. Enc. IV (2) 14, p. 18). In der Tat werden zu dem Beweise des Satzes über den ganzen Raum erstreckte Integrale

$$\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}}{r} d\tau, \quad \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{u}}{r} d\tau$$

benutzt, deren Existenz nur dann feststeht, wenn das Feld \mathbf{u} im Unendlichen eine der beiden angegebenen Bedingungen erfüllt.

Derartige Annahmen über die *Ordnung* des Verschwindens aber sind außerordentlich beschränkend und besonders auch deshalb unzulässig, weil bei einem z. B. durch Differentialgleichungen definierten Felde a priori nichts über die *Ordnung des Verschwindens* ausgesagt werden kann. Wohl aber läßt sich in der Regel durch allgemeine, besonders energetische, Betrachtungen die *bloße Tatsache des Verschwindens* im Unendlichen ohne Angabe der *Ordnung* feststellen. Ich weise z. B. darauf hin, daß die Maxwellschen Vektoren des elektrodynamischen Feldes im freien Äther

*) Vergl. z. B. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, I, pg. 189—191; Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität, I, pg. 98—99; Math. Enc. IV (2) 14 (Abraham), pg. 19.

Komponenten der Form $\frac{\sin r}{r}$ besitzen und daher im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{r}$, nicht $\frac{1}{r^2}$ verschwinden. Auf derartige Vektoren wäre also der Satz in seiner bisherigen Ausdehnung bereits nicht anwendbar.

Im folgenden gebe ich einen allgemeingültigen Beweis des Satzes, welcher nur die Annahmen benutzt, daß das Feld und seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden. Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung der oben angegebenen Integrale.

Dabei ergibt sich aber eine bemerkenswerte neue Tatsache: Während nämlich in den bisher betrachteten Fällen die beiden komponierenden Felder gleichfalls im Unendlichen verschwinden, besteht diese Eigenschaft im allgemeinen Falle nicht mehr. Hier werden vielmehr im allgemeinen die komponierenden Felder im Unendlichen selbst unendlich, aber nur von einer bestimmten niedrigen Maximalordnung. Ich gebe ein Beispiel eines allen Bedingungen genügenden Feldes u , dessen komponierende Felder dieses unerwartete Verhalten zeigen.

Die Methoden sind solche der Potentialtheorie. Zur Abkürzung aber benutze ich die Schreibweise der Vektor-Analyse, wobei ich Vektoren durch fetten Druck (\mathbf{v}) anzeige und mich im übrigen der Bezeichnungsweise des physikalischen Bandes (V) der Mathematischen Encyclopädie anschließe (Math. Enc. V (2) 13, pg. 71—72).

a. Stellung des Problems. Eindeutigkeitsbeweis.

1. Der zu beweisende Satz lautet folgendermaßen:

Sei u ein Vektor, der nebst beliebig vielen Ableitungen überall endlich und stetig ist und im Unendlichen nebst diesen Ableitungen verschwindet; alsdann läßt sich der Vektor stets in zwei Vektoren, einen wirbelfreien v und einen quellenfreien w zerlegen, so daß

$$(1) \quad u = v + w.$$

Die Vektoren v, w werden im Unendlichen unendlich von geringerer Ordnung als $\lg r$.)*

Dazu tritt der folgende *Eindeutigkeitssatz*:

Durch die angegebenen Eigenschaften sind v und w bis auf eine additive vektorielle Konstante bestimmt.

2. Der Beweis des *Eindeutigkeitssatzes* wird mit der Greenschen Methode geführt. Seien nämlich v und v_1 zwei wirbelfreie Vektoren, deren Quellen gegeben sind durch

*) Bei dem Beweise wird nur vorausgesetzt, daß die ersten Ableitungen im Unendlichen verschwinden und überall differenzierbar sind.

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_1 = \operatorname{div} u,$$

so ist der Differenzvektor

$$V = v - v_1$$

überall quellen- und wirbellos und wird im Unendlichen von geringerer Ordnung als $\lg r$ unendlich. Beschreiben wir also um den Punkt P , für welchen V berechnet werden soll, eine Kugel K von genügend großem Radius R und bezeichnen mit

$$V = \int (V \cdot dr)$$

das zu V gehörige Potential, so folgt nach dem Greenschen Satze

$$V = \operatorname{grad}_P V = \frac{1}{4\pi} \int_K \left[(V \cdot n) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} - V \operatorname{grad}_P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] d\sigma,$$

wo n die positive Einheitsnormale bedeutet.*) Diese Formel gestattet selbst noch keine Schlüsse auf V ; differenziere ich sie aber nach einer beliebigen Richtung h , so folgt

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{4\pi} \int_K \left[(V \cdot n) \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} - V \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Führt man die Differentiationen aus, so findet man durch einfache Rechnungen für die Punkte der Kugel K die Ungleichungen

$$\left| \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \right| < \frac{A}{R^3}, \quad \left| \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| = \left| -\frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r^2} \right| < \frac{A}{R^4}, \quad (A \text{ eine Konstante}).$$

$$(V \cdot n) < \lg R, \quad |V| < R \lg R.$$

Daher wird

$$\left| \frac{dV}{dh} \right| < 2A \frac{\lg R}{R};$$

d. h. aber:

$$\frac{dV}{dh} = 0, \quad V = \text{vektorielle Konstante.}$$

Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen**).

