Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie.

Von

Gerhard Hessenberg in Breslau.

I. Die Christoffelsche Transformationsrechnung.

§ 1. Christoffelsche Kovarianten.

Durch die Bedeutung, die die Theorie der quadratischen Differentialformen neuerdings für die Relativitätstheorie erlangt hat, gewinnt die Frage aufs neue Gewicht, ob und wie der umfängliche und schwerfällige Formelapparat dieser Theorie vereinfacht, wenn nicht umgangen werden kann. Die Versuche, die bisher in dieser Richtung unternommen worden sind,*) stützen sich im wesentlichen noch immer auf Christoffels berühmte Transformationsrechnung;**) ehe wir daran gehen, diese durch eine geometrische Betrachtung zu ersetzen, wollen wir ihren Gedankengang kurz aufzeichnen.

Bei Einführung neuer unabhängiger Variabeln v^1 bis v^n an Stelle von u^1 bis u^n werde identisch:

$$(1) \qquad \sum_{i,k} a_{ik}\, du^i\, du^k = \sum_{\varrho,\sigma} b_{\varrho\sigma}\, dv^\varrho\, dv^\sigma.\text{***})$$

Hierbei sei $a_{ik} = a_{ki}$, also $b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho}$, ferner die Determinante $|a_{ik}|$, also auch $|b_{\varrho\sigma}|$ von Null verschieden. Alle Zeiger gehen von 1 bis n.

Erste Differentiale und Formkoeffizienten transformieren sich alsdann linear und homogen mit Substitutionskoeffizienten, die rationale ganze

*) Vor allem der „absolute Differentialkalkul" von Ricci und Levi-Civita, Math. Ann. 54, wo weitere Literatur angegeben ist.

**) Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Crelles Journ. 70, 1869.

***) Die Bedeutung des Hoch- und Tiefstandes der Zeiger für Ko- und Kontragredienz wird weiter unten angegeben werden. In den bisherigen Darstellungen war es üblich, an den Variabeln und ihren Differentialen eine Ausnahme zu machen und du_i für du^i zu schreiben. Eine folgerichtig durchgeführte Symmetrie zwingt uns hier zur Beseitigung dieser Ausnahme. Da die Gefahr einer Verwechslung der hochständigen Zeiger mit Potenzexponenten nicht auftritt, kann ihre Einklammerung unterbleiben und für einen besonderen Bezeichnungszweck vorbehalten werden.

Funktionen der Ableitungen der alten Variabeln nach den neuen sind; z. B. wird

(2) $$du^i = \sum_\varrho \frac{\partial u^i}{\partial v^\varrho} dv^\varrho,$$

(3) $$b_{\varrho\sigma} = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^\varrho} \frac{\partial u^k}{\partial v^\sigma}.$$

Gleichung (3) ist mit (1) gleichbedeutend. Allgemein besagt

(4) $$B_{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_m} = \sum_{i_1 \cdot i_m} A_{i_1 i_2 \cdots i_m} \frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{\varrho_1}} \frac{\partial u^{i_2}}{\partial v^{\varrho_2}} \cdots \frac{\partial u^{i_m}}{\partial v^{\varrho_m}},$$

daß folgende m-fach linearen Formen ineinander übergehen:

(5) $$\sum_{i_1 \cdots i_m} A_{i_1 \cdots i_m} d_1 u^{i_1} \cdots d_m u^{i_m} = \sum_{\varrho_1 \cdot \varrho_m} B_{\varrho_1 \cdots \varrho_m} d_1 v^{\varrho_1} \cdots d_m v^{\varrho_m}.$$

Bei der Transformation *höherer* Differentiale und *abgeleiteter* Formkoeffizienten treten auch die Ableitungen *höherer* Ordnung der Variabeln u^i nach den v^ϱ in den Substitutionskoeffizienten auf. Beispielsweise folgt aus (3):

(6) $$\frac{\partial b_{\varrho\sigma}}{\partial v^\tau} = \sum_{i,k,l} \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial v^\varrho} \frac{\partial u^k}{\partial v^\sigma} \frac{\partial u^l}{\partial v^\tau} + \sum_{i,k} a_{ik} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\varrho \partial v^\tau} \frac{\partial u^k}{\partial v^\sigma} + \frac{\partial u^i}{\partial v^\varrho} \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\sigma \partial v^\tau} \right).$$

Die Anzahl der Gleichungen (6) ist infolge der Symmetrien $b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho}$, $\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\varrho \partial v^\sigma} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\sigma \partial v^\varrho}$ ebensogroß, nämlich $\frac{1}{2} n^2(n+1)$, wie diejenige der zweiten Ableitungen der u^i. Daher liegt der Versuch nahe, sie nach diesen aufzulösen. Er gelingt und ergibt:

(7) $$\frac{\partial^2 u^l}{\partial v^\varrho \partial v^\sigma} = \sum_\tau \begin{Bmatrix} \varrho & \sigma \\ & \tau \end{Bmatrix}' \frac{\partial u^l}{\partial v^\tau} - \sum_{i,k} \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial v^\varrho} \frac{\partial u^k}{\partial v^\sigma}.$$

Darin ist mit Christoffel zur Abkürzung gesetzt:

(8) $$\begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\lambda a^{l\lambda} \left[\frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial u^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^\lambda} \right],$$

und (a^{ik}) bezeichnet die zu (a_{ik}) reziproke Matrix, also a^{ik} die durch die Determinante $|a_{ik}|$ dividierte Unterdeterminante von a_{ik}. Die Größe $\begin{Bmatrix} \varrho & \sigma \\ & \tau \end{Bmatrix}'$ ist völlig analog aus den Koeffizienten und Variabeln der transformierten Form $\sum b_{\varrho\sigma} dv^\varrho dv^\sigma$ zu bilden.

Nunmehr können wir aus jeder Transformationsgleichung die etwa auftretenden höheren Ableitungen der Variabeln fortschaffen und müssen dann auf eine Gleichung vom Typus (4) geführt werden, welche als

Kovarianz (5) gedeutet werden kann. Bilden wir beispielsweise in (4) beiderseits die Ableitung nach v^σ, so ergibt das Eliminationsverfahren nach einer naheliegenden und harmlosen Umformung unmittelbar:

$$B_{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_m \sigma} = \sum_{i_1 \cdots i_m, k} A_{i_1 i_2 \cdots i_m k} \frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{\varrho_1}} \frac{\partial u^{i_2}}{\partial v^{\varrho_2}} \cdots \frac{\partial u^{i_m}}{\partial v^{\varrho_m}} \frac{\partial u^k}{\partial v^\sigma}, \tag{9}$$

sagt also aus, daß die m-fach lineare Form

$$\sum_{i_1 \cdots i_m k} A_{i_1 i_2 \cdots i_m k} d_1 u^{i_1} d_2 u^{i_2} \cdots d_m u^{i_m} du^k \tag{10}$$

eine Kovariante von

$$\sum a_{ik} du^i du^k \quad \text{und} \quad \sum A_{i_1 \cdots i_m} d_1 u^{i_1} \cdots d_m u^{i_m}$$

ist. Die Koeffizienten dieser Kovariante:

$$A_{i_1 \cdots i_m k} = \frac{\partial A_{i_1 \cdots i_m}}{\partial u^k} - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{n} \begin{Bmatrix} i_\mu\, k \\ \lambda \end{Bmatrix} A_{i_1 \cdots i_{\mu-1} \lambda i_{\mu+1} \cdots i_m} \tag{11}$$

sind die sogenannten „*Ableitungen der* $A_{i_1 \cdots i_m}$ *in bezug auf die Form* $\sum a_{ik} du^i du^k$“*); $B_{\varrho_1 \cdots \varrho_m \sigma}$ ist analog aus den transformierten Größen zu bilden, indem man in (11) die Zeichen A, u, i, k und $\{\ \}$ durch B, v, ϱ, σ und $\{\ \}'$ ersetzt.

§ 2. Symmetrie der Dreizeigergrößen.

Es liegt nahe, insbesondere nach den Ableitungen der a_{ik} selbst in bezug auf die Form $\sum a_{ik} du^i du^k$ zu fragen. Wir finden:

$$a_{ikl} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\, l \\ \lambda \end{Bmatrix} a_{\lambda k} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} k\, l \\ \lambda \end{Bmatrix} a_{i\lambda} = 0. \tag{12}$$

Wir wollen für später beachten, daß diese Gleichungen die Christoffelschen Größen $\begin{Bmatrix} i\, k \\ l \end{Bmatrix}$ eindeutig definieren, falls wir noch die aus (8) folgende „*Christoffelsche Symmetrie*“ in den oberen Zeigern:

$$\begin{Bmatrix} i\, k \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\, i \\ l \end{Bmatrix} \tag{13}$$

hinzunehmen. Setzen wir nämlich mit Christoffel:

$$\begin{Bmatrix} i\, k \\ l \end{Bmatrix} = \sum_\lambda a^{l\lambda} \begin{bmatrix} i\, k \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{d. h.} \quad \begin{bmatrix} i\, k \\ l \end{bmatrix} = \sum_\lambda a_{l\lambda} \begin{Bmatrix} i\, k \\ \lambda \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

so treten an Stelle von (12), (13) die gleichwertigen Forderungen:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l} = \begin{bmatrix} i\, l \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k\, l \\ i \end{bmatrix}, \tag{15}$$ $$\begin{bmatrix} i\, k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\, i \\ l \end{bmatrix}, \tag{16}$$

*) Ricci und Levi-Civita, l. c.

aus denen sich sofort

$$2\begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{il}}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial u^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l} \tag{17}$$

und nunmehr über (14) wieder (8) ergibt.

§ 3. Riemann-Christoffelscher Krümmungstensor.

Eliminieren wir aus den Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial v^\sigma}\frac{\partial^2 u^l}{\partial v^\varrho\,\partial v^\tau} - \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\frac{\partial^2 u^l}{\partial v^\sigma\,\partial v^\tau} = 0$$

der Gleichungen (7) die zweiten Ableitungen der u^l mittels (7), so erhalten wir durch eine wegen ihres Umfangs berüchtigte Rechnung eine quadrilineare Kovariante, den *„Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor“*

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{K} &= \sum_{i,k,l,m} (iklm)\, d_1 u^i\, d_2 u^k\, d_3 u^l\, d_4 u^m, \\ (iklm) &= \frac{\partial}{\partial u^m}\begin{bmatrix} i\ l \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^l}\begin{bmatrix} i\ m \\ k \end{bmatrix} - \sum_\lambda \left(\begin{bmatrix} i\ l \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k\ m \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} i\ m \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k\ l \\ \lambda \end{Bmatrix}\right), \end{aligned}\right. \tag{18}$$

zwischen dessen Koeffizienten die Relationen bestehen:

$$(iklm) = -(ikml), \tag{19}$$

$$(iklm) = -(kilm), \tag{20}$$

$$(iklm) = (lmik), \tag{21}$$

$$(iklm) + (ilmk) + (imkl) = 0. \tag{22}$$

Man liest (19) unmittelbar, (20) unter Zuhilfenahme von (15) aus (18) ab; dagegen erfordert der Nachweis von (21), (22) — eine Verschiedenheit, von deren tieferem Grund später noch zu reden sein wird, — die Heranziehung der Christoffelschen Symmetrie, indem man z. B. mittels (14) und (17) folgende ausführlichere Darstellung errechnet:

$$\begin{aligned} -(iklm) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u^k\,\partial u^m} + \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial u^i\,\partial u^l} - \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial u^k\,\partial u^l} - \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial u^i\,\partial u^m}\right] \\ + \sum_{\lambda,\mu} a^{\lambda\mu}\left(\begin{bmatrix} i\ l \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\ m \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\ m \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\ l \\ \mu \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Bekannt ist, daß von den Größen $(iklm)$ nur $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ linear unabhängig sind; ferner, daß (22), wenn zwei gleiche Zeiger auftreten (was im Falle $n \leqq 3$ stets der Fall ist), sich auf eine Folgerung aus (19) bis (21) reduziert. Dagegen scheint nicht beachtet worden zu sein, daß (21) eine Folge der drei anderen Relationen ist. Auf Grund von (20) kann man nämlich in (22) auch den *zweiten* Zeiger festhalten und die drei anderen zyklisch permutieren; infolgedessen existiert zu jedem Glied von (22) eine zweite Relation vom Typus (22), in der es auftritt:

$$(22a) \qquad (iklm) + (mkil) + (lkmi) = 0,$$
$$(22b) \qquad (mlki) + (ilmk) + (klim) = 0,$$
$$(22c) \qquad (lmik) + (kmli) + (imkl) = 0.$$

Man hat nur (22), (22a) seitenweise zu addieren, (22b), (22c) zu subtrahieren und (19), (20) zu beachten, z. B. $(mlki) = (lmik)$, um (21) zu erhalten.

§ 4. Mängel formaler Methoden.

Auch dann, wenn man Invarianzen und Kovarianzen in erster Linie als *Ergebnisse von Eliminationen*, nämlich der Substitutionskoeffizienten aus Transformationsgleichungen, auffaßt,*) wird man als ein Hauptziel der Invariantentheorie die Vermeidung oder wenigstens Einschränkung der *Eliminationsrechnungen* anerkennen müssen. Und dies nicht nur wegen ihres lästigen Umfanges, sondern mehr noch wegen des für geometrische und physikalische Anwendungen wesentlichen *anschaulichen Sinnes* der Invariante oder Kovariante, der durch formale Bildungsverfahren keineswegs unmittelbar erschlossen wird, wohl aber seinerseits den formalen Nachweis der In- oder Kovarianz entbehrlich macht.

