Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten.

Von

C. Carathéodory in Breslau.

Inhalt.

Einleitung.

1. Das Hauptresultat der klassischen Untersuchungen von H. A. Schwarz*) über konforme Abbildungen gipfelt in dem Satze, daß jedes einfach zusammenhängende, schlichte, aus einer endlichen Anzahl von *analytischen* Kurvenstücken, die sich unter von Null verschiedenem Winkel schneiden, berandete Gebiet, *einschließlich des Randes* eineindeutig und stetig auf einen Kreis derart abgebildet werden kann, daß diese Abbildung für *innere* Punkte winkeltreu sei.

Um eine derartige Abbildung eindeutig festzulegen, kann man sich u. A. zwei entsprechende, orientierte Linienelemente des Inneren geben, d. h. zwei Punkte und zwei durch diese Punkte gehende Richtungen, die durch die Abbildung in einander übergehen sollen.

Nun kann man, wie es Poincaré zuerst getan hat**), beweisen, daß

*) Gesammelte Abhandlungen II passim; siehe auch Picard, Traité d'Analyse (2^{e} édition, Paris, Gauthier-Villars 1905) II, Kap. 10.

**) Acta Math. 4, S. 231. Der einfache Beweis, den wir im § 5 dieser Arbeit für diesen Satz geben, ist im wesentlichen derselbe wie bei Poincaré. Einen anderen Beweis, der auf das Problem für mehrfach zusammenhängende Flächen erweiterungsfähig ist, hat vor kurzem Koebe gegeben: *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, 2. Teil* (J. f. Math. 139, S. 249—292), S. 262.

die konforme Abbildung von zwei zusammenhängenden Gebieten aufeinander, bei welcher ein Paar von entsprechenden Linienelementen im Inneren dieser Gebiete gegeben ist, auch dann *eindeutig* bestimmt ist, wenn man über die Beziehungen der Ränder aufeinander, oder sogar über die Existenz einer derartigen Beziehung, gar keine Voraussetzung macht. Das zuerst erwähnte Problem der konformen Abbildung, bei welchem man die Stetigkeit der Abbildung auch auf den Rand erstreckt, kann demnach angesehen werden als spezieller Fall eines anderen erweiterten Problems, wo die stetige und konforme Abbildung nur für die *inneren* Punkte der beiden aufeinander abzubildenden Gebiete verlangt wird.

Diese beiden Probleme sind — infolge des Poincaréschen Unitätssatzes — in allen Fällen äquivalent, wo das erste von ihnen eine Lösung zuläßt; da man aber sehr leicht Beispiele konstruieren kann, bei welchen letzteres nicht zutrifft, so sieht man, daß das „Problem für innere Punkte" tatsächlich allgemeiner ist, als das andere.

Die ganze neuere, großartige Entwicklung des Problems der konformen Abbildung*) fußt auf der Tatsache, daß die Abbildung zweier Gebiete aufeinander schon vollkommen bestimmt ist, wenn man Stetigkeit und Konformität für das *Innere* dieser Gebiete postuliert (und natürlich auch zwei entsprechende Linienelemente vorschreibt); *die stetige Abbildung der Ränder aufeinander darf man dagegen a priori nicht verlangen,* sie ist eine Eigenschaft, die in jedem speziellen Falle entweder vorhanden ist, oder nicht.

Dieser Sachlage gemäß, beschäftige ich mich in der vorliegenden Arbeit ausschließlich mit der Abbildung des Inneren von einfach zusammenhängenden Gebieten auf das Innere eines Kreises**). Überhaupt werde ich stets mit dem Inneren der in Betracht kommenden Gebiete und nie mit ihren Randpunkten operieren.