*) Da $\frac{1}{r}$ von dem Pol $P=(xyz)$ und dem Aufpunkt $Q=(\xi\eta\zeta)$ abhängt, so werden die Differentiationen nach beiden Punkten durch Indizes unterschieden:

$$\operatorname{grad}_P = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}_Q = \frac{\partial}{\partial \xi} i + \frac{\partial}{\partial \eta} j + \frac{\partial}{\partial \zeta} k.$$

Es ist übrigens natürlich $\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}$.

**) Ein Spezialfall des Eindeutigkeitssatzes hat in der Potentialtheorie Inter-

b. Existenz des wirbelfreien Feldes.

3. Um den Hauptsatz zu beweisen, bilde ich zunächst den wirbelfreien Vektor v , der in seinem Quellenfeld mit u übereinstimmt. Die hier gebrauchte Art der Konstruktion durch ein bestimmtes Integral schließt sich eng an die allgemein angewandte an (siehe Einleitung), unterscheidet sich aber von ihr durch ein additives, konvergenz-erzeugendes Glied, ähnlich wie es in der Reihentheorie bei dem Mittag-Lefflerschen Satz eingeführt wird. Ich fixiere nämlich einen beliebigen Punkt O des Raumes und bezeichne den Abstand eines Punktes Q von diesem Punkte mit r_0 . Dann behaupte ich:

Das Integral über den unendlichen Raum

$$\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau$$

ist konvergent und stellt einen wirbelfreien Vektor v mit

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} u$$

dar.

Um Wiederholungen zu vermeiden, beweise ich ausführlich nur die Konvergenz, die Beweise der beiden anderen Behauptungen will ich, nur kurz skizziert, vorwegnehmen.

Man betrachte dazu irgend einen Differentialquotienten $\frac{dv}{dh}$. Um ihn zu berechnen, lege man um den Punkt P eine geschlossene beliebig kleine Fläche f , deren Inneres — mit einer im folgenden festgehaltenen Bezeichnung — mit (f) ; deren Äußeres mit $[f]$ bezeichnet werde. Dann ist

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dh} \int_{(f)} \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dh} \int_{[f]} \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau,$$

von dem letzten Integral zeigt man leicht, daß es mit

$$\frac{1}{4\pi} \int_{[f]} \operatorname{div} u \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} d\tau$$

übereinstimmt. Die Konvergenz dieses Integrales aber läßt sich nach den Methoden der nächsten Nummer erweisen.

esse. Wir erhalten nämlich, wenn V im Unendlichen verschwindet, den Satz: Wenn die 1. Differentialquotienten einer Potentialfunktion im Unendlichen verschwinden, so ist die Funktion eine Konstante.

Wenden wir also die Prozesse div und rot auf v an, so kommt, wegen

$$\text{div grad}_Q \frac{1}{r} = -\Delta \frac{1}{r} = 0, \quad \text{rot grad}_Q \frac{1}{r} = 0,$$

in bekannter Weise

$$\begin{aligned} \text{div } v &= \frac{1}{4\pi} \text{div} \int_{(f)} \text{div } u \text{ grad}_Q \frac{1}{r} d\tau, \quad \text{rot } v = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_{(f)} \text{div } u \text{ grad}_Q \frac{1}{r} d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{rot grad} \int_{(f)} \text{div } u \frac{1}{r} d\tau = 0. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für $\text{div } v$ läßt sich aber jetzt, wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $\text{div } u$, nach den gewöhnlichen Methoden der Potentialtheorie (mit Hilfe einer partiellen Integration*) berechnen und liefert, wie verlangt,

$$\text{div } v = \text{div } u.$$

Damit ist also das Zutreffen der Quellen- und Wirbelbedingung für unseren Vektor erwiesen.

4. Es bleibt noch zu liefern der *Beweis für die Existenz* des über den ganzen Raum erstreckten Integrals

$$(2) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int \text{div } u \left[\text{grad}_Q \frac{1}{r} - \text{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau = \frac{1}{4\pi} \int \text{div } u \text{ grad}_Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\tau.$$

Wir verfahren folgendermaßen. Der Abstand OP des Poles von O werde mit ϱ bezeichnet und um O eine Kugel K beschrieben, auf welcher und in deren Äußerem überall $|u| < \varepsilon$ ist. Der Punkt P soll im Inneren dieser Kugel liegen; wir werden speziell festsetzen, daß der Radius $R \geq \varrho^2$ sein soll. Wir beweisen jetzt, daß

$$\int_{[K]} \text{div } u \left[\text{grad}_Q \frac{1}{r} - \text{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau$$

durch genügend große Wahl des Radius unter jede Grenze herabgedrückt werden kann, damit ist dann die Existenz des Integrals erwiesen.