Darum ist Christoffels Methode, weil sie die Elimination explizite durchrechnet, schon in rein formaler Hinsicht nicht das letzte Wort, wenn sich auch auf ihren Ergebnissen ein brauchbares Verfahren zur Invariantenbildung ohne weitere Eliminationen errichten läßt**). Die Verbesserungen dieser Methode***) wiederum haben, soweit wir sie übersehen, nur eben

*) Vgl. z. B. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, § 46.

**) Seine Durchbildung im „*absoluten Differentialkalkul*" läßt freilich noch recht viel zu wünschen übrig. Das Ansetzen eines neuen Zeigers als Operationszeichen setzt voraus, daß der abzuleitende Tensor durch ein Symbol von der Form $A_{i_1 \cdots i_m}$ bezeichnet ist. Ist dieser aber selbst durch Addition, Multiplikation oder Faltung entstanden, so trifft diese Voraussetzung nicht zu, wenn nicht für das der Ableitung vorangehende Ergebnis ein Zwischensymbol eingeführt wird. Jedenfalls kann die Sukzession algebraischer und differentieller Operationen auf diese Weise nicht durch ein einheitliches Symbol ausgedrückt werden. Die Analogie des „absoluten" Differentialkalkuls mit dem gemeinen muß in den Rechensymbolen selbst, nicht nur in der Namengebung zum Ausdruck gebracht werden. Was diese betrifft, so ist sie zudem wenig glücklich; vor allem ist es unerfindlich, warum eine ausgesprochen *relative*, nämlich auf eine Grundform $\sum a_{ik}\, du^i\, du^k$ bezogene Rechnungsart als „*absolut*" bezeichnet wird. Die elementarsten Grundsätze der Zweckmäßigkeit gebieten doch gerade, die *gemeinen* Ableitungen im Gegensatz zu den auf eine Grundform bezogenen als *absolute* zu benennen. Vgl. auch Seite 196, erste Fußnote.

***) Vgl. z. B. Knoblauch, Über den Beweis der Christoffelschen Kovarianz, Sitz. Ber. d. Berl. Math. Ges., Bd. I, Hessenberg, Über die Gleichung der geodätischen Linien, ebenda, sowie: Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen usw., Acta Math. Bd. 23. Maschke, A new method of determining the differential parameters and invariants of quadratic differential quantics, Trans. Am. Math. Soc.

diese *rechnerische* Schwäche überwunden, ohne indessen dem Zugang zur *geometrischen* Bedeutung wesentlich näher gekommen zu sein.*)

§ 5. Extensive Größen.

Ein solcher Zugang eröffnet sich nun in einer, wie mir scheint, überraschend einfachen Weise auf dem Wege Graßmannscher Ideen. Einem Tensor $\{A_{i_1 \cdots i_m}\}$ entspricht eine extensive Größe $\mathfrak{A}$, deren Differential $d\mathfrak{A}$ wiederum eine extensive Größe von gleicher Dimension ist; seine Komponenten $\delta A_{i_1 \cdots i_m}$ sind daher denen von $\mathfrak{A}$ notwendig kogredient. Andererseits ist $\delta A_{i_1 \cdots i_m}$ eine lineare Differentialform $\sum_k A_{i_1 \cdots i_m k}\, du^k$, und deren Koeffizienten erweisen sich als die durch (11) definierten *„Ableitungen"*. Die Formel (9) wird hierdurch in der Tat so trivial, daß ihre rechnerische Herleitung bestenfalls den Wert einer Rechenprobe behält.

Der Weg, den wir im folgenden einschlagen werden, führt zu den Christoffelschen Dreizeigergrößen über die Formeln (12) und (13). Dabei wird sich zeigen, daß für die abzuleitenden Invarianzen, auch diejenige des Krümmungstensors, nur die Formeln (12) wesentlich sind, während die Christoffelsche Symmetrie (13) völlig ausgeschieden werden kann. Ihre Bedeutung läßt sich dagegen in der Aussage zusammenfassen, daß in der Geometrie der betrachteten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die *„geradesten"* Linien zugleich die *„kürzesten"* sind.

II. Vorbemerkungen aus der Vektoralgebra.

§ 6. Reziproke Grundsysteme.

Wir bezeichnen Vektoren mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ usw., ihre absoluten Längen mit den zugehörigen lateinischen, p, q, r usw., das innere Produkt $p \cdot q \cos(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, die äußeren Produkte mit $[\mathfrak{p}\mathfrak{q}]$,

---

Vol. I, A symbolic treatment of the theory of invariants of quadratic differential quantics of n variables, ebenda, Vol. IV, sowie das Referat von J. E. Wright, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., No 9.

*) Dies gilt insbesondere von den differentiellen Übertragungen solcher algebraischer Methoden, bei denen die Invarianten aus *„Symbolen"*, d. h. aus formalen Zeichen aufgebaut werden, die für sich allein keinen, also auch keinen geometrischen Sinn haben. Maschke setzt z. B. $\sum a_{ik}\, du^i du^k = (df)^2$; die *„symbolische Funktion"* f ist an und für sich ebenso wie ihre Ableitungen f_i, f_{ik} usw. sinnlos, während z. B. $f_i f_k = a_{ik}$, $f_l f_{ik} = \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix}$ wird. Indessen läßt sich gerade diesen Symbolen ein Sinn, und zwar ein ausgesprochen *geometrischer*, unterlegen, wenn man beachtet, daß df formal genau dieselbe Rolle spielt, wie unsere *extensive* Größe $d\mathfrak{s}$ (§ 20). Die *„Symbole"* f_i entsprechen dadurch unseren Grundvektoren $\mathfrak{p}_i$, und die Gleichheit der mittleren Ableitungen, $f_{ik} = f_{ki}$, die die Auffassung der f_i als Ableitungen eines Symbols f ermöglicht, enthält die Christoffelsche Symmetrie.

$[\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}]$ usw. Allgemeiner bezeichnet $(\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{r}\cdots)$ irgend ein Produkt, von dem nur die Gültigkeit des distributiven Gesetzes vorausgesetzt ist.

In einer n-dimensionalen euklidischen Mannigfaltigkeit seien n linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{p}_i$ ($i = 1$ bis n) gegeben. Wir nennen sie die *„Grundvektoren“* und das System $\{\mathfrak{p}_i\}$ das *„Grundsystem“*. Wir bilden sodann das *„reziproke“* System $\{\mathfrak{p}^i\}$, dessen Elemente wir auch die *„Komplemente“* der Grundvektoren nennen und folgendermaßen definieren: $\mathfrak{p}^i$ steht senkrecht auf allen Grundvektoren außer $\mathfrak{p}_i$; seine Projektion auf $\mathfrak{p}_i$ ist mit $\mathfrak{p}_i$ gleichgerichtet und hat die Länge $1 : p_i$. In Formeln ausgedrückt soll sein:

$$\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}^k = a_i^k = \begin{Bmatrix} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{Bmatrix}. \tag{24}$$

Die Matrix (a_i^k) ist also die „Einheitsmatrix“. Umgekehrt ist hiernach auch $\{\mathfrak{p}_i\}$ das reziproke System zu $\{\mathfrak{p}^i\}$.

Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{r}$ ist nun in jedem der beiden Systeme durch seine skalaren Komponenten darstellbar:

$$\mathfrak{r} = \sum_i r^i \mathfrak{p}_i = \sum_i r_i \mathfrak{p}^i. \tag{25}$$

Auf Grund von (24) ergibt sich für diese Komponenten:

$$r^i = \mathfrak{r}\,\mathfrak{p}^i, \qquad r_i = \mathfrak{r}\,\mathfrak{p}_i. \tag{26}$$

Insbesondere ist daher

$$\mathfrak{p}^i = \sum_k a^{ik}\,\mathfrak{p}_k, \qquad \mathfrak{p}_i = \sum_k a_{ik}\,\mathfrak{p}^k, \tag{27}$$

darin:

$$a^{ik} = \mathfrak{p}^i\,\mathfrak{p}^k, \qquad a_{ik} = \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_k. \tag{28}$$

Hiermit folgt wiederum mit Rücksicht auf (26):

$$r^i = \sum_k a^{ik} r_k, \qquad r_i = \sum_k a_{ik} r^k; \tag{29}$$

die Matrizen (a_{ik}) und (a^{ik}) sind daher reziprok:

$$\sum_\lambda a_{i\lambda}\,a^{\lambda k} = a_i^k, \tag{30}$$

und überdies natürlich symmetrisch.

Für das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ erhalten wir folgende vier Darstellungen:

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{s} = \sum_{i,k} a_{ik}\,r^i s^k = \sum_{i,k} a^{ik}\,r_i s_k = \sum_i r_i s^i = \sum_i r^i s_i; \tag{31}$$

insbesondere wird

$$\mathfrak{r}^2 = (r)^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\,r^i r^k = \sum_{i,k} a^{ik}\,r_i r_k = \sum_i r_i r^i. \tag{32}$$

Durch die symmetrische Matrix (a_{ik}) ist sonach die Maßbestimmung unserer Mannigfaltigkeit oder, was auf dasselbe hinauskommt, die geometrische Gestalt des „n-Beins" $\{\mathfrak{p}_i\}$ eindeutig bestimmt. In der Tat kennen wir die absoluten Längen $p_i = \sqrt{a_{ii}}$ der n „Beine" und die Kosinus der von ihnen gebildeten Winkel, $\cos(\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k) = a_{ik} : p_i p_k$. Die Grundvektoren sind im allgemeinen rein geometrisch als extensive Größen anzusehen. Sie durch n-tupel von skalaren Größen zu interpretieren würde lediglich die Zurückführung auf ein neues Bezugssystem von n Vektoren bedeuten.

Die Determinanten $|a_{ik}|$ und $|a^{ik}|$ sind die Quadrate der äußeren Produkte $[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n]$ und $[\mathfrak{p}^1 \mathfrak{p}^2 \cdots \mathfrak{p}^n]$, deren Absolutwerte wir mit T und T^{-1} bezeichnen werden; also $|a_{ik}| = T^2$, $|a^{ik}| = T^{-2}$.

Notwendig und hinreichend für die Orthogonalität des Grundsystems ist die Bedingung, daß es mit seinem reziproken System gleichgerichtet ist ($a_{ik} = 0$ für $i \neq k$). Haben zudem alle Grundvektoren die Länge 1 (orthogonales Einheitssystem), so ist es mit seinem reziproken identisch, und es wird $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}^i$, $r_i = r^i$, $a_{ik} = a_i^k = a^{ik}$ usw.

§ 7. Kogredienz und Kontragredienz.

Werden an Stelle der $\mathfrak{p}_i$ neue Grundvektoren $\mathfrak{q}_\varrho = \sum_i q_\varrho^i \mathfrak{p}_i$ eingeführt, so wird $q_\varrho^i = \mathfrak{q}_\varrho \mathfrak{p}^i$, also auch $\mathfrak{p}^i = \sum_\varrho q_\varrho^i \mathfrak{q}^\varrho$, d. h. die zu $\{\mathfrak{p}_i\}$ und $\{\mathfrak{q}_i\}$ reziproken Systeme werden durch die inverse und transponierte Substitution transformiert: *Reziproke Systeme sind zueinander kontragredient.* Das gleiche gilt, wie man unmittelbar sieht, auch von den reziproken Komponenten r_i, r^i eines Vektors $\mathfrak{r}$; es wird, wenn $\mathfrak{r} = \sum_\varrho \hat{r}^\varrho \mathfrak{q}_\varrho = \sum_\varrho \hat{r}_\varrho \mathfrak{q}^\varrho$ ist, $r^i = \sum_\varrho q_\varrho^i \hat{r}^\varrho$, $\hat{r}_\varrho = \sum_i q_\varrho^i r_i$, so daß die Komponenten r^i in bezug auf das Grundsystem $\{\mathfrak{p}_i\}$ zu dem reziproken System $\{\mathfrak{p}^i\}$ kogredient sind und umgekehrt.

Generell handelt es sich hierbei um folgenden allgemeinen Zusammenhang: Sind $\{r^i\}$, $\{s_i\}$ irgend zwei kontragrediente Systeme, deren Elemente skalare oder auch extensive Größen sein können, so ist $\sum r^i s_i$ eine Invariante. Ist umgekehrt $\sum r^i s_i$ invariant, und das System $\{s_i\}$ *„linear unabhängig"*, d. h. kann aus $\sum s_i x^i = 0$ auf $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ geschlossen werden, so sind die Systeme $\{r^i\}$ und $\{s_i\}$ kontragredient. Daher sind die Komponenten eines invarianten Vektors nach den Grundvektoren zu diesen kontragredient und zu ihren Komplementen kogredient. Umgekehrt ist jedes zu den Grundvektoren kontragrediente System von Skalaren deutbar als das System der Komponenten eines invarianten Vektors nach den Grundvektoren.

§ 8. Allgemeine Tensoren.