2. Für die Probleme der konformen Abbildung überhaupt scheint nun folgende Frage, die wir in dieser Arbeit vollständig beantworten, von Bedeutung zu sein: *Es seien $G_1, G_2, \cdots$ eine Folge von unendlich vielen Gebieten, die einer u-Ebene angehören, alle den Punkt $u = 0$ im Inneren ent-*

---

*) Vgl. z. B. das Verzeichnis der Arbeiten von Poincaré, Osgood, Hilbert, Koebe usw., das in Koebes „Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven" (J. f. Math. 138, S. 195) zusammengestellt ist.

**) Die Existenz der konformen Abbildung für das Innere des allgemeinsten schlichten einfach zusammenhängenden Gebietes, dessen Rand mindestens zwei voneinander verschiedene Punkte enthält, hat Osgood bewiesen [On the existence of Greens Function for the most general simply connected plane region. Trans. Am. Math. Soc. I (1900) S. 310—314].

Einen wesentlich vereinfachten Beweis hat Koebe vor kurzem gegeben [J. f. Math. 139, S. 260—61].

halten und (um nur den einfachsten Fall zu erwähnen) sämtlich im Inneren des Kreises $|u| < M$ *liegen. Es sei* $f_n(z)$ *die analytische Funktion, welche das Gebiet* G_n *auf den Einheitskreis* $|z| < 1$ *derart konform abbildet, daß die Punkte* $z = 0$ *und* $u = 0$ *und in diesen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen. Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen die Gebiete* G_n *erfüllen, damit die Funktionen* $f_n(z)$ *bei wachsendem n gegen eine Grenzfunktion konvergieren, und welches sind die Eigenschaften dieser Grenzfunktion?*

Diesen Untersuchungen stellen wir ein Kapitel voran, in welchem wir gewisse zum Teil schon längst bekannte Ungleichheiten entwickeln, die später gebraucht werden.

Die meisten Autoren benutzen zu ähnlichen Zwecken den Harnackschen Satz; ein rein funktionentheoretisches äquivalentes Hilfsmittel, das den Vorzug besitzt sehr elementarer Natur zu sein, findet sich bei Schwarz*) und genügt unseren Zwecken vollkommen. Wir werden nicht einmal von der Verallgemeinerung dieses Satzes Gebrauch machen, die Herr E. Lindelöf gegeben hat**).

3. Unsere Resultate sind mancher Anwendungen fähig, von denen wir in der zweiten Hälfte dieser Arbeit einige näher untersuchen. So wird sich z. B. zeigen, daß man das *Innere* einer beliebigen Jordanschen Kurve auf das Innere eines Kreises konform abbilden kann, indem man von der Abbildung von Polygonen ausgeht, welche die Kurve von *außen* her approximieren, und dann zur Grenze übergeht. Wir werden uns auch mit der Stetigkeit der Abbildungsfunktionen eines veränderlichen Gebietes beschäftigen.

Die bei weitem interessanteste Anwendung, die wir von unserem Satze gemacht haben, besteht aber in einer neuen Methode, um die Existenz der konformen Abbildung eines allgemeinen Gebietes zu beweisen. Alle uns bisher bekannten Beweisanordnungen für den allgemeinen Satz benutzen den Umweg über die Lösung des Randwertproblems für die Gleichung $\Delta u = 0$. Wir werden dagegen rein funktionentheoretisch vorgehen und mit verhältnismäßig einfachen Mitteln, nicht nur die *Möglichkeit* der konformen Abbildung eines Gebietes beweisen, sondern die Abbildungs-

*) Zur Theorie der Abbildung [Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich für das Schuljahr 1869—70; Gesammelte Abhandlungen II, S. 108—232] Gesammelte Abhandlungen II, S. 109.

**) Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel (Acta Soc. Sc. Fennicae 35, Nr. 7, S. 1—34) S. 1.

funktion selbst durch ein *rekurrentes Verfahren* gewinnen, das bei jedem Schritte nur die Auflösung von Gleichungen ersten oder zweiten Grades verlangt.

Kapitel I.

Das Schwarzsche Lemma.