Wir beschreiben im Raume $[K]$ eine beliebige geschlossene Fläche F , welche aus einer endlichen Anzahl von analytischen Flächenstücken besteht. F soll die Kugel K umgeben, kann aber auch teilweise mit K zusammenfallen. Mit C bezeichnen wir den zwischen K und F eingeschlossenen Raum. Der zu führende Beweis wird alsdann erbracht sein, wenn gezeigt wird, daß

*) Siehe z. B. Dirichlet-Grube, Vorlesungen über Potentialtheorie, p. 18 ff. Vergl. besonders auch O. Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie (Diss. Tübingen 1882, pg. 9—19).

$$\left| \int_C \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau \right| < \eta(R),$$

wo $\eta(R)$ von der Wahl von F unabhängig ist und mit zunehmendem R gegen 0 geht. Das aber ergibt sich aus dem Greenschen Satze.

Zur Abkürzung werde

$$\frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right) = G(Q)$$

gesetzt. Dann ist nach dem Greenschen Satze

$$(3) \quad \int_C \operatorname{div} u G d\tau = \int_F (u \cdot n) G d\sigma - \int_K (u \cdot n) G d\sigma - \int_C \left(u_\xi \frac{\partial G}{\partial \xi} + u_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + u_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) d\tau.$$

Hier bedeuten u_ξ, u_η, u_ζ die Komponenten von u .

Wir geben zuerst die Abschätzung des Raumintegrals und können uns dabei auf die Betrachtung des ersten Gliedes des Integranden beschränken. In Komponenten zerlegt, ist

$$(4) \quad 4\pi G = -i \left(\frac{\xi - x}{r^3} - \frac{\xi}{r_0^3} \right) - j \left(\frac{\eta - y}{r^3} - \frac{\eta}{r_0^3} \right) - k \left(\frac{\zeta - z}{r^3} - \frac{\zeta}{r_0^3} \right),$$

$$(5) \quad 4\pi \frac{\partial G}{\partial \xi} = -i \left(\left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right\} - 3 \left\{ \frac{(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{\xi^2}{r_0^5} \right\} \right) + 3j \left(\frac{(\xi - x)(\eta - y)}{r^5} - \frac{\xi\eta}{r_0^5} \right) + 3k \left(\frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{r^5} - \frac{\xi\zeta}{r_0^5} \right).$$

Man sieht, daß jede der Komponenten (bis auf einen konstanten Faktor) dem absoluten Betrag nach kleiner ist als

$$\left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| + \frac{A\varrho}{r^4},$$

wo A eine Konstante ist, die leicht genauer abgeschätzt werden kann.

Da ferner für alle Punkte Q des Raumes C die Ungleichung $\varrho < r_0^{\frac{1}{2}}$ gilt, so kann nach dem Kosinussatz

$$r = r_0 \left(1 + \frac{\alpha}{r_0^{\frac{1}{2}}} \right), \quad -2 < \alpha < +2$$

gesetzt werden. Daraus folgt

$$\left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| < \frac{\alpha'}{r_0^{3+\frac{1}{2}}}, \quad \frac{A\varrho}{r^4} < \frac{A'}{r_0^{3+\frac{1}{2}}},$$

und die analoge Ungleichung gilt also für $\left| \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|$. Daraus aber folgt für das Raumintegral auf der rechten Seite von (3) bei Einführung von Polarkoordinaten r_0, ϑ, φ die Abschätzung

$$(6) \quad < B\varepsilon \int_R \frac{dr_0}{r_0^{\frac{3}{2}}} < 2B\varepsilon \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}},$$

das Integral wird also für alle Lagen der Fläche F mit wachsendem R beliebig klein.

Einfacher ist die Ableitung der gleichen Tatsache für die Flächenintegrale. Wir ziehen aus (4), in derselben Weise wie oben, den Schluß, daß die Komponenten von G

$$< \frac{\beta}{r_0^{2+\frac{1}{2}}}$$

sind. Führe ich ferner das Flächenelement in Polarkoordinaten ein

$$do^2 = r^4 \sin^2 \vartheta d\vartheta^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 dr^2 + r^2 dr^2 d\vartheta^2,$$

so folgt auch für die Flächenintegrale eine Ungleichung der Form (6). Somit ergibt sich endgültig

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \operatorname{div} u G d\tau \right| < \frac{\varepsilon'}{R^{\frac{1}{2}}} < \eta(R),$$

was zu beweisen war. Die Existenz des Vektors v ist damit erwiesen.