Wenn $\{x_1, \cdots, x_n\}$ und $\{\xi_1, \cdots, \xi_m\}$ linear unabhängige Systeme sind, so ist auch das System der nm Größen $X_l = x_i \xi_k$ ($l = 1$ bis nm*)) linear unabhängig. Es transformiert sich ferner linear, wenn die beiden ersten irgendwie, jedes durch eine besondere Substitution, linear transformiert werden. Ist $\{y^i\}$ zu $\{x_i\}$, $\{\eta^k\}$ zu $\{\xi_k\}$ kontragredient, so ist auch das System der Größen $Y^l = y^i \eta^k$ zu $\{X_l\}$ kontragredient; denn $\sum X_l Y^l = \sum x_i y^i \cdot \sum \xi_k \eta^k$ ist als Produkt zweier Invarianten selbst eine Invariante. Wir werden das System $\{X_l\}$ als *Tensorprodukt* der Systeme $\{x_i\}$, $\{\xi_k\}$ bezeichnen.

Ausgehend von irgend welchen zu den Grundvektoren ko- und kontragredienten Systemen $\{r_i\}$, $\{s_i\}$, $\cdots$, $\{t_i\}$, $\{u^k\}$, $\{v^k\}$, $\cdots$, $\{w^k\}$ können wir nunmehr Tensorprodukte mit Komponenten

$$X_{i_1 i_2 \cdots i_\alpha}^{k_1 k_2 \cdots k_\beta} = r_{i_1} s_{i_2} \cdots t_{i_\alpha} u^{k_1} v^{k_2} \cdots w^{k_\beta}$$

bilden. Jedes zu solchem Produkt kogrediente System $\left\{A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{k_1 \cdots k_\beta}\right\}$ heißt ein *Tensor* vom Range $\alpha + \beta$. Ihm entspricht eine extensive Größe

$$\mathfrak{A} = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_\alpha \\ k_1 \cdots k_\beta}} A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{k_1 \cdots k_\beta} (\mathfrak{p}^{i_1} | \mathfrak{p}^{i_2} \cdots | \mathfrak{p}^{i_\alpha} | \mathfrak{p}_{k_1} | \mathfrak{p}_{k_2} \cdots \mathfrak{p}_{k_\beta}) \tag{33}$$

von invarianter Bedeutung. Indem wir die Grundvektoren durch ihre Komplemente ausdrücken oder umgekehrt, können wir beliebige Indizes zwischen Hoch- und Tiefstand wechseln lassen. Z. B. wird

$$\mathfrak{A} = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_\alpha \\ k_1 \cdots k_\beta}} A_{i_1 \cdots i_\alpha k_1 \cdots k_\beta} (\mathfrak{p}^{i_1} \; \mathfrak{p}^{i_2} | \cdots | \mathfrak{p}^{i_\alpha} | \mathfrak{p}^{k_1} | \mathfrak{p}^{k_2} | \cdots | \mathfrak{p}^{k_\beta}), \tag{34}$$

und darin

$$A_{i_1 \cdots i_\alpha k_1 \cdots k_\beta} = \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_\beta} A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{\lambda_1 \cdots \lambda_\beta} a_{\lambda_1 k_1} a_{\lambda_2 k_2} \cdots a_{\lambda_\beta k_\beta}. \tag{35}$$

Beispiele für dieses Heben und Senken der Zeiger bieten bereits die Gleichungen (29) und (30)**). Es erhellt zugleich, warum für den Rang

*) Wir denken uns die nm geordneten Zeigerpaare (i, k) irgendwie den Zahlen l von 1 bis nm zugeordnet (numeriert), z. B. $l = m(i-1) + k$.

**) Sie zeigen übrigens, daß eine sorgfältige Bezeichnungsweise die beim Heben oder Senken entstehenden Lücken kennzeichnen müßte. Z. B. müßte in (35) folgerichtig auf der rechten Seite ein Symbol wie $A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{0 \cdots 0} {}_{0 \cdots 0}^{k_1 \cdots k_\beta}$ stehen, da ja auch Zeiger außerhalb der angeschriebenen Reihenfolge versetzt werden können. Dementsprechend müßte auch das Symbol a_i^k durch a_{i0}^{0k} ersetzt werden, wenn dieses nicht zufällig mit a_{0i}^{k0} gleichbedeutend wäre. Da wir es höchstens mit vier Zeigern zu tun haben werden, und da niemals alle möglichen Versetzungen in Frage kommen, erübrigt sich die von Rechts wegen erforderliche Sorgfalt der Bezeichnung.

eines Tensors lediglich die Gesamtzahl der Zeiger, $\alpha + \beta$, nicht aber ihre Verteilung auf das Grundsystem und sein Komplement wesentlich ist.*)

§ 9. Symmetrische und alternierende Tensoren.

Zwei Zeiger sollen *„gleichständig“* heißen, wenn beide hoch oder beide tief stehen, andernfalls *„gegenständig“*. Mit großen Buchstaben $J, K, L, \ldots$ wollen wir Komplexe von Zeigern andeuten, die teils hoch, teils tief stehen können. Wird jeder hochständige Zeiger eines Komplexes gesenkt, jeder tiefständige gehoben, so entsteht der *„gegenständige“* Komplex, den wir durch Heben bzw. Senken des Komplexzeichens selbst andeuten.

Ist ein Tensor symmetrisch oder alternierend in zwei Zeigern i, k, so liegt eine invariante Eigenschaft nur dann vor, wenn i, k gleichständig sind.**) Dies soll daher beim Gebrauch der Worte „symmetrisch“ und „alternierend“ stets vorausgesetzt werden. Analoges gilt von symmetrischen und alternierenden Komplexen; beispielsweise ist der Krümmungstensor nach Gleichung (21) symmetrisch in den Komplexen (i, k) und (l, m), nach (19, 20) alternierend in den Zeigern i und k, sowie l und m, und besitzt nach (22) noch eine weitere *„zyklische“* Eigenschaft, die ebenfalls ihrer Natur nach invariant ist.

Durchgehend paarweises Alternieren kann in höchstens n gleichständigen Zeigern stattfinden, weil andernfalls stets zwei gleiche Zeiger vorhanden, also alle Komponenten null sind. Alterniert ein Tensor n^{ten} Ranges

*) Auch die Unterscheidung zwischen „kovarianten“, „kontravarianten“ und „gemischten“ Tensoren (je nachdem die Zeiger alle tief, alle hoch oder teils tief, teils hoch stehen) ist hiermit gegenstandslos. Sie ist lediglich Folge einer unklaren Redeweise, die zwischen der extensiven Größe und dem System ihrer Komponenten nicht sorgfältig unterscheidet. Um das Verständnis unserer Ausführungen nicht durch terminologische Neuerungen zu erschweren, werden wir die extensiven Größen vom Range $\geqq 2$ aus dem Spiel lassen und nur ihre Komponentensysteme, die „*Tensoren*“, verwenden. Was dagegen den Rang 1, die „*Vektoren*“ betrifft, so geht es unseres Erachtens nicht an, das Komponentensystem mit dem Vektor zu identifizieren, nachdem im geometrischen und physikalischen Sprachgebrauch der Vektor durchgehends als *extensive Größe* eingebürgert ist. Der Vektor $\mathfrak{r} = \sum r_i \mathfrak{p}^i = \sum r^i \mathfrak{p}_i$ ist als solcher weder „*kovariant*“ noch „*kontravariant*“, sondern *invariant*. Was man als kovarianten und kontravarianten Vektor unterscheidet, sind lediglich die Komponentensysteme $\{r_i\}$ und $\{r^i\}$ in bezug auf die reziproken Grundsysteme $\{\mathfrak{p}^i\}$ und $\{\mathfrak{p}_i\}$, also *verschiedene* Beschreibungen *ein und desselben* geometrischen Gebildes.

Auch der Gebrauch der Worte ko- und kontravariant (bzw. -gredient), die ursprünglich einen *relativen* Sinn haben, im *absoluten* Sinne (nämlich stets in bezug auf das System $\{\mathfrak{p}_i\}$) scheint mir sprachlich bedenklich und für den Ausdruck erschwerend, weshalb ich ihn vermeiden werde.

**) Eine Ausnahme macht nur die Einheitsmatrix (a_i^k), die in i, k symmetrisch ist und bei allen Transformationen in sich selbst übergeht.

in allen Zeigern, so sind von seinen n^n Komponenten $n!$ von null verschieden und einander bis aufs Vorzeichen gleich, $A_{i_1 \dots i_n} = \pm A_{1 \dots n}$, je nachdem $(i_1 \cdots i_n)$ eine gerade oder ungerade Permutation von $(1, \cdots, n)$ ist. Die Größe $T = [\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n]$, § 6, bietet ein Beispiel hierfür.

§ 10. Komposition und Faltung.

Es seien J, K, L Komplexe von α, β, γ Zeigern, also $\{A_J^L\}$, $\{B_{LK}\}$ Tensoren vom Range $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$. Dann ist $C_{JK} = \sum\limits_L A_J^L B_{LK}$ Komponente eines Tensors $\{C_{JK}\}$ vom Range $\alpha + \beta$. Im besonderen ist hierunter der Fall $\alpha = \beta = 0$ enthalten, in dem der resultierende Tensor aus einem invarianten Element C besteht.

Aus einem einzigen Tensor $\{A_{kK}^{iJ}\}$ entsteht durch *„Faltung nach den Zeigern i, k“* der Tensor $\{A_K^J\}$ mit den Komponenten $A_K^J = \sum\limits_\lambda A_{\lambda K}^{\lambda J}$. Sein Rang ist um zwei Einheiten gegen den ursprünglichen Tensor erniedrigt. Die Faltung ist ein Sonderfall der zuvor beschriebenen Komposition, nämlich eine zweifache Komposition der Tensoren $\{A_{kK}^{iJ}\}$ und $\{a_i^k\}$: $A_K^J = \sum\limits_{i,k} A_{kK}^{iJ} a_i^k$

Umgekehrt kann auch die Komposition als Faltung des Tensorproduktes mit den Komponenten $C_{iJK}^k = A_{iJ} B_K^k$ nach den Zeigern i, k aufgefaßt werden.

Die in §§ 9, 10 ausgesprochenen Tatsachen kann man auf zweifache Art nachweisen; entweder durch Nachrechnen der Transformationen, oder durch Spezialisierung des allgemeinen Produktes der Grundvektoren in (33). Alternierung und Symmetrie der Komponenten entsprechen den gleichen Eigenschaften des Vektorenproduktes. Die Faltung entsteht, wenn die zu den Zeigern i, k gehörigen Faktoren $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}^k$ *innerlich* miteinander multipliziert werden.

III. Infinitesimale äußere Orientierung.

§ 11. Differentiale der Grundvektoren.

Nunmehr werde angenommen, daß die Größen a_{ik} stetige, zweimal differentiierbare Funktionen von n unabhängigen Parametern, den *„Urvariabeln“* t_1, t_2 bis t_n seien. Dies bedeutet, daß in jedem Punkte der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ ein n-Bein $\{\mathfrak{p}_i\}$ von bekannter *„innerer Orientierung“* (d. h. Abmessung) angebracht ist. Über die Maßbestimmung innerhalb $\mathfrak{T}$ ist damit gar nichts ausgesagt; ebensowenig über die *„äußere Orientierung“* dieser ∞^n n-Beine *gegeneinander*. Wir können daher eine solche in gewissem Umfange willkürlich festsetzen, und zwar beschränken wir uns zunächst auf das Unendlichkleine, indem wir die zu einer infinitesimalen Verschiebung $dt_1, dt_2, \cdots, dt_n$ gehörigen Differentiale $d\mathfrak{p}_i$ der Grundvektoren vorschreiben.

Diese Differentiale sind ihrer Natur nach wieder Vektoren, lassen sich daher in Komponenten nach den $\mathfrak{p}_i$ zerlegen. Transformationstechnisch dagegen können sie insofern nicht als Vektoren angesprochen werden, als sie sich anders transformieren. In der Bezeichnung des § 7 wird $d\mathfrak{q}_\varrho = \sum_i q^i_\varrho \, d\mathfrak{p}_i + \sum_i dq^i_\varrho \, \mathfrak{p}_i$ sein, weil die Transformationskoeffizienten allgemeiner Art Funktionen der Urvariabeln sein werden; es treten also bei der Transformation der $d\mathfrak{p}_i$ auch die Differentiale der Substitutionskoeffizienten auf. Alle solche Vektoren (und Tensoren), die zwar rein geometrisch, nicht aber transformationstechnisch sich wie Vektoren (bzw. Tensoren) verhalten, werden wir *„Quasi-Vektoren“* (bzw. *„Quasi-Tensoren“*) nennen.

§ 12. Tensor der äußeren Orientierung.

Nach diesen Vorbemerkungen beachten wir, daß aus (24) und (28) jedenfalls folgen wird:

$$d\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}^k + \mathfrak{p}_i \cdot d\mathfrak{p}^k = da^k_i = 0, \tag{36}$$

$$d\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}_k + \mathfrak{p}_i \cdot d\mathfrak{p}_k = da_{ik}, \quad d\mathfrak{p}^i \cdot \mathfrak{p}^k + \mathfrak{p}^i \cdot d\mathfrak{p}^k = da^{ik}. \tag{37}$$

Auf den linken Seiten stehen nun nach (26) gerade die Komponenten der Vektordifferentiale; wir bezeichnen sie in folgender Weise:

$$d\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}^k = - \mathfrak{p}_i \cdot d\mathfrak{p}^k = db^k_i, \tag{38}$$

$$d\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}_k = db_{ik}, \quad - \mathfrak{p}^i \cdot d\mathfrak{p}^k = db^{ik}, \tag{39}$$

wobei nach (29) sein muß:

$$\sum_\mu db_{i\mu} a^{\mu k} = \qquad db^k_i \qquad = \sum_\lambda a_{i\lambda} \, db^{\lambda k}, \tag{40}$$

also auch:

$$db_{ik} \qquad = \qquad \sum_\mu db^\mu_i \, a_{\mu k} = \sum_{\lambda, \mu} a_{i\lambda} \, db^{\lambda\mu} a_{\mu k},$$

$$\sum_{\lambda, \mu} a^{i\lambda} \, db_{\lambda\mu} a^{\mu k} = \sum_\lambda a^{i\lambda} \, db^k_\lambda \qquad = \qquad db^{ik}.$$

Die drei Systeme $\{db_{ik}\}$, $\{db^k_i\}$, $\{db^{ik}\}$ sind hiernach Quasitensoren zweiten Ranges, die ein und derselben extensiven Größe entsprechen und durch Heben bzw. Senken der Zeiger*) auseinander hervorgehen. Wir sprechen daher von *„dem Orientierungstensor“* $\{db\}$ schlechthin.