4. Satz I. *Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z, die für $|z|<1$ regulär sein möge. Es sei ferner in diesem Bereiche*

$$(1) \qquad |f(z)| \leqq 1$$

und $f(0)=0$.

Dann gilt für jedes z, das der Bedingung $0<|z|<1$ genügt, die Beziehung

$$(2) \qquad |f(z)|<|z|,$$

wenn nicht $f(z)$ gleich einer linearen Funktion $e^{i\vartheta}z$ ist, wo dann immer $|f(z)|=|z|$ ist.

Für diesen Satz von Schwarz*) geben wir den einfachsten uns bekannten Beweis:

Nach den Voraussetzungen ist die Funktion $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$ für $|z|<1$ regulär. Es sei ϱ eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist; das Maximum des absoluten Betrages von $\varphi(z)$ innerhalb des Kreises $|z|\leqq\varrho$ wird auf der Peripherie $|z|=\varrho$ dieses Kreises erreicht. Auf dieser Peripherie ist aber

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\left|\frac{f(z)}{\varrho}\right|\leqq\frac{1}{\varrho},$$

letzteres weil $|f(z)|\leqq 1$ ist. Hieraus folgt, daß für $|z|\leqq\varrho$

$$|f(z)|\leqq\frac{|z|}{\varrho}$$

sein muß; und da diese Ungleichheit für jedes $\varrho<1$ gilt, folgt schließlich, daß für jedes $|z|<1$ (Gleichheit ausgeschlossen)

$$(3) \qquad |f(z)|\leqq|z|$$

sein muß. Ist $\varphi(z)$ nicht konstant, so kann für keinen inneren Punkt des Einheitskreises $|f(z)|=|z|$ sein, weil es sonst dann auch innere Punkte dieser Kreisfläche geben würde für welche $|f(z)|>|z|$ sein müßte, was der Bedingung (3) widerspricht. Ist aber $|\varphi(z)|=1$ für jedes $|z|<1$, so muß die Funktion $f(z)$ von der Form $e^{i\vartheta}z$ sein. Unser Satz ist in seinem ganzen Umfange bewiesen.

---

*) In der oben zitierten Abhandlung [Ges. Abh. II, S. 109].

5. Mit Hilfe des Satzes von Schwarz können wir jetzt sehr leicht das in der Einleitung erwähnte Resultat von Poincaré beweisen, das besagt, daß die konforme Abbildung des *Inneren* eines einfach zusammenhängenden Gebietes G auf das *Innere* des Einheitskreises nur auf eine einzige Weise möglich ist, wenn zwei gegebene Linienelemente ineinander übergehen sollen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß G den Anfangspunkt der Koordinaten im Inneren enthält und daß bei der Abbildung die Anfangspunkte der Koordinaten und in diesen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen sollen.

Es seien unter diesen Umständen

$$u = F_1(z), \quad u = F_2(\zeta) \tag{4}$$

zwei Funktionen, durch welche das Innere von G auf die Kreise $|z| < 1$ und $|\zeta| < 1$ konform abgebildet ist. Zugleich werden die beiden Kreisflächen $|z| < 1$ und $|\zeta| < 1$ konform aufeinander abgebildet und zwar derart, daß ihre Mittelpunkte und in diesen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen.

Die Abbildungsfunktion $\zeta = \zeta(z)$ und ihre Umkehrung $z = z(\zeta)$ genügen beide den Voraussetzungen des Satzes I; also ist nach diesem Satze sowohl $\left|\frac{\zeta}{z}\right| \leqq 1$ als auch $\left|\frac{z}{\zeta}\right| \leqq 1$ für zwei entsprechende Punkte. Hieraus folgt nach dem zweiten Teile des Satzes, daß $\zeta = e^{i\vartheta} z$ ist, und, da $\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0}$ reell und positiv ist, haben wir schließlich $\zeta = z$.

Die beiden Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ sind m. a. W. identisch.