Daneben brauchen wir weiterhin die Abschätzung des Integrals $\int_{[K_1]} \operatorname{div} u G d\tau$, erstreckt über den Außenraum einer Kugel K_1 von dem

Radius $R = \varrho \lg^2 \varrho$. Unsere bisherige Methode kann ohne Änderung angewandt werden und liefert, weil $\varrho < \frac{r_0}{\lg r_0 - \lg \lg r_0}$, die Abschätzung

$$\left| \int_{[K_1]} \operatorname{div} u G d\tau \right| < \frac{\varepsilon'}{\lg R} < \frac{\varepsilon'}{\lg \varrho}.$$

Durch Integration läßt sich jetzt auch das zu v gehörige Potential v finden. Es folgt:

$$(7) \quad v = \int (v \cdot d\varrho) = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \left(\varrho \cdot \operatorname{grad}_{\varrho} \frac{1}{r_0} \right) \right\} d\tau.$$

Die konvergenz-erzeugenden Zusatzglieder treten hier besonders deutlich hervor.

c. Das wirbelfreie Feld im Unendlichen. Beispiel.

5. Nachdem der Nachweis für die Existenz des Vektors v erbracht ist, stellen wir vor allen Dingen die Frage nach seinem Verhalten im Unendlichen. Wir zeigen:

v wächst mit zunehmendem ϱ schwächer als $\lg \varrho$.

Ich zeige andererseits am Beispiel, daß das Wachstum der aufgestellten oberen Grenze beliebig nahe kommen kann.

In Rücksicht auf dieses Beispiel werde ich bei dem Beweise des an-

geführten Satzes die Genauigkeit der Abschätzungen etwas weiter treiben, als es für den unmittelbaren Zweck nötig ist.

6. Wir beschreiben zunächst um die beiden Punkte O und P Kugeln c_0 und c von dem Radius 1. Das Innere beider Kugeln liefert alsdann

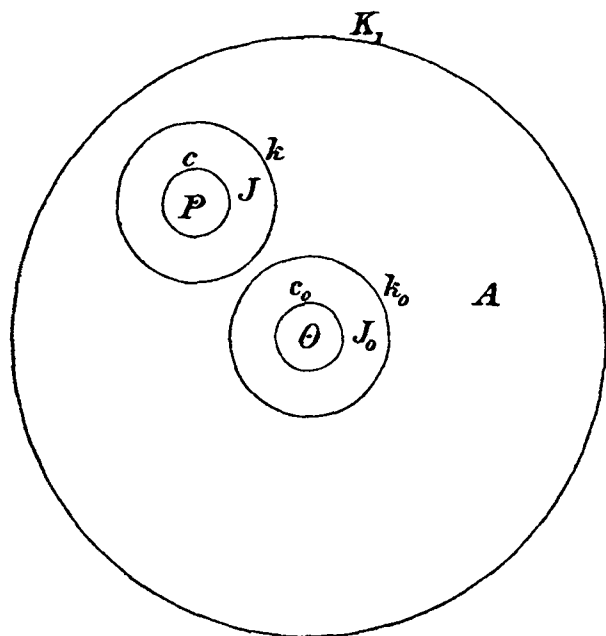


Fig. 1.

zu v einen Beitrag, der unterhalb einer von der Lage von P unabhängigen endlichen Grenze liegt. Es bleibt also nur der von dem Außenraume dieser beiden Kugeln herrührende Beitrag zu diskutieren. Hier liefert aber nach 4. das Äußere der Kugel K_1 von dem Radius $\rho \lg^2 \rho$ abermals einen mit wachsendem ρ verschwindenden Bestandteil: die Abschätzung beschränkt sich also schließlich auf den Raumteil, der von den drei Kugeln K_1 , c , c_0 begrenzt wird.

Diesen Raumteil zerlege ich schließlich nochmals durch Kugeln

k_0 und k von dem Radius $\frac{\rho}{\lg \rho}$ um O und P in die 3 Teilräume J_0 , J , A (siehe Fig. 1) und schreibe jetzt, unter Weglassung verschwindender Glieder, das abzuschätzende Integral in der Form:

$$(8) \quad \left[\int_{J_0} + \int_J + \int_A \right] \operatorname{div} \mathbf{u} G d\tau = - \left[\int_{c_0} + \int_c \right] (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) G d\sigma \\ - \left[\int_{J_0} + \int_J \right] \left\{ u_\xi \frac{\partial G}{\partial \xi} + u_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + u_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right\} d\tau \\ - \int_A \left\{ u_\xi \frac{\partial G}{\partial \xi} + u_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + u_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right\} d\tau.$$

Zunächst ist die Summe der beiden Flächenintegrale kleiner als eine von P unabhängige Konstante a' .

In den Raum-Integralen sondern wir die beiden in $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, $\frac{\partial G}{\partial \eta}$, $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ auftretenden, von O und P herrührenden Bestandteile und behandeln sie einzeln.