*) Folgerichtig (vgl. Fußnote **) S. 195) müßte $db_{i\,0}^{\,0\,k}$ für db^k_i geschrieben werden. Da jedoch die vierte Darstellung $db^{i\,0}_{0\,k}$ nicht benötigt wird, ist die obige einfachere Schreibweise unbedenklich, wenn man sich nur einprägt, daß der *obere* Zeiger der *zweite*, der *untere* der *erste* ist.

Die Komponenten db_{ik} usw. sind lineare Formen der Differentiale dt_λ, nicht notwendig aber *exakte* Differentiale; die Zeichen b_{ik} usw. haben also für sich keinen Sinn.*)

Durch (38) wird (36) identisch erfüllt; (37) lautet nunmehr:

(41) $$db_{ik} + db_{ki} = da_{ik}, \qquad db^{ik} + db^{ki} = -da^{ik}.$$

Endlich ist nach (25), (26)

(42) $$d\mathfrak{p}_i = \sum_\lambda db_i^\lambda \mathfrak{p}_\lambda = \sum_\lambda db_{i\lambda}\mathfrak{p}^\lambda, \qquad -d\mathfrak{p}^i = \sum_\lambda db^{\lambda i}\mathfrak{p}_\lambda = \sum_\lambda db_\lambda^i \mathfrak{p}^\lambda.$$

§ 13. Kogrediente Differentiale.

Für einen beliebigen Vektor wird nunmehr:

(43) $$d\mathfrak{r} = d\sum_i r^i\mathfrak{p}_i = d\sum_i r_i\mathfrak{p}^i = \sum_i \delta r^i\cdot\mathfrak{p}_i = \sum_i \delta r_i\cdot\mathfrak{p}^i,$$

worin gesetzt ist:

(44) $$\delta r^i = dr^i + \sum_\lambda db_\lambda^i r^\lambda, \qquad \delta r_i = dr_i - \sum_\lambda db_i^\lambda r_\lambda.$$

Der Sinn des Zeichens δ hängt also von der Stellung des nachfolgenden Zeigers i ab. Er soll auch für extensive Argumente beibehalten werden. Dann ist gemäß (42):

(45) $$\delta\mathfrak{p}_i = 0, \qquad \delta\mathfrak{p}^i = 0.$$

Allgemein wird identisch, auch für extensive r_i, s^i:

(46) $$d\sum_i r_i s^i = \sum_i \delta r_i\cdot s^i + \sum_i r_i\cdot\delta s^i.$$

Hiervon ist (43), mit Rücksicht auf (45), ein Sonderfall.

Für eine beliebige extensive Größe $\mathfrak{A}$ (vgl. (33)) erhalten wir ebenso:

(47) $$d\mathfrak{A} = \sum \delta A_{i_1\cdots i_\alpha}^{k_1\cdots k_\beta}\left(\mathfrak{p}^{i_1}\middle|\cdots\middle|\mathfrak{p}^{i_\alpha}\middle|\mathfrak{p}_{k_1}\middle|\cdots\mathfrak{p}_{k_\beta}\right),$$

worin gesetzt ist:

(48) $$\delta A_J^K = dA_J^K - \sum_{\mu=1}^{\alpha}\sum_{\lambda=1}^{n} db_{i_\mu}^\lambda A_{J'_\mu\lambda J''_\mu}^K + \sum_{\nu=1}^{\beta}\sum_{\lambda=1}^{n} db_\lambda^{k_\nu} A_J^{K'_\nu\lambda K''_\nu},$$

und die Komplexe $(i_1\cdots i_\alpha)$, $(i_1\cdots i_{\mu-1})$, $(i_{\mu+1}\cdots i_\alpha)$, $(k_1\cdots k_\beta)$, $(k_1\cdots k_{\nu-1})$, $(k_{\nu+1}\cdots k_\beta)$ mit J, J'_μ, J''_μ, K, K'_ν, K''_ν bezeichnet sind.

*) Diese Freiheit der Bezeichnung ist seit langem üblich für das „Linienelement" ds, das nicht einmal eine lineare Differentialform, sondern die Wurzel aus einer quadratischen ist. Da Herr Einstein diese Bezeichnung neuerdings auf lineare Differentialformen angewandt hat, tragen wir um so weniger Bedenken, ihm darin zu folgen, als auch die Vektordifferentiale $d\mathfrak{p}$ keineswegs als exakte Differentiale angesprochen werden können.

Wenn $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{A}$ Invarianten sind, so gilt das gleiche von $d\mathfrak{r}$ bzw. $d\mathfrak{A}$. *Bei linearen Transformationen des Grundsystems sind daher die Größen* δr_i, δr^i, $\delta A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{k_1 \cdots k_\beta}$ *kogredient zu* r_i, r^i, $A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{k_1 \cdots k_\beta}$ *und sollen darum künftig die „kogredienten Differentiale" der Komponenten* r_i *usw. genannt werden.* Dabei ist zu beachten, daß sie rein formal definiert sind, also auch aus den Komponenten von nichtinvarianten, z. B. Quasi-Vektoren bzw. -Tensoren gebildet werden können; daß ihnen aber dann die Eigenschaft der Kogredienz nicht notwendig zukommt.

§ 14. Differentiale von Tensoren höheren Ranges.

Wir haben oben die Absicht ausgesprochen, extensive Größen höheren als ersten Ranges aus dem Spiele zu lassen, und wollen daher die Kogredienz des allgemeinen Differentials (48) noch auf andere Weise erhärten.

Zu diesem Ende beachten wir zunächst, daß in (48) jedem der Zeiger i_μ, k_ν rechter Hand eine Teilsumme, nämlich die zu μ bzw. ν gehörige Summe nach dem Zeiger λ entspricht. Wir wollen sie als das zugehörige *„Additament"* des betreffenden Zeigers i_μ, k_ν bezeichnen. Tilgen wir nun in einem kogredienten Differential irgend welche Additamente, so wollen wir diese Tilgung durch Einklammern der zugehörigen Zeiger in dem Symbol δA_J^K andeuten. Beispielsweise wird $\delta A_{i_1 \cdots i_\alpha}^{(k_1 \cdots k_\beta)}$ aus der Größe (48) durch Tilgung der zweiten, ebenso $\delta A_{(i_1 \cdots i_\alpha)}^{k_1 \cdots k_\beta}$ durch diejenige der ersten Doppelsumme rechter Hand hervorgehen, und $\delta A_{(i_1 \cdots i_\alpha)}^{(k_1 \cdots k_\beta)}$ wird mit dem gemeinen Differential identisch sein: $\delta A_{(J)}^{(K)} = d A_J^K$.

Alsdann kann an Stelle von (48) die induktive Definition

$$(49) \qquad \delta A_{iJ} = \delta A_{(i)J} - \sum_\lambda db_i^\lambda A_{\lambda J}, \qquad \delta A^{kK} = \delta A^{(k)K} + \sum_\lambda db_\lambda^k A^{\lambda K}$$

gesetzt werden, worin jeweils J bzw. K die Komplexe aller übrigen, hoch- oder tiefständigen Zeiger bedeuten. Ersichtlich ist (44) als einfachster Sonderfall hierin enthalten.

Aus (49) beweisen wir nun mühelos mittels Schlusses von n auf $n+1$ die Gültigkeit des distributiven Gesetzes für Tensorprodukte:

$$(50) \qquad \delta(A_J B_K) = \delta A_J \cdot B_K + A_J \cdot \delta B_K,$$

worin abermals J, K Komplexe beliebiger, teils hoch-, teils tiefständiger Zeiger sein können*). Zweitens beweisen wir den *„Faltungssatz"*:

$$(51) \qquad \delta \sum_L A_{LK}^{LJ} = \sum_L \delta A_{LK}^{LJ} = \sum_L \delta A_{(L)K}^{(L)J},$$

*) Der Vollständigkeit halber sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, die Definitionen (48), (49) durch (50) und die *symbolische* Darstellung eines Tensors vom Range m als Tensorprodukt von m Vektoren auf (44) zurückzuführen.

der als Sonderfall (46) enthält und ebenso bewiesen wird. Die Summen der zum oberen und unteren Zeiger L gehörigen Additamente, — insbesondere in dem Falle, daß L nur aus einem Zeiger λ besteht:

$$+\sum_{\lambda,\mu} db_\mu^\lambda\, A_{\lambda K}^{\mu J} \quad \text{und} \quad -\sum_{\lambda,\mu} db_\lambda^\mu\, A_{\mu K}^{\lambda J},$$

heben sich nämlich fort. Bis hierher sind alle Entwicklungen rein formal und unabhängig davon, ob die betrachteten Systeme eigentliche Tensoren, Quasi-Tensoren oder überhaupt Tensoren sind. Die Elemente selbst können z. B. ihrerseits wieder extensive Größen sein.

§ 15. Nachweis der Kogredienz.

Nunmehr sei die Kogredienz der δ-Differentiale erwiesen für alle eigentlichen Tensoren ersten bis m^{ten} Ranges. Dann ist sie auf Grund des distributiven Gesetzes gültig für alle solchen Tensoren höheren Ranges, die Tensorprodukte aus Tensoren m^{ten} und niederen Ranges sind. Denn wenn δA_J zu A_J, δB_K zu B_K kogredient ist, so sind $\delta A_J B_K$ und $A_J \delta B_K$, also auch ihre Summe $\delta(A_J B_K)$ zu $A_J B_K$ kogredient.

Nun sei J ein Komplex von m Zeigern beliebiger Stellung, $\{B^J\}$ ein zu $\{B_J\}$ kontravarianter Tensor (d. h. jeder Zeiger in B_J gegen seine Stellung in B^J gehoben oder gesenkt) und $\{r^i\}$ das System der Komponenten irgend eines Vektors. Dann ist $\{B^J r^i\}$ nach § 8, da B^J und r^i willkürlich wählbar sind, ein linear unabhängiger Tensor $(m+1)^{\text{ten}}$ Ranges, und daher gilt für einen Tensor A_{Ji} vom Range $m+1$ nach (51):

$$d\sum_{i,J} A_{Ji} B^J r^i = \sum_{i,J} \delta A_{Ji} \cdot B^J r^i + \sum_{i,J} A_{Ji}\, \delta(B^J r^i).$$

Hierin ist die linke Seite und, nach dem zuvor gesagten, die zweite Summe rechts invariant, also auch die erste; d. h. δA_{Ji} ist zu $B^J r^i$ kontra- und somit zu A_{Ji} kogredient, w. z. b. w. Ebensogut konnte i ein hochstehender Zeiger sein; unsere Behauptung ist daher allgemein erwiesen.

§ 16. Besondere Fälle.

Man erkennt ohne weiteres, daß die kogrediente Differentiation aus einem in irgend welchen gleichständigen Zeigern oder Zeigerkomplexen symmetrischen bzw. alternierenden Tensor wiederum einen in gleichem Sinne symmetrischen bzw. alternierenden Tensor erzeugt. Insbesondere wird für einen in n Zeigern alternierenden Tensor:

$$(52)\qquad \begin{cases} \delta A_{12\cdots n} = dA_{12\cdots n} - A_{12\cdots n} \sum_\lambda db_\lambda^\lambda, \\[2ex] \delta A^{12\cdots n} = dA^{12\cdots n} + A^{12\cdots n} \sum_\lambda db_\lambda^\lambda. \end{cases}$$

Für Tensoren zweiten Ranges wird ferner:

$$(53)\qquad \begin{cases} \delta c_{ik} = dc_{ik} - \sum\limits_{\lambda} db_i^{\lambda} c_{\lambda k} - \sum\limits_{\lambda} db_k^{\lambda} c_{i\lambda}, \\ \delta c_i^k = dc_i^k - \sum\limits_{\lambda} db_i^{\lambda} c_{\lambda}^k + \sum\limits_{\lambda} db_{\lambda}^k c_i^{\lambda}, \\ \delta c^{ik} = dc^{ik} + \sum\limits_{\lambda} db_{\lambda}^i c^{\lambda k} + \sum\limits_{\lambda} db_{\lambda}^k c^{i\lambda}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (40), (41) ist daher im besonderen

$$(54)\qquad \delta a_{ik} = 0, \qquad \delta a_i^k = 0, \qquad \delta a^{ik} = 0,$$

was auch unmittelbar aus (28) und (45) zu entnehmen ist und mit (40) umgekehrt (41) zur Folge hat. Danach muß auch

$$(55)\qquad \begin{cases} \delta T = 0, \quad \delta T^{-1} = 0, \quad \text{d. h. nach (52):} \\ dT = T \sum\limits_{\lambda} db_{\lambda}^{\lambda} \end{cases}$$

sein, was mit bekannten Sätzen über die Differentiation von Determinanten leicht zu verifizieren ist.