6. Den Satz I wollen wir jetzt dadurch verallgemeinern, daß wir die Voraussetzung $f(0) = 0$ fallen lassen. Es sei also für $|z| < 1$ die Funktion $y = f(z)$ regulär und $|f(z)| < 1$; im Nullpunkte $z = 0$ habe man jetzt $f(0) = a_0$.

Durch die lineare gebrochene Substitution

$$u = \varphi(z) = \frac{a_0 - f(z)}{|a_0|\, f(z) - \frac{a_0}{|a_0|}} \tag{5}$$

bilde man den Einheitskreis $|y| < 1$ auf sich selbst derart ab, daß der Punkt a_0 in den Mittelpunkt dieses Kreises übergeht. Wir können auf die Funktion $\varphi(z)$ in welche $f(z)$ durch diese Substitution transformiert wird, den Satz I anwenden und danach schließen, daß für alle Werte von $|z| \leqq \zeta < 1$, der Punkt $u = \varphi(z)$ innerhalb eines Kreises k der u-Ebene liegen muß, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Koordinaten zusammenfällt und dessen Radius gleich ζ ist. Die Funktion $f(z)$ selbst muß also auch in einem Kreise $\varkappa$ der y-Ebene liegen, nämlich demjenigen, der durch die Substitution (5) in k übergeht.

Es sei ϱ der Radius des kleinsten Kreises in der y-Ebene, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Koordinaten liegt und der x enthält; die Größe ϱ, die übrigens von ζ abhängt, hat die Eigenschaft, daß für $|z| \leqq \zeta$ die Ungleichheit $|f(z)| \leqq \varrho$ stattfinden wird.

Um ϱ numerisch zu bestimmen, nehmen wir zuerst an, daß a_0 *reell* und *positiv* ist. Dann geht (5) über in

$$u = \frac{a_0 - y}{a_0 y - 1},$$

woraus

$$y = \frac{a_0 + u}{a_0 u + 1}$$

folgt. Da durch diese Substitution die Achse des Reellen in sich selbst transformiert wird, geht der Kreis $|u| = \zeta$ in einen Kreis über, der diese Achse orthogonal schneidet; die beiden Schnittpunkte dieses letzten Kreises mit der reellen Achse haben die Werte

$$y_1 = \frac{a_0 + \zeta}{1 + a_0 \zeta}, \quad y_2 = \frac{a_0 - \zeta}{1 - a_0 \zeta}$$

und die größere der beiden Zahlen $|y_1|$ und $|y_2|$ wird den gesuchten Wert ϱ geben.

Nun sind (da sowohl $a_0 < 1$ als auch $\zeta < 1$ sein müssen)

$$y_1 + y_2 = \frac{2 a_0 (1 - \zeta^2)}{1 - a_0^2 \zeta^2} > 0$$

und

$$y_1 - y_2 = \frac{2 \zeta (1 - a_0^2)}{1 - a_0^2 \zeta^2} > 0;$$

es ist also

$$\varrho = |y_1| = y_1 = \frac{a_0 + \zeta}{1 + a_0 \zeta}.$$

Ist a_0 nicht reell und positiv, so braucht man nur die ganze Figur um einen gewissen Winkel zu drehen um die Bestimmung von ϱ auf den erledigten Fall zurückzuführen. Dabei geht a_0 in $|a_0|$ über, und man erhält schließlich

$$\varrho = \frac{|a_0| + \zeta}{1 + |a_0| \zeta}.$$

7. Es sei jetzt $F(x)$ eine Funktion, die für $|x - x_0| < r$ regulär ist, und deren absoluter Betrag in diesem Bereiche den Wert M nicht übersteigt; setzt man $x = x_0 + rz$, so wird die Funktion

$$f(z) = \frac{F(x_0 + rz)}{M}$$

für $|z| < 1$ regulär sein und einen absoluten Betrag besitzen, der Eins nicht übersteigt. Nach vorhergehendem haben wir aber, wenn ϑ eine reelle positive Zahl bedeutet, die kleiner als Eins