Von dem \int_A zeigen wir, daß es höchstens von der Ordnung $\lg \lg \rho$ ist. Da nämlich in A überall $|\mathbf{u}| < \varepsilon$ ist, da ferner nach (5) für jede der Größen $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, $\frac{\partial G}{\partial \eta}$, $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ sich eine Abschätzung

$$< \alpha \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_0^3} \right).$$

ergibt, und da die Größen r_0 und r innerhalb A zwischen den Grenzen $\frac{\varrho}{\lg \varrho}$ und $\varrho \lg^2 \varrho$ bzw. $\frac{\varrho}{\lg \varrho}$ und $\varrho \lg^2 \varrho + \varrho$ variieren, so ergibt sich sofort

$$\left| \int_A \right| < \alpha' \varepsilon \int_{\frac{\varrho}{\lg \varrho}}^{\varrho (\lg^2 \varrho + 1)} \frac{dr}{r} < \alpha' \varepsilon [\lg (\lg^2 \varrho + 1) + \lg \lg \varrho] < \beta \varepsilon \lg \lg \varrho.$$

Die beiden Integrale \int_o und \int_j lassen sich vollständig gleichförmig behandeln. Wir betrachten daher nur \int_o . Man übersieht zunächst leicht, daß der von dem Punkte P herrührende Bestandteil dieses Integrals mit wachsendem ϱ verschwindet (genauere Betrachtung liefert $\frac{1}{(\lg \varrho)^3}$ als Ordnung des Verschwindens).

Für den von dem Punkte O herrührenden Bestandteil erhalten wir zunächst die obere Grenze

$$\begin{aligned} \beta \int_1^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} |u| \frac{dr}{r} &= \beta \left[\int_1^{\lg \varrho} |u| \frac{dr}{r} + \int_{\lg \varrho}^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} |u| \frac{dr}{r} \right] \\ &< \beta [M \lg \lg \varrho + \varepsilon(\varrho) \{ \lg \varrho - 2 \lg \lg \varrho \}], \end{aligned}$$

wo M das absolute Maximum von $|u|$, $\varepsilon(\varrho)$ das Maximum derselben Größe außerhalb einer Kugel um O von dem Radius $\lg \varrho$ bedeutet. Es kommt also schließlich:

$$\left| \int_o \right| < \beta' \varepsilon(\varrho) \lg \varrho \quad \text{oder} \quad < \beta' \lg \lg \varrho,$$

je nachdem der erste oder zweite dieser Ausdrücke der größere ist; hier ist β' wieder eine von P unabhängige Konstante.

Das Resultat $< \beta' \varepsilon(\varrho) \lg \varrho$ gilt, mit noch etwas einfacherem Beweise, auch für \int_j .*)

*) Der angegebene Näherungswert für \int_o ist sehr roh. Mit ausreichender Genauigkeit dagegen läßt sich \int_j abschätzen. Daher vereinfacht sich die Untersuchung erheblich, wenn u so beschaffen ist, daß

$$v' = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \operatorname{grad} \varrho \frac{1}{r} d\tau$$

Die Zusammenfassung der verschiedenen aufgeführten Tatsachen liefert erstens den verlangten Nachweis, daß $|v|$ schwächer wächst als $\lg \varrho$, sie führt aber zweitens zu dem für das folgende wichtigen Ergebnis, daß bei schwach abnehmendem $\varepsilon(\varrho)$ die Glieder höchster Ordnung allein hervorgehen aus dem P -Bestandteile des Integrals \int und dem O -Bestandteile des Integrals \int_0 . Alle übrigen auftretenden Größen sind höchstens von der Ordnung $\lg \lg \varrho$.

7. Die letzte Bemerkung ist nützlich zur Aufstellung von Beispielen im Unendlichen verschwindender u , deren zugehörige v ihrerseits mit wachsendem ϱ beliebig große Werte annehmen. Das nachstehende Beispiel empfiehlt sich durch besondere Einfachheit, der Vektor v wird in ihm unendlich wie $\frac{\lg \varrho}{\lg \lg \varrho}$.

Wir betrachten einen Vektor u , der überall in der Richtung der x -Achse orientiert ist, dessen Komponenten u_η, u_ζ also identisch Null sind. Die x -Komponente $u_\xi = u$ sei außerhalb einer Kugel von dem Radius $a > e$ gegeben durch

$$u = \frac{x^2}{r_0^2 \lg \lg r_0} = \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg r_0},$$

wo ϑ_0 den Winkel gegen die x -Achse in einem Polarkoordinaten-System $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ bezeichnet. Im Innern der Kugel werde die Funktion mit beliebig vielen stetigen Differentialquotienten fortgesetzt. u_ξ ist überall endlich und stetig und verschwindet im Unendlichen wie $\frac{1}{\lg \lg r_0}$. Die Differentialquotienten verschwinden gleichfalls im Unendlichen, und zwar die ersten von der Ordnung $\frac{1}{r_0 \lg \lg r_0}$, die zweiten von der Ordnung $\frac{1}{r_0^2 \lg \lg r_0}$ usw. Sie sind außerdem überall endlich und stetig mit Ausnahme des Randes und des Inneren der Kugel von dem Radius a , wo nur eine endliche, aber beliebig große Anzahl von ihnen als endlich und stetig vorausgesetzt wird.*)

existiert. Dies ist z. B. der Fall, wenn $|u|$ von der Ordnung $\frac{1}{(\lg \varrho)^2}$ oder schärfer abnimmt. Man zeigt dann, daß v' gleichfalls im Unendlichen verschwindet, so daß sich alsdann u in zwei im Unendlichen verschwindende Vektoren zerlegen läßt: dies ist eine Erweiterung des in der Einleitung angeführten physikalischen Satzes.