IV. Pfaffsche Kovarianten.

§ 17. Allgemeines.

Wir können in $\mathfrak{T}$ infinitesimale Verschiebungen in verschiedenen Richtungen vornehmen, d. h. verschiedene Systeme $\{d_1 t_{\lambda}\}$, $\{d_2 t_{\lambda}\}$, $\cdots$ von Differentialen bilden, z. B. indem wir jeweils alle Urvariabeln bis auf eine konstant halten. Der Wert, den du für spezielle Werte $\{d_{\varrho} t_{\lambda}\}$ annimmt, soll mit $d_{\varrho} u$ bezeichnet werden.

Schreiben wir abkürzungsweise D_{12} für $d_2 d_1 - d_1 d_2$, so ist $D_{12} u$ die Pfaffsche Kovariante der linearen Differentialform du. Dann und nur dann, wenn du ein exaktes Differential ist, dem Zeichen u also ein selbständiger *skalarer* Sinn zukommt, ist $D_{12} u$ identisch null. Für ein *extensives* Argument u ist $D_{12} u$ im allgemeinen nicht null.

Unabhängig davon, ob $D_{12} u$ skalar oder extensiv ist, besteht die Tatsache, daß $D_{12} u$ eine alternierende Bilinearform

$$D_{12} u = \sum U_{\varrho\sigma} d_1 t_{\varrho} d_2 t_{\sigma}, \qquad U_{\varrho\sigma} = - U_{\sigma\varrho}$$

der Differentiale der Urvariabeln ist.

Besitzt du einen tensoriellen Sinn (in welchem Falle es einen oder mehrere Zeiger tragen wird), so ist an Stelle von $d_2 d_1 u$ zweckmäßig $\delta_2 d_1 u$ zu bilden; dann soll $\delta_2 d_1 u - \delta_1 d_2 u$ mit $\Delta_{12} u$ bezeichnet werden. Auch kann du selbst bereits ein kogredientes Differential δv sein; dann schreiben wir $\Delta_{12}v$ für $\delta_2\delta_1 v - \delta_1\delta_2 v$. Auch $\Delta_{12}u$, $\Delta_{12}v$ sind unter allen Umständen *bilineare alternierende Differentialformen*, jedoch selbst keine Pfaffschen Kovarianten, vielmehr, wie wir sehen werden, Komponenten von extensiven Pfaffschen Kovarianten.

Sofern u, v einen selbständigen, extensiven oder skalaren Sinn haben, besitzen D und Δ die distributive Eigenschaft:

(56) $$D_{12}(uv) = D_{12}u \cdot v + u \cdot D_{12}v, \quad \Delta_{12}(uv) = \Delta_{12}u \cdot v + u \cdot \Delta_{12}v.\text{*)}$$

Es sei nämlich $dw = u\,dv$, so ist $d_2 d_1 w = d_2(u d_1 v)$, also

(57) $$D_{12}w = uD_{12}v + d_2 u\, d_1 v - d_1 u\, d_2 v;$$

die Anwendung auf $u \cdot dv + du \cdot v$ ergibt (56).

Sind du^1 bis du^n irgend welche, nicht notwendig integrable Linearformen, so ist

(58) $$d\mathfrak{s} = \sum_\lambda \mathfrak{p}_\lambda du^\lambda = \sum_\lambda \mathfrak{p}^\lambda du_\lambda$$

ein unendlich kleiner Vektor. Weil $\delta\mathfrak{p}_\lambda = 0$, wird

(59) $$\begin{cases} d_2 d_1 \mathfrak{s} = \sum_\lambda \delta_2 d_1 u^\lambda \mathfrak{p}_\lambda = \sum_\lambda \delta_2 d_1 u_\lambda \mathfrak{p}^\lambda, \\ D_{12}\mathfrak{s} \;= \sum_\lambda \Delta_{12}u^\lambda \mathfrak{p}_\lambda \;= \sum_\lambda \Delta_{12}u_\lambda \mathfrak{p}^\lambda. \end{cases}$$

§ 18. Pfaffsche Kovariante des Orientierungstensors.

Für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{r}$ wird gemäß (56):

(60) $$D_{12}\mathfrak{r} = D_{12}\sum_i r^i \mathfrak{p}_i = \sum_i r^i D_{12}\mathfrak{p}_i = \sum_i \Delta_{12} r^i \mathfrak{p}_i,$$

weil einerseits r^i ein Skalar, also $D_{12}r^i = 0$, andererseits $\delta\mathfrak{p}_i = 0$, also a fortiori $\Delta_{12}\mathfrak{p}_i = 0$ ist. Hieraus folgt, daß $D_{12}\mathfrak{p}_i$ zu $\mathfrak{p}_i$, $\Delta_{12}r^i$ zu r^i, analog $D_{12}\mathfrak{p}^i$ zu $\mathfrak{p}^i$ und $\Delta_{12}r_i$ zu r_i kogredient ist. Die Komponenten der Vektoren $D_{12}\mathfrak{p}_i$ bilden daher nicht nur einen *Quasi-Tensor*, wie diejenigen von $d\mathfrak{p}_i$, sondern einen *eigentlichen* Tensor, in dem wir schon jetzt unschwer den Krümmungstensor erkennen. Weil der Operator D ebenso wie d distributiv ist, müssen sich alle Schlüsse des § 12 wörtlich an $D_{12}\mathfrak{p}_i$ wiederholen lassen und alle Relationen (38) bis (42) an seinen Komponenten wiederkehren. Zunächst wollen wir diese jedoch ausrechnen, um nicht erst eine besondere Bezeichnung für sie einführen zu müssen. Wir wenden (58), (59) unmittelbar auf (42) an, indem wir $d\mathfrak{s} = d\mathfrak{p}_i$ bzw. $d\mathfrak{p}^i$ setzen und beachten, daß dabei in bezug auf den Zeiger i *keine* Additamente anzusetzen sind $(D_{12}\mathfrak{p}_i = \Delta_{12}\mathfrak{p}_{(i)})$. Dann wird:

*) Sie ist, unter Beachtung obiger Schreibweise, von der Kommutativität des Produktes uv unabhängig, was bei extensiven Argumenten zu beachten ist.

$$(61)\quad \begin{cases} D_{12}\mathfrak{p}_i = \sum_\lambda \Delta_{12} b^\lambda_{(i)} \mathfrak{p}_\lambda = \sum_\lambda \Delta_{12} b_{(i)\lambda} \mathfrak{p}^\lambda, \\ -D_{12}\mathfrak{p}^i = \sum_\lambda \Delta_{12} b^{\lambda(i)} \mathfrak{p}_\lambda = \sum_\lambda \Delta_{12} b^{(i)}_\lambda \mathfrak{p}^\lambda. \end{cases}$$

Analog zu (38), (39) ist dann:

$$(62)\quad \begin{cases} D_{12}\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}^k = \Delta_{12} b^k_{(i)}, & -\mathfrak{p}_i D_{12}\mathfrak{p}^k = \Delta_{12} b^{(k)}_i, \\ D_{12}\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}_k = \Delta_{12} b_{(i)k}, & -\mathfrak{p}^i D_{12}\mathfrak{p}^k = \Delta_{12} b^{i(k)}. \end{cases}$$

Das Analogon zu (36), $D_{12} a^k_i = 0$, ist durch diesen Ansatz formal noch nicht befriedigt; es folgt daher zunächst:

$$(63)\quad \Delta_{12} b^k_{(i)} = \Delta_{12} b^{(k)}_i,$$

und dann als Analogon zu (41), weil $D_{12} a_{ik} = D_{12} a^{ik} = 0$:

$$(64)\quad \Delta_{12} b_{(i)k} + \Delta_{12} b_{(k)i} = 0, \qquad \Delta_{12} b^{i(k)} + \Delta_{12} b^{k(i)} = 0.$$

Nunmehr entspricht den Gleichungen (40):

$$(65)\quad \sum_\mu \Delta_{12} b_{(i)\mu} a^{\mu k} = \Delta_{12} b^k_{(i)} = \Delta_{12} b^{(k)}_i = \sum_\lambda a_{i\lambda} \Delta_{12} b^{\lambda(k)},$$

nebst zwei weiteren Zeilen, deren Anschreibung überflüssig ist.

Indem wir endlich (61) in (60) einsetzen und vergleichen, wird:

$$(66)\quad \Delta_{12} r_i = -\sum_\lambda \Delta_{12} b^\lambda_{(i)} r_\lambda, \qquad \Delta_{12} r^i = \sum_\lambda \Delta_{12} b^{(i)}_\lambda r^\lambda.\text{*)}$$

§ 19. Rechnerische Nachprüfung.

Unsere Herleitung der Relationen (63) bis (65) könnte vielleicht zweifelhaft lassen, ob es sich tatsächlich nur um Folgerungen aus (41) und nicht etwa um neue, dem Tensor $\{db^k_i\}$ aufzuerlegende Bedingungen handelt. Setzen wir indessen für $\Delta_{12} b$ seine Bedeutung ein, so ist:

$$(67)\quad \Delta_{12} b^{(k)}_i = D_{12} b^k_i - \sum_\lambda (d_2 b^\lambda_i \, d_1 b^k_\lambda - d_1 b^\lambda_i \, d_2 b^k_\lambda),$$

$$(68)\quad \Delta_{12} b^k_{(i)} = D_{12} b^k_i + \sum_\lambda (d_2 b^k_\lambda d_1 b^\lambda_i - d_1 b^k_\lambda d_2 b^\lambda_i),$$

---

*) Ganz allgemein wird für skalare oder extensive $\mathfrak{q}$ identisch:

$$\Delta_{12}\mathfrak{q}_i = D_{12}\mathfrak{q}_i - \sum \Delta_{12} b^\lambda_{(i)} \mathfrak{q}_\lambda, \qquad \Delta_{12}\mathfrak{q}^i = D_{12}\mathfrak{q}^i + \sum \Delta_{12} b^{(i)}_\lambda \mathfrak{q}^\lambda,$$

worin (61) und (66) als Sonderfälle enthalten sind. Hieran kann man die Theorie des § 14 wörtlich für die Operatoren Δ, D an Stelle von δ, d wiederholen; nur wird sie so gut wie gegenstandslos dadurch, daß im Gegensatz zu $\{db^\lambda_i\}$ der Tensor $\{\Delta b^\lambda_{(i)}\}$ ein *eigentlicher*, kein Quasi-Tensor ist. Infolgedessen ist nämlich das Additament $-\sum \Delta b^\lambda_{(i)} \mathfrak{q}_\lambda$ bereits selbst zu $\mathfrak{q}_i$ kogredient, daher auch $D\mathfrak{q}_i$, und dieses ist für skalare Argumente überdies null.

(69) $$\Delta_{12} b_{(i)k} = D_{12} b_{ik} - \sum_{\lambda,\mu} a^{\lambda\mu}(d_1 b_{i\lambda}\, d_2 b_{k\mu} - d_2 b_{i\lambda}\, d_1 b_{k\mu}),$$

(70) $$\Delta_{12} b^{i(k)} = D_{12} b^{ik} - \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}(d_1 b^{\lambda i}\, d_2 b^{\mu k} - d_2 b^{\lambda i}\, d_1 b^{\mu k}).$$

In (69), (70) sind die Additamente nach (40) umgeformt, um zu zeigen, daß sie in i, k alternieren. Daher wird, unter Beachtung von (41):

(71) $$\begin{cases} \Delta_{12} b_{(i)k} + \Delta_{12} b_{(k)i} = D_{12} b_{ik} + D_{12} b_{ki} = D_{12} a_{ik}, \\ \Delta_{12} b^{i(k)} + \Delta_{12} b^{k(i)} = D_{12} b^{ik} + D_{12} b^{ki} = - D_{12} a^{ik}, \end{cases}$$

wonach (64) in der Tat eine Folge von (41) ist. Auf Grund von (67), (68) aber erweist sich (63) als eine Identität und nunmehr (65) als einfache Konsequenz von (40) unter Beachtung von (54)*).

Anmerkung. Der Orientierungstensor $\{db_k^i\}$ ist die Verallgemeinerung des bei der Bewegung orthogonaler Einheitssysteme auftretenden Systems der „*Rotationen*"; für $a^{ik} = a_k^i = a_{ik}$ wird in der Tat $da_{ik} = 0$, $db_{ik} = - db_{ki}$; also der Tensor $\{db\}$ alternierend. Denken wir uns im allgemeinen Falle den Tensor $\{db_{ik}\}$ vorgeschrieben und die zugehörigen a_{ik} gesucht, so zeigt (41), daß diese durch ein System von Anfangswerten eindeutig bestimmt sind, sofern $\{db_{ik}\}$ der Integrabilitätsbedingung $D_{12} b_{ik} + D_{12} b_{ki} = 0$ genügt. Man zeigt leicht, daß das *identische* Verschwinden des Tensors $\{\Delta b_{ik}\}$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß das n-Bein $\{\mathfrak{p}_i\}$ in eine *euklidische* Mannigfaltigkeit von n Dimensionen eingebettet, d. h. durch eine *quadratische* Matrix von skalaren Komponenten dargestellt werden kann.

V. Maßbestimmung in $\mathfrak{T}$.

§ 20. Linienelement und geradeste Linien.