*) Ein Beispiel einer mit sämtlichen Ableitungen überall endlichen und stetigen Funktion der gleichen Eigenschaften ist $u = e^{-\frac{1}{r_0}} \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg (r_0 + a)}$, $a > e$.

Zur Abschätzung des Vektors v haben wir nur den P -Bestandteil von \int und den O -Bestandteil von \int_0 in Betracht zu ziehen.

Das erste Integral liefert zu den 3 Komponenten von v die Beiträge:

$$(J) \quad + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg r_0} \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} \right\} d\tau, - \frac{3}{4\pi} \int \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg r_0} \frac{(\xi - x)(\eta - y)}{r^5} d\tau, \\ - \frac{3}{4\pi} \int \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg r_0} \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{r^5} d\tau.$$

Wir bezeichnen mit ϱ, τ die Polarkoordinaten von P in bezug auf O und zeigen, daß innerhalb J sich r_0 und ϑ_0 nur um verschwindende Größen von ϱ, τ unterscheiden. In der Tat ergibt sich zunächst aus dem Kosinussatze für genügend große ϱ

$$r_0 = \varrho \left(1 + \frac{\alpha}{\lg \varrho} \right), \quad -2 < \alpha < +2;$$

ferner ist (siehe Fig. 2)

$$|\tau - \vartheta_0| \leq \vartheta, \quad \sin \vartheta = \frac{1}{\varrho} \frac{\varrho}{\lg \varrho} = \frac{1}{\lg \varrho}.$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in $\frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg r_0}$ ein, so folgt

$$\frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg \lg r_0} = \frac{\cos^2 \tau}{\lg \lg \varrho} + \frac{\beta}{\lg \varrho \cdot \lg \lg \varrho}, \quad -3 < \beta < +3.$$

Daher stellt sich z. B. das erste der Integrale (J) in der folgenden Form dar:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\cos^2 \tau}{\lg \lg \varrho} \int \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} \right\} d\tau + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\lg \varrho \cdot \lg \lg \varrho} \int \beta \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} \right\} d\tau.$$

Das letzte Glied sinkt mit wachsendem ϱ unter jede Grenze, das erste aber verschwindet identisch, wie die Ausführung der Integration unmittelbar ergibt. Das gleiche Verhalten zeigen die beiden anderen Integrale (J). Daher:

Die Integrale (J) liefern zu dem Vektor v im Unendlichen verschwindende Bestandteile.

Wir haben also nur noch die von \int_0 herrührenden Beiträge zu untersuchen. Schreiben wir diese zunächst in der Form

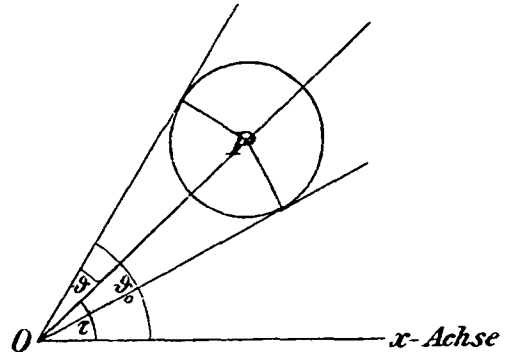


Fig. 2.

$$(J_0) \quad -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} \frac{\xi^2}{\lg \lg r_0} \frac{r_0^2 - 3\xi^2}{r_0^7} d\tau, \quad + \frac{3}{4\pi} \int_0^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} \frac{\xi^2}{\lg \lg r_0} \frac{\xi \eta}{r_0^7} d\tau,$$

$$+ \frac{3}{4\pi} \int_0^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} \frac{\xi^2}{\lg \lg r_0} \frac{\xi \zeta}{r_0^7} d\tau,$$

so ist unmittelbar ersichtlich, daß die beiden letzten Integrale wieder Null sind. Führen wir in dem ersten Integrale Polarkoordinaten ein, so liefert es

$$-\frac{1}{2} \int_a^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2 \vartheta_0 (1 - 3 \cos^2 \vartheta_0)}{r_0 \cdot \log \log r_0} dr_0 d(\cos \vartheta_0) = \frac{4}{15} \int_a^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} \frac{dr_0}{r_0 \lg \lg r_0}$$

$$= \frac{4}{15} \int_{\lg a}^{\lg \varrho - \lg \lg \varrho} \frac{dl}{\lg l},$$

wo $l = \lg r_0$ gesetzt ist. Dies letzte Integral ist aber der Integrallogarithmus und hat daher bis auf Größen geringerer Ordnung den Wert

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{\lg \varrho}{\lg \lg \varrho}.$$

Daher sehen wir:

Die x -Komponente des Vektors v wird unendlich wie $\frac{\lg \varrho}{\lg \lg \varrho}$, die übrigen Komponenten sicher von geringerer Ordnung als $\lg \lg \varrho$.