Wenn in $\mathfrak{T}$ eine Maßbestimmung eingeführt wird, so muß zwei benachbarten Punkten $\{t_\varrho\}$ und $\{t_\varrho + dt_\varrho\}$ ein Linienelement von bestimmter Länge ds zugeordnet werden; durch unsere innere Orientierung ist dieses zugleich als ein *Vektor* $d\mathfrak{s}$ von der Länge ds gekennzeichnet, dessen Komponenten lineare, linear unabhängige Differentialformen $du^i = \sum_\varrho u^{i\varrho} dt_\varrho$, *nicht notwendig aber exakte Differentiale***) sein werden; wir nennen sie die *Grundformen* der Maßbestimmung:

---

*) Beispielsweise wird $\delta_2 d_1 b_{(i)}^k = \delta_2 \sum_\mu d_1 b_{(i)\mu}\, a^{\mu k} = \sum_\mu \delta_2 d_1 b_{(i)\mu}\, a^{\mu k}$ usw.

**) Freilich könnte dies ohne Schaden für die Allgemeinheit angenommen werden, da ja auch $(ds)^2 = \sum_{\varrho\sigma} c^{\varrho\sigma} dt_\varrho dt_\sigma$ werden wird. Indessen bringt diese Annahme eine

$$d\mathfrak{s} = \sum_i \mathfrak{p}_i du^i = \sum_i \mathfrak{p}^i du_i, \tag{72}$$

$$(d\mathfrak{s})^2 = (ds)^2 = \sum_{i,k} a_{ik} du^i du^k = \sum_i du^i du_i = \sum_{i,k} a^{ik} du_i du_k. \tag{73}$$

Der Vektor $\mathfrak{r} = d\mathfrak{s} : ds$ hat die Länge 1; seine Änderung $d\mathfrak{r}$ längs einer Kurve C mit dem Bogenelement ds mißt daher die *Richtungsänderung* von $d\mathfrak{s}$, so daß sinngemäß

$$\mathfrak{k} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathfrak{s}}{ds}\right) \tag{74}$$

als *„Krümmungsvektor"* des betrachteten Kurvenpunktes bezeichnet werden kann. Aus $\mathfrak{r}^2 = 1$ folgt $\mathfrak{r}d\mathfrak{r} = 0$, also $\mathfrak{r}\mathfrak{k} = 0$, d. h. der Krümmungsvektor steht auf der Kurve senkrecht, sofern er nicht null ist. Ist letzteres in jedem Punkte der Kurve C der Fall, so ist C eine *„geradeste"* Linie im Sinne unserer Maßbestimmung und Orientierung. Die Änderung

$$d^2\mathfrak{s} = dd\mathfrak{s} = \sum_i \mathfrak{p}_i \delta du^i \tag{75}$$

von $d\mathfrak{s}$ ist alsdann mit $d\mathfrak{s}$ gleichgerichtet, d. h. ihre Komponenten sind zu denen von $d\mathfrak{s}$ proportional:

$$\begin{cases} \delta du^1 : \delta du^2 : \cdots : \delta du^n = du^1 : du^2 : \cdots : du^n, \\ \text{oder} \qquad \delta du^i du^k - \delta du^k du^i = 0. \end{cases} \tag{76}$$

Um dies auch rechnerisch zu erweisen, zerlegen wir $\mathfrak{k}$ in seine Komponenten k^i. Es ist

$$\mathfrak{r} = d\mathfrak{s} : ds = \sum \mathfrak{p}_i (du^i : ds), \quad \text{also} \quad d\mathfrak{r} = \sum \mathfrak{p}_i \delta(du^i : ds) \quad \text{und}$$

$$k^i = \frac{\delta}{ds}\frac{du^i}{ds}, \quad \text{analog} \quad k_i = \frac{\delta}{ds}\frac{du_i}{ds}. \tag{77}$$

Weil ds invariant, also $\delta ds = dds = d^2 s$, wird weiter:

$$k^i = \frac{ds\,\delta du^i - du^i d^2 s}{ds^3}, \tag{78}$$

und sonach im Falle $\mathfrak{k} = 0$ in der Tat $\delta du^i : du^i = \delta du^k : du^k = d^2 s : ds$.

Erweitern wir (78) mit ds, so ist Zähler und Nenner rational; insbesondere wird, weil $(ds)^2 = (d\mathfrak{s})^2$, nach (75):

$$ds\, d^2 s = d\mathfrak{s}\, d^2\mathfrak{s} = \sum_k d\mathfrak{s}\, \mathfrak{p}_k \delta du^k = \sum_k du_k \delta du^k, \tag{79}$$

Unsymmetrie in die Betrachtung, indem alsdann die komplementären Komponenten $dt^\varrho = \sum c^{\varrho\sigma} dt_\sigma$ nicht notwendig exakte Differentiale sind, somit das Grundvektorensystem vor seinem Komplement bevorzugt erscheint.

was natürlich auch rein skalar aus (73) bewiesen werden kann. Setzen wir noch im erweiterten Zähler von (78): $(ds)^2 = \sum du_k du^k$, so kommt:

$$k^i = \sum_k \frac{du_k}{ds} \cdot \frac{\delta du^i du^k - \delta du^k du^i}{ds^3}. \tag{80}$$

Aus (76) folgt demnach auch umgekehrt $\mathfrak{k} = 0$.*)

Die geradesten Linien sind durch unsere Maßbestimmung nicht eindeutig erklärt. Je nachdem, wie wir die Differentiale da_{ik} des *„Messungstensors"* $\{a_{ik}\}$ gemäß (41) in die Komponenten des *„Orientierungstensors"* $\{db_{ik}\}$ zerlegen, werden wir verschiedene Systeme geradester Linien erhalten.

§ 21. Kürzeste Linien.

Im Gegensatz zu den geradesten sind die *„kürzesten"*, d. h. diejenigen Linien, längs denen die erste Variation der Bogenlänge $\int ds$ verschwindet, durch den Messungstensor allein *eindeutig* bestimmt. Auch *ihre* Differentialgleichung wird am übersichtlichsten vektoriell dargestellt; bei der in jedem Stadium der Rechnung möglichen Übersetzung ins Skalare empfiehlt es sich, trotz der Unabhängigkeit des Ergebnisses vom Orientierungstensor, diesen gleichwohl zur kogredienten Differentiation heranzuziehen, weil dadurch die Rechnung außerordentlich vereinfacht wird.

Es sei C ein Kurvenbogen zwischen den Punkten P_1 und P_2; mit d_1 bezeichnen wir die Differentiation *längs* C, mit d_2 eine solche *quer* zu C („Variation" δ in der üblichen Bezeichnung; das Zeichen δ ist hier natürlich nicht mehr verfügbar). Es handelt sich darum, C so zu bestimmen, daß für jede Querdifferentiation, sofern nur die Endpunkte P_1, P_2 festbleiben, $\int_C d_2 d_1 s = 0$ ist.

Wie in (79) folgern wir aus $(ds)^2 = (d\mathfrak{s})^2$: $d_1 s\, d_2 d_1 s = d_1\mathfrak{s}\, d_2 d_1 \mathfrak{s}$, also für $\mathfrak{r}_1 = d_1\mathfrak{s} : d_1 s$:

$$d_2 d_1 s = \mathfrak{r}_1\, d_2 d_1 \mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1 D_{12}\mathfrak{s} + \mathfrak{r}_1 d_1 d_2 \mathfrak{s}. \tag{81}$$

In unserer Darstellungsweise liefert also die übliche Vertauschung von Längs- und Querdifferentiation ein Ergänzungsglied $D_{12}\mathfrak{s} = d_2 d_1 \mathfrak{s} - d_1 d_2 \mathfrak{s}$; dies stört jedoch keineswegs, da es, bilinear in den *ersten* Differentialen, keine *zweiten* Differentiale enthält.

Das zweite Differential $d_1 d_2 \mathfrak{s}$ wird in bekannter Weise durch partielle Integration beseitigt; d. h. wir beachten, daß

$$\mathfrak{r}_1 d_1 d_2 \mathfrak{s} = d_1(\mathfrak{r}_1 d_2 \mathfrak{s}) - d_1 \mathfrak{r}\, d_2 \mathfrak{s}$$

*) An (80) bestätigen wir wiederum leicht, daß $\sum_i k^i du_i = 0$, d. h. $\mathfrak{k}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$ ist.

ist, und daß das erste Glied rechter Hand zu $\int\limits_C d_2 d_1 s$ den Beitrag

$$\int\limits_{P_1}^{P_2} d_1(\mathfrak{r}_1 d_2\mathfrak{s}) = |\mathfrak{r}_1 d_2 \mathfrak{s}|_{P_1}^{P_2}$$

liefert; dieser hat den Wert Null, weil in P_1 und P_2 die Querverschiebung $d_2\mathfrak{s}$ verschwinden soll. Demnach wird endlich:

$$\int\limits_C d_2 d_1 s = \int\limits_C (\mathfrak{r}_1 D_{12}\mathfrak{s} - d_1 \mathfrak{r}_1 d_2 \mathfrak{s}), \tag{82}$$

und nach bekannten Schlüssen muß der Integrand rechter Hand in *jedem* Punkte einer Extremalen C für *jede* Querverschiebung $d_2\mathfrak{s}$ verschwinden. In vektorieller Schreibweise unter Verwendung des Krümmungsvektors $\mathfrak{k}_1$ von C lautet daher die Differentialgleichung der kürzesten Linien:

$$\mathfrak{r}_2 \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{r}_1 \cdot \frac{D_{12}\mathfrak{s}}{d_1 s\, d_2 s}, \tag{83}$$

oder ausführlich:

$$d_1 \frac{d_1\mathfrak{s}}{d_1 s} \cdot d_2\mathfrak{s} = \frac{d_1\mathfrak{s}}{d_1 s} \cdot D_{12}\mathfrak{s}. \tag{84}$$

§ 22. Bedingung der Übereinstimmung.

Da die Definition der *geradesten* Linien noch eine Willkür enthielt, liegt die Frage nahe, ob der Orientierungstensor $\{db_k^i\}$ nicht derart gewählt werden kann, daß die kürzesten Linien zugleich die geradesten sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist offenbar

$$D_{12}\mathfrak{s} = 0, \tag{85}$$

in dem Sinne, daß *identisch*, d. h. in *jedem* Punkte von $\mathfrak{T}$ und für *jede* Wahl von d_1, d_2 stets $d_2 d_1 \mathfrak{s} = d_1 d_2 \mathfrak{s}$ sein soll. *Diese Bedingung ist, wie wir alsbald sehen werden, nichts anderes als die Christoffelsche Symmetrie* (13); ihr kann also in der Tat genügt werden, und sie bestimmt alsdann die äußere Orientierung, d. h. den Tensor $\{db_i^k\}$ *eindeutig*.

Zerlegen wir $D_{12}\mathfrak{s}$ nach (59) in seine Komponenten, so treten an Stelle von (85) die n skalaren Bedingungen

$$\Delta_{12} u^i = 0, \quad \text{d. h.} \quad \delta_1 d_2 u^i = \delta_2 d_1 u^i, \quad \text{oder} \tag{86}$$

$$D_{12} u^i + \sum_\lambda (d_2 b_\lambda^i d_1 u^\lambda - d_1 b_\lambda^i d_2 u^\lambda) = 0. \tag{87}$$

VI. Ableitungen.

§ 23. Gemeine und kogrediente Ableitungen.

Die Grundformen du^i sollen linear unabhängig sein; daher läßt sich jede lineare Differentialform db als $\sum\limits_i b_i du^i$ oder $\sum b^i du_i$ darstellen. In folgerichtiger Durchbildung unserer allgemeinen Verwendung des Differentialzeichens bezeichnen wir b_i mit $\frac{\partial b}{\partial u^i}$, b^i mit $\frac{\partial b}{\partial u_i}$, setzen also

$$db = \sum_i \frac{\partial b}{\partial u^i}\, du^i = \sum_i \frac{\partial b}{\partial u_i}\, du_i, \tag{88}$$

wonach

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b}{\partial u_i} = \sum_k a^{ik} \frac{\partial b}{\partial u^k}, \qquad && \frac{\partial b}{\partial u^i} = \sum_k a_{ik} \frac{\partial b}{\partial u_k}, \\ &\frac{\partial u^i}{\partial u_k} = a^{ik}, && \frac{\partial u_i}{\partial u^k} = a_{ik}, \end{aligned} \tag{89}$$

und allgemein (unabhängig von der Zeigerstellung):

$$\frac{\partial b}{\partial u^i} = \sum_\varrho \frac{\partial b}{\partial v^\varrho} \frac{\partial v^\varrho}{\partial u^i} \tag{90}$$

sein muß. Das wesentlich neue Element dieser Verallgemeinerung liegt darin, daß nur db, du^i usw., nicht aber b, u^i usw. selbst einen Sinn zu haben brauchen.