Das Beispiel ist von besonderem Interesse, weil es zeigt, daß das wachsende Verhalten des Vektors v von den Differenzierbarkeitseigenschaften von u gänzlich unabhängig und nur an die Ordnung des Abnehmens dieses Vektors geknüpft ist.

d. Das quellenfreie Feld.

8. Hiermit ist der in 1. angekündigte Satz vollständig bewiesen, außerdem ist in Formel (2) der wirbelfreie Vektor v allgemein angegeben. Wird aber die Aufgabe gestellt, einen im Unendlichen verschwindenden Vektor aus seinen Quellen und Wirbeln zu berechnen, so ist weiter auch der Vektor w in allgemeingültiger Form zu berechnen. Diese Aufgabe soll noch gelöst werden.

Wir machen dazu den bekannten Ansatz

$$(9) \quad w = \operatorname{rot} A,$$

der die Quellenfreiheit von w verbürgt. Wird alsdann A so bestimmt, daß

$$(10) \quad \Delta A = -\operatorname{rot} u, \quad \operatorname{div} A = 0,$$

so ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$$

und die Aufgabe gelöst.*) \mathbf{A} ist das *Vektorpotential* von \mathbf{w} .

9. Im folgenden gebrauchen wir eine einfache Erweiterung des Stokesschen Satzes, welche zunächst angegeben werden soll. Bezeichnen wir durch $\operatorname{rot}_\xi \mathbf{u}$, $\operatorname{rot}_\eta \mathbf{u}$, $\operatorname{rot}_\zeta \mathbf{u}$ die Komponenten der $\operatorname{rot} \mathbf{u}$, so handelt es sich um Umformung durch partielle Integration von Integralen der Form

$$(11) \quad \int a \operatorname{rot}_\zeta \mathbf{u} d\tau \quad \text{resp.} \quad \int \operatorname{rot}_\zeta \mathbf{u} G d\tau.$$

Wir benutzen die bekannte Formel

$$\operatorname{rot} (a \mathbf{u}) = a \operatorname{rot} \mathbf{u} - [\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} a],$$

aus welcher sich durch Integration über eine Fläche F mit der Randkurve s nach dem Stokesschen Satze ergibt

$$\int a (\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) df = \int a (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) + \int ([\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} a] \cdot \mathbf{n}) df.$$

Wenden wir diese Formel insbesondere auf ein von der ebenen Kurve s , begrenztes Stück der (xy) -Ebene an, deren Element mit de_ζ bezeichnet werden soll, so folgt

$$(12) \quad \int a \operatorname{rot}_\zeta \mathbf{u} de_\zeta = \int a (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}_e) + \int \left(u_\xi \frac{\partial a}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) de_\zeta$$

und bei vektorieller Zusammenfassung ebenso

$$(12') \quad \int \operatorname{rot}_\zeta \mathbf{u} G de_\zeta = \int G (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}_e) + \int \left(u_\xi \frac{\partial G}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) de_\zeta.$$

Wir betrachten jetzt ein Integral der Form (11), erstreckt über das beliebig vielfach zusammenhängende Innere einer Fläche, welche aus einer endlichen Anzahl von analytischen Flächenstücken zusammengesetzt ist. Alsdann lassen sich auf jeden Querschnitt senkrecht zur z -Achse die Formeln (12) resp. (12') anwenden, und wir erhalten daher für das Integral selbst

$$(13) \quad \begin{aligned} \int \operatorname{rot}_\tau \mathbf{u} G d\tau &= \iint G (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}_e) d\xi + \int \left(u_\xi \frac{\partial G}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau \\ &= \int G (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) d\omega_z + \int \left(u_\xi \frac{\partial G}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau; \end{aligned}$$

*) Math. Enc. IV 14 (Abraham), pg. 19 u. 20, Formel (20).

hierin bedeutet t die positive Einheitstangente an die Kurve s_e , $d\omega_e$ die Projektion des Flächenelements do auf die durch ds_e gelegte Parallelebene zur z -Achse.

Dies ist die Formel, die wir angeben wollten. Ihre Anwendbarkeit wird sofort zutage treten.

10. Wir haben einen Vektor A aufzustellen, welcher den Gleichungen (10) genügt. Ich behaupte:

Ist u ein beliebiger im Unendlichen verschwindender Vektor mit überall stetigen, differenzierbaren und im Unendlichen verschwindenden Ableitungen, so existiert stets das Integral

$$(14) \quad A = \frac{1}{4\pi} \int \text{rot } u \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \left(\varrho \text{ grad}_\varrho \frac{1}{r_0} \right) \right) d\tau$$

und erfüllt die beiden Forderungen

$$\Delta A = - \text{rot } u, \quad \text{div } A = 0,$$

stellt also das gesuchte Vektorpotential dar.