Es treten auch Linearformen auf, die mit δ an Stelle von d bezeichnet sind. Dementsprechend müßten wir ein dem geschweiften ∂ entsprechendes „partielles" Delta erfinden, wenn nicht glücklicherweise die kogredienten Differentiale auf die *Zähler* unseres Ableitungssymbols beschränkt blieben. Hierbei ist es nun völlig ausreichend und unmißverständlich, zu schreiben:

$$\delta b = \sum_i \frac{\delta b}{\partial u^i}\, du^i = \sum_i \frac{\delta b}{\partial u_i}\, du_i. \tag{91}$$

Auch hierfür gelten selbstverständlich (89) und (90). Die Koeffizienten $\frac{\delta b}{\partial u^i}$, $\frac{\delta b}{\partial u_i}$, in denen, sofern δb von db verschieden sein soll, das Zeichen b natürlich noch einen oder mehrere Zeiger trägt, wollen wir *„kogrediente Ableitungen"* von b nennen, entsprechend den kogredienten Differentialen, durch deren Zerlegung sie entstehen. Sie sind „kogredient" allerdings nur in einem erweiterten Sinne des Wortes; denn sie bilden einen Tensor vom *nächst höheren* Range und tragen dementsprechend im Nennersymbol einen neuen Zeiger. Dabei ist zu beachten, daß *dessen Stand für das ganze Ableitungssymbol der umgekehrte ist, wie für den Nenner allein:* Ein im Nenner *hochständiger* Zeiger hat für den Tensor $\left\{\frac{\partial b}{\partial u^i}\right\}$ die Bedeutung eines *tiefständigen* und umgekehrt, wie dies schon die Bezeichnung $\frac{\partial b}{\partial u^i} = b_i$ im Eingang dieses Paragraphen zum Ausdruck brachte.

§ 24. Absoluter Differentialkalkul.

Wir kommen nunmehr zu dem Nachweis, daß der Orientierungstensor tatsächlich den Forderungen (85) bis (87) entsprechend gewählt werden kann, und daß alsdann unsere „*kogredienten*“ Ableitungen mit denen des „*absoluten*“ Differentialkalküls identisch sind. Genauer gesagt: Daß sie diese als *Sonderfall* enthalten, in welchem die Grundformen du^i exakte Differentiale und alle Zeiger des abzuleitenden Tensors tiefständig sind.*)

In den Ableitungen ausgedrückt lautet (48):

$$\frac{\delta}{\partial u^l} A^K_J = \frac{\partial}{\partial u^l} A^K_{J.} - \sum_{\mu=1}^{\alpha} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u^l} b^\lambda_{i_\mu} A^K_{J'_\mu \lambda J''_\mu} + \sum_{\nu=1}^{\beta} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u^l} b^{k_\nu}_\lambda A_J^{K'_\nu \lambda K''_\nu}.$$

Dieser Ausdruck enthält (11) als Spezialfall, wenn wir zeigen, daß bei integrablen Grundformen du^i:

$$\frac{\partial}{\partial u^k} b^\lambda_i = \left\{ {i\,k \atop \lambda} \right\} \tag{92}$$

ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen (12) und (13) erfüllt sind, wenn wir $\left\{ {i\,k \atop \lambda} \right\}$ durch (92) definieren. Nach dem soeben allgemein gesagten ist aber unter dieser Annahme a_{ikl} mit $\frac{\delta}{\partial u^l} a_{ik}$ identisch und dieses nach (41) oder, was dasselbe bedeutet, (54), in der Tat null. Ferner ist in (87) das Additament in unserer Bezeichnung gleich

$$\sum_{\lambda, \mu} \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu} b^i_\lambda - \frac{\partial}{\partial u^\lambda} b^i_\mu \right) d_1 u^\lambda \, d_2 u^\mu.$$

Setzen wir daher die Bedingung $\Delta_{12} u^i = 0$ als erfüllt und zugleich die du^i als exakte Differentiale, d. h. $D_{12} u^i = 0$ voraus, so muß

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} b^i_\lambda = \frac{\partial}{\partial u^\lambda} b^i_\mu, \text{**)} \tag{93}$$

d. h. mit Rücksicht auf (92), in der Tat (13) erfüllt sein.

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen und der Anschluß an die älteren Theorien hergestellt.

---

*) Die erste Annahme findet sich durchgehends in der ganzen Literatur, die zweite ist unwesentlich. Bereits Ricci und Levi-Civita betrachten l. c. den „*kontravarianten*“ Tensor mit lauter hochständigen Zeigern, bilden aber seine Ableitung in einer für die noch unüberwundene Einseitigkeit der Auffassung sehr kennzeichnenden Weise, indem sie die Zeiger vor der Bildung der Ableitung senken und nachträglich wieder heben.

**) Vektoriell bedeutet dies: $\frac{\partial \mathfrak{p}_\lambda}{\partial u^\mu} \mathfrak{p}_i = \frac{\partial \mathfrak{p}_\mu}{\partial u^\lambda} \mathfrak{p}_i$, also $\frac{\partial \mathfrak{p}_\lambda}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \mathfrak{p}_\mu}{\partial u^\lambda}$; dies ist in der Tat formal die Bedingung (85) der Integrabilität von $d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{p}_\lambda du^\lambda$.

§ 25. Verallgemeinerung für nichtintegrable Grundformen.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Werte $\frac{\partial}{\partial u^k} b_i^\lambda$ für den allgemeinen Fall an, daß die Grundformen keine exakten Differentiale sind. Alsdann sei

(94) $$D_{12} u^i = \sum_{\lambda,\mu} U^i_{\lambda\mu}\, d_1 u^\lambda\, d_2 u^\mu,\text{*)}$$

darin:

(95) $$U^i_{\lambda\mu} = - U^i_{\mu\lambda}.$$

Nach (87) ist alsdann an Stelle von (93):

(96) $$\frac{\partial}{\partial u^\mu} b^i_\lambda - \frac{\partial}{\partial u^\lambda} b^i_\mu + U^i_{\lambda\mu} = 0,$$

während (41) formal ungeändert bleibt. Setzen wir daher

(97) $$\frac{\partial}{\partial u^k} b_i^\lambda = \left\{ {i\,k \atop \lambda} \right\} + h^\lambda_{ik},$$

wobei $\left\{ {i\,k \atop \lambda} \right\}$ nach wie vor durch (8) definiert sein soll, so wird

(98) $$h^i_{\lambda\mu} - h^i_{\mu\lambda} + U^i_{\lambda\mu} = 0,$$

(99) $$\sum_\lambda h^\lambda_{il}\, a_{\lambda k} + \sum_\lambda h^\lambda_{kl}\, a_{\lambda i} = 0,$$

woraus sich durch eine zu § 2, (14ff.) analoge leichte Rechnung**)

(100) $$2 h^l_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a^{l\mu} \left(a_{i\lambda}\, U^\lambda_{\mu k} + a_{k\lambda}\, U^\lambda_{\mu i} \right) - U^l_{ik}$$

und nunmehr aus (97) $d b_i^k$ usw. ergibt.***)

---

*) Ist $du^i = \sum_\varrho u^{i\varrho}\, dt_\varrho$ und umgekehrt $dt_\varrho = \sum_\lambda t_{\varrho\lambda}\, du^\lambda$, so wird:

$$D_{12} u^i = \sum_{\varrho,\sigma} \left(\frac{\partial u^{i\varrho}}{\partial t_\sigma} - \frac{\partial u^{i\sigma}}{\partial t_\varrho} \right) d_1 t_\varrho\, d_2 t_\sigma, \quad \text{also} \quad U^i_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho,\sigma} \left(\frac{\partial u^{i\varrho}}{\partial t_\sigma} - \frac{\partial u^{i\sigma}}{\partial t_\varrho} \right) t_{\varrho\lambda}\, t_{\sigma\mu}.$$

**) Durch Verwendung der Lückenbezeichnung (S. 195, Fußnote) erhält man eine besonders einfache Darstellung. Wir schreiben etwa $h^{\circ\lambda\circ}_{i\circ k}$ und $U^{i\circ\circ}_{\circ\lambda\mu}$ für h^λ_{ik} und $U^i_{\lambda\mu}$. Dann lautet zunächst (99): $h_{ikl} + h_{kil} = 0$, und aus (98) erhalten wir durch Senken des Zeigers i: $h_{\lambda i\mu} - h_{\mu i\lambda} + U_{i\lambda\mu} = 0$. Nunmehr ergibt sich unmittelbar:

$$2 h_{ilk} = U_{ilk} + U_{kli} - U_{lik},$$

und durch Heben des Zeigers l folgt (100) in der Schreibweise

$$2 h^{\circ l\circ}_{i\circ k} = U^{\circ l\circ}_{i\circ k} + U^{\circ l\circ}_{k\circ i} - U^{l\circ\circ}_{\circ ik}.$$

***) Es sei nochmals daran erinnert, daß der Orientierungstensor ein Quasitensor ist; wäre er ein eigentlicher Tensor, so wäre die Christoffelsche Symmetrie in zwei gleichständigen Zeigern eine invariante Eigenschaft und könnte durch Übergang zu

VII. Höhere Ableitungen.

§ 26. Integrabilitätsbedingungen.

Unter $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda}$ und $\frac{\delta^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda}$ sind folgerichtig die Koeffizienten von du^μ in $d\frac{\partial \varphi}{\partial u^\lambda}$ und $\delta\frac{\partial \varphi}{\partial u^\lambda}$ zu verstehen, wobei $d\varphi$ irgend eine Linearform bezeichnet:

(101) $$d\frac{\partial \varphi}{\partial u^\lambda} = \sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} du^\mu, \quad \delta\frac{\partial \varphi}{\partial u^\lambda} = \sum_\mu \frac{\delta^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} du^\mu.$$

Es liegt in der Natur der Sache, daß die Verallgemeinerung der *gemeinen* zweiten Ableitungen so gut wie gar nicht benötigt wird, da bei zweckmäßiger Rechnung das *kogrediente* Differential an Stelle des *gemeinen* benutzt werden wird. Dazu kommt, daß die gemeinen höheren Ableitungen im Gegensatz zu den kogredienten nur einen Quasitensor bilden, so daß eine Reihe wichtiger Eigenschaften beim Übergang zu nichtintegrablen Grundformen verloren geht, vor allem die Symmetrie

(102) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}$$

als Integrabilitätsbedingung für $d\varphi$. In kogredienter Darstellung wird mit Rücksicht auf (86)

(103) $$D_{12}\varphi = \sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} - \frac{\delta^2 \varphi}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} \right) d_1 u^\lambda d_2 u^\mu;$$

die Integrabilitätsbedingung für $d\varphi$ besteht also, *unabhängig davon, ob die Grundformen integrabel sind oder nicht*, in der Gleichheit der *kogredienten* mittleren Ableitungen. Nun ist explizite:

(104) $$\frac{\delta^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} - \sum_\varrho \frac{\partial b_\lambda^\varrho}{\partial u^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial u^\varrho},$$

und unter den *beiden* Voraussetzungen $\Delta_{12} u^i = 0$, $D_{12} u^i = 0$ ist nach (93) das Additament in den Zeigern λ, μ symmetrisch, daher die Differenz der kogredienten gleich der der gemeinen mittleren Ableitungen und (102) mit $D_{12}\varphi = 0$ gleichwertig.

§ 27. Differentialparameter $\Delta^2 \varphi$ im binären Fall.

Dieser Hinweis ist wichtig für die zweifache Darstellung des Beltramischen Differentialparameters $\Delta^2 \varphi$ im Falle $n = 2$, wobei wir die bekannte Bezeichnung $a_{11} = E$, $a_{12} = F$, $a_{22} = G$, $du^1 = du$, $du^2 = dv$ verwenden wollen:

---

nichtintegrablen Grundformen nicht verloren gehen. Ebenso ist natürlich $\left\{ U_{\lambda\mu}^i \right\}$ ein Quasitensor, da er durch besondere Wahl der Grundformen zum identischen Verschwinden gebracht werden kann.

(105) $$\Delta^2\varphi = \frac{1}{T^2}\left[E\frac{\delta^2\varphi}{\partial v^2} - F\left(\frac{\delta^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\delta^2\varphi}{\partial v\,\partial u}\right) + G\frac{\delta^2\varphi}{\partial u^2}\right],$$

(106) $$\Delta^2\varphi = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{1}{T}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right].$$

Die zweite Darstellung ist nur gültig unter den Annahmen $\Delta_{12}u^i = 0$, $D_{12}u^i = 0$. Unabhängig von ihnen muß sie nach § 26 lauten:

(107) $$\Delta^2\varphi = \frac{1}{T}\left[\frac{\delta}{\partial v}\,\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - \frac{\delta}{\partial u}\,\frac{1}{T}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right],$$

und geht dann unmittelbar in (105) über, wenn man beim Ausführen der kogredienten Differentiationen beachtet, daß sich E, F, G, T wie Konstanten verhalten. Die wesentliche Folgerung, die man aus (106) zu ziehen pflegt, daß nämlich für $\Delta^2\varphi = 0$ die Form:

$$d\psi = \frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \frac{1}{T}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv$$

integrabel ist, fließt nach § 26 unabhängig von der Integrabilität der Grundformen unmittelbar aus (107).

§ 28. Derselbe für n Variable.

Für $n \geqq 2$ definiert man $\Delta^2\varphi$ als Faltung analog zu (105):

(108) $$\Delta^2\varphi = \sum_i \frac{\delta^2\varphi}{\partial u^i\,\partial u_i} = \sum_i \frac{\delta}{\partial u^i}\sum_k a^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial u^k} = \sum_{i,k} a^{ik}\frac{\delta^2\varphi}{\partial u^i\,\partial u^k}.$$

Explizite ist andererseits unter Voraussetzung von (93):

$$\Delta^2\varphi = \sum_i\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\,\partial u_i} - \sum_\lambda \frac{\partial b_i^\lambda}{\partial u^i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_\lambda}\right) = \sum_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\,\partial u_i} - \sum_{i,\lambda}\frac{\partial b_i^i}{\partial u^\lambda}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_\lambda}.$$

Vertauscht man in der Doppelsumme die Zeiger und beachtet (55):

(109) $$\Delta^2\varphi = \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} - \sum_i \frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial u^i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}$$
$$= \frac{1}{T}\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(T\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right) = \frac{1}{T}\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(T\sum_k a^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial u^k}\right),$$

so erhält man das Analogon zu (106). Dasjenige zu (107):

(110) $$\Delta^2\varphi = \frac{1}{T}\sum_i \frac{\delta}{\partial u^i}\left(T\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right) = \frac{1}{T}\sum_i \frac{\delta}{\partial u^i}\left(T\sum_k a^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial u^k}\right),$$

geht wegen $\delta T = 0$ *unmittelbar* in (108) über, ist im Gegensatz zu (109) von der Annahme (93) unabhängig und enthält, wenn diese gemacht wird, (109) als Sonderfall, weil sich alsdann die Additamente gegenseitig aufheben.*)

*) Letzteres gilt übrigens für jeden zu $\{T\varphi^i\}$ kogredienten d. h. in allen Zeigern $k_1, \cdots, k_n$ alternierenden Tensor $\left\{T^i_{k_1\cdots k_n}\right\}$.

VIII. Der Krümmungstensor.

§ 29. Alternierende Eigenschaften.

Wenn die Grundformen exakte Differentiale sind, ist nach (92):

$$\frac{\partial}{\partial u^k} b_{i\lambda} = \begin{bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{bmatrix},$$

wonach durch Vergleich mit (18) aus (69) folgt:

(111) $$\Delta_{12} b_{(i)k} = \sum_{l,m} (iklm)\, d_1 u^l\, d_2 u^m, *)$$

(112) $$\mathsf{K} = \sum_{i,k} \Delta_{34} b_{(i)k}\, d_1 u^i\, d_2 u^k = \sum_{i,k} D_{34} \mathfrak{p}_i\, d_1 u^i\, \mathfrak{p}_k\, d_2 u^k.$$

Weil $d_1 u^i$ ein Skalar, ist $D_{34} d_1 u^i = 0$, also

(113) $$\sum_i D_{34} \mathfrak{p}_i\, d_1 u^i = D_{34} \sum_i \mathfrak{p}_i\, d_1 u^i = D_{34} d_1 \mathfrak{s},$$

somit endlich:

(114) $$\mathsf{K} = D_{34} d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s}.$$

Die Darstellungen (112), (114) *sind infolge ihrer Invarianz von der Annahme* $D_{12} u^i = 0$ *unabhängig.* An Stelle der Relationen (19) bis (22) treten jetzt:

(115) $$D_{34} d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s} = - D_{43} d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s},$$

(116) $$D_{34} d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s} = - D_{34} d_2 \mathfrak{s}\, d_1 \mathfrak{s},$$

(117) $$D_{34} d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s} = D_{12} d_3 \mathfrak{s}\, d_4 \mathfrak{s},$$

(118) $$(D_{12} d_3 \mathfrak{s} + D_{23} d_1 \mathfrak{s} + D_{31} d_2 \mathfrak{s})\, d_4 \mathfrak{s} = 0. **)$$

Die beiden ersten folgen durch nahezu wörtliche Übersetzung der Beweise zu (19), (20) in die neue Ausdrucksweise. Allgemein ist nämlich:

$$D_{34} w = - D_{43} w, \qquad D_{34} \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} + D_{34} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{q} = D_{34} (\mathfrak{q}\mathfrak{r}) = 0,$$

letzteres, weil $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ ein Skalar ist.***) Ersichtlich werden hierbei lediglich

---

*) Setzt man

$$\Delta_{12} b^k_{(i)} = \sum_{l,m} \{iklm\}\, d_1 u^l\, d_2 u^m,$$

so ist nach (65)

$$\{iklm\} = \sum_\lambda a^{k\lambda} (i\lambda lm),$$

während man aus (67) eine zu (18) analoge Darstellung von $\{iklm\}$ durch die Größen $\left\{\begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix}\right\}$ und ihre Ableitungen erhält. Auch $\{iklm\}$ tritt in Christoffels Rechnung auf.

**) Diese Darstellung entspricht nicht genau (22), sondern der gleichwertigen (22a), unter gleichzeitiger Versetzung der Differentiationszeiger 1, 2, 3, 4.

***) Ebenso wurde (64) bewiesen, welches mit (116) gleichwertig, andererseits eine Folge aus der mit (12) bzw. (15) gleichwertigen Bedingung (41) ist. Dementsprechend mußte beim Beweise von (20) auf (15) zurückgegriffen werden.

die Eigenschaften der *äußeren* Orientierung, noch nicht aber die Maßbestimmung in $\mathfrak{T}$ herangezogen.

§ 30. Symmetrische und zyklische Eigenschaft.

Andererseits ist klar, daß (21), (22) ohne die Maßbestimmung in $\mathfrak{T}$ unmöglich bewiesen werden können. Denn die Zeiger i, k des Symbols $(i\,k\,l\,m)$ beziehen sich auf eine *vektorielle* Zerlegung nach den *Grundvektoren*, dagegen l, m auf eine *differentielle* nach den *Grundformen*. So lange daher diese mit jenen noch nicht durch die Maßbestimmung „transformatorisch gekoppelt“ sind, hindert uns nichts, beide unabhängig voneinander zu transformieren, wobei natürlich eine invariante Beziehung zwischen den zugehörigen Zeigerpaaren unmöglich ist.

Der Klammerausdruck in (118) entsteht durch den Operator:

$$
(119)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{123} = D_{12} d_3 + D_{23} d_1 + D_{31} d_2 \\ \qquad = d_3 d_2 d_1 - d_1 d_2 d_3 + d_2 d_1 d_3 - d_3 d_1 d_2 + d_1 d_3 d_2 - d_2 d_3 d_1 \\ \qquad = d_1 D_{23} + d_2 D_{31} + d_3 D_{12}, \end{cases}
$$

so daß (118) kürzer lautet: $\mathfrak{D}_{123}\mathfrak{z}\, d_4\mathfrak{z} = 0$. Die dritte der Darstellungen (119) läßt aber erkennen, daß mit $D_{12}\mathfrak{z} = 0$ (85) auch $\mathfrak{D}_{123}\mathfrak{z} = 0$ ist. Analog zu § 3 erweist sich nunmehr (117) wieder als Folge von (115), (116) und (118) vermöge der Identität:

$$
(120)\quad \begin{cases} \qquad 2 D_{12} d_3 \mathfrak{z}\, d_4 \mathfrak{z} - 2 D_{34} d_1 \mathfrak{z}\, d_2 \mathfrak{z} \\ = \mathfrak{D}_{123}\mathfrak{z}\, d_4\mathfrak{z} - \mathfrak{D}_{124}\mathfrak{z}\, d_3\mathfrak{z} - \mathfrak{D}_{134}\mathfrak{z}\, d_2\mathfrak{z} + \mathfrak{D}_{234}\mathfrak{z}\, d_1\mathfrak{z}.^{*)} \end{cases}
$$

§ 31. Fall des verschwindenden Krümmungstensors.

Das Verschwinden des Krümmungstensors bedeutet bekanntlich, daß die Maßbestimmung in $\mathfrak{T}$ eine *euklidische* ist, d. h. daß ds^2 als Summe der Quadrate von n exakten Differentialen dx_ϱ dargestellt werden kann. Den Beweis dieses Satzes können wir im Anschluß an unsere Trennung

---

*) Man kann D_{12}, $\mathfrak{D}_{123}$ und die beiden Seiten von (120) durch folgende symbolischen Determinanten darstellen:

$$
\begin{vmatrix} d_2 & d_1 \\ d_2 & d_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_3 & d_2 & d_1 \\ d_3 & d_2 \cdot & d_1 \\ d_3 & d_2 & d_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ d_4\mathfrak{z} & d_3\mathfrak{z} & d_2\mathfrak{z} & d_1\mathfrak{z} \\ -d_4\mathfrak{z} & -d_3\mathfrak{z} & d_2\mathfrak{z} & d_1\mathfrak{z} \end{vmatrix},
$$

mit der Vorschrift, daß in jedem Glied der Entwicklung die Faktoren in der Reihenfolge der Zeilen anzuschreiben sind, denen sie entnommen werden. In (119) haben wir die Entwicklungen nach der ersten bzw. letzten Zeile und die volle Entwicklung vor uns, in (120) links die Entwicklung nach Unterdeterminanten zweiten Grades (erste und zweite Zeile einerseits, dritte und vierte andererseits), rechts die Entwicklung nach der letzten Zeile und ihren Unterdeterminanten dritten Grades.

von Orientierung und Messung in zwei Schritte zerlegen, von denen der erste bereits in § 19, Anmerkung, im Anschluß an die Orientierung genannt ist: Im Falle $\Delta_{12} b_i^k = 0$ läßt sich das Grundsystem in eine n-dimensionale euklidische Mannigfaltigkeit einbetten, d. h. man kann $\mathfrak{p}_i = \sum_\varrho p_{i\varrho} \mathfrak{e}_\varrho$ setzen, wobei $d\mathfrak{e}_\varrho = 0$, $\mathfrak{e}_\varrho = \mathfrak{e}^\varrho$, also das neue Grundsystem $\{\mathfrak{e}_\varrho\}$ ein *festes orthogonales Einheitssystem* ist. Nach Einführung der Maßbestimmung wird daher

$$d\mathfrak{s} = \sum_\varrho \mathfrak{e}_\varrho dx_\varrho, \quad (ds)^2 = \sum_\varrho (dx_\varrho)^2, \quad dx_\varrho = \sum_i p_{i\varrho} du^i,$$

und die Forderung $D_{12}\mathfrak{s} = \sum_\varrho \mathfrak{e}_\varrho D_{12} x_\varrho = 0$ bedeutet, daß die Grundformen dx_ϱ exakte Differentiale sind.

§ 32. Binärer Fall und Gaußisches Krümmungsmaß.

Im Falle $n = 2$ hat eine alternierende Bilinearform die Gestalt $c(d_1u\, d_2v - d_2u\, d_1v)$, wobei wir du, dv für du^1, du^2 schreiben. Der Klammerausdruck ist mit T^{-1} kogredient, so daß cT^{-1} eine Invariante ist. Insbesondere sei diese für die Pfaffsche Kovariante einer Linearform dr mit Jr bezeichnet:

$$D_{12} r = Jr \cdot T(d_1u\, d_2v - d_2u\, d_1v). \tag{121}$$

Der Krümmungstensor nimmt die Gestalt

$$\mathsf{K} = K \cdot T^2 (d_1u\, d_2v - d_2u\, d_1v)(d_3u\, d_4v - d_4u\, d_3v) \tag{122}$$

an, wobei die Invariante $K = (1212) : T^2$ das *„Krümmungsmaß“* oder die *„Krümmung“* schlechthin genannt wird.

In einer früheren Arbeit*) habe ich das folgende, für viele Anwendungen bequeme und eine ganze Reihe von Darstellungen für K als Sonderfälle umfassende Verfahren zur Berechnung von K angegeben: *Man stelle $(ds)^2$ als Summe zweier Quadrate von Linearformen dar:*

$$(ds)^2 = (dp)^2 + (dq)^2;$$

dann ist

$$K = -J(Jp \cdot dp + Jq \cdot dq).$$

Dieser Satz läßt sich dank unserer Verallgemeinerung auf nichtintegrable Grundformen wesentlich kürzer beweisen, als es l. c. unter Beschränkung auf integrable möglich war.

Wir wählen nämlich dp, dq als Grundformen; dann wird das Grundsystem ein orthogonales Einheitssystem, die Unterscheidung zwischen Hoch- und Tiefstand der Zeiger gegenstandslos, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}^i$, $a_{ik} = a_k^i$, $db_{ik} = db_i^k$ usw., insbesondere

*) Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen usw., § 15f., Acta math. Bd. 23.

(123) $T = 1,$ (124) $\left\{ {i\,k \atop \lambda} \right\} = 0,$

(125) $db_{11} = db_{22} = 0, \qquad db_{12} = -db_{21}.$

Wegen (125) ist das Additament von $\Delta_{12} b_{(1)2}$ null (vgl. 67), also $\Delta_{12} b_{(1)2} = D_{12} b_{12}$ und nach (112)

(126) $$\mathsf{K} = D_{34} b_{12} (d_1 p\, d_2 q - d_2 p\, d_1 q).$$

Wegen (123) ist allgemein nach (121):

$$D_{12} r = Jr \cdot (d_1 p\, d_2 q - d_2 p\, d_1 q),$$

also insbesondere nach (126) und (122):

(127) $$K = J b_{12}$$

und nach (94, 95), weil $du^1 = dp$, $du^2 = dq$:

(128) $$U^1_{12} = Ju^1 = Jp; \qquad U^2_{12} = Ju^2 = Jq.$$

Aus (97) und (100)*) aber errechnen wir mit (124):

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial p} = -U^1_{12}, \qquad \frac{\partial b_{12}}{\partial q} = -U^2_{12},$$

also nach (128)

$$db_{12} = -Jp \cdot dp - Jq \cdot dq,$$

woraus mit (127) unser Satz folgt. —

Breslau, im Juni 1916.

---

*) Besonders einfach an Hand der in der Fußnote Seite 211 gegebenen Darstellung, unter Beachtung der Gegenstandslosigkeit des Zeigerstandes.