A ist vollkommen analog gebaut wie das skalare Potential (7). Der Beweis für seine Existenz könnte auf direkterem Wege geführt werden; wir benutzen hier diejenige Methode, die sich am genauesten an die Betrachtungen von 4. anschließt.

11. Ich betrachte (mit der Bezeichnung der Formel (11)) die Integrale

$$(14') \quad \int \text{rot}_\xi u G d\tau, \quad \int \text{rot}_\xi u G d\tau, \quad \int \text{rot}_\eta u G d\tau.$$

Um die Existenz eines dieser Integrale, z. B. des ersten, zu erweisen, habe ich nur zu zeigen, daß das über den Zwischenraum C zwischen einer Kugel K vom Radius R und einer beliebigen sie umgebenden Fläche F erstreckte Integral

$$\int_C \text{rot}_\xi u G d\tau$$

mit wachsendem R verschwindet. Dieser Beweis aber läßt sich mit Hilfe der Umformung (13) sofort führen. Man hat auf die Integrale der rechten Seite nur die aus 4. bekannten Abschätzungen für G und seine Differentialquotienten anzuwenden.

Integration und vektorielle Zusammenfassung der Größen (14') liefert die Existenz des gesuchten Vektors A .

12. In A ist die Ausführung einmaliger und (bei Ausschluß eines kleinen Gebietes um den Pol) auch zweimaliger Differentiationen unter dem Integralzeichen gestattet (siehe 3.). Hieraus folgt zunächst:

$$\Delta A = - \text{rot } u.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= -\frac{1}{4\pi} \int \left[\operatorname{rot}_{\xi} \mathbf{u} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}{\partial \xi} + \operatorname{rot}_{\eta} \mathbf{u} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}{\partial \eta} + \operatorname{rot}_{\zeta} \mathbf{u} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}{\partial \zeta} \right] d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \left(\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Wir beschreiben um O eine Kugel K von genügend großem Radius R , dann hat der von dem Außenraum dieser Kugel herrührende Bestandteil von $\operatorname{div} \mathbf{A}$ einen beliebig kleinen Wert. Der von dem Innenraum herrührende Teil läßt sich nach dem Greenschen Satze umformen in

$$-\frac{1}{4\pi} \int_K (\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(K)} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\tau.$$

Wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ verschwindet das letzte Integral identisch. Das erste kann durch genügend große Wahl von R unter jede Grenze herabgedrückt werden. In der Tat ist ja für alle Punkte der Kugel K

$$r = R \left(1 + \frac{\alpha \varrho}{R} \right), \quad -2 < \alpha < +2,$$

daher

$$\left| \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right| < \frac{\alpha' \varrho}{R^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in das Kugelintegral ein und berücksichtigt, daß $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ im Unendlichen verschwindet, so folgt das angegebene Resultat. Daher besteht die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß \mathbf{A} allen gestellten Anforderungen genügt.

Für den Vektor \mathbf{w} selbst läßt sich schließlich eine recht elegante Integraldarstellung angeben. Führe ich nämlich die Operation $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ unter dem Integralzeichen aus, so folgt

$$(15) \quad \mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \left[\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] d\tau.$$

Die formale Ähnlichkeit der Ausdrücke für \mathbf{w} und \mathbf{v} ist bemerkenswert.

Auf Grund dieser Darstellung läßt sich durch genaue Übertragung der Entwicklungen von 6. der Nachweis führen, daß \mathbf{w} nach dem Unendlichen zu schwächer anwächst als $\lg \varrho$.

13. Hieraus folgt schließlich die zu beweisende Tatsache, daß der aufgestellte Vektor (15) mit der quellenfreien Komponente \mathbf{w} der Zerlegung (1) übereinstimmt. In der Tat zeigt der Eindeutigkeitssatz, daß $\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}$ sich auf eine vektorielle Konstante reduzieren muß.

Somit lassen sich alle bisherigen Entwicklungen zu folgendem einfachen Resultat zusammenfassen:

Ein beliebiger mit seinen Ableitungen im Unendlichen verschwindender Vektor u läßt sich aus seinem Quellen- und Wirbelfeld konstruieren durch die Integraldarstellung

$$(16) \quad u = u_0 + \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int \left[\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] d\tau$$

$$= u_0 + \qquad \qquad \qquad v \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad w,$$

wo u_0 eine vektorielle Konstante ist. Diese Darstellung ist (bis auf die Konstante) eindeutig dadurch charakterisiert, daß v und w bei Fortgang ins Unendliche möglichst schwach anwachsen.

Im Falle ebener Vektoren bleiben alle Ergebnisse in Kraft, wenn $\frac{1}{r}$ mit $\lg r$ vertauscht wird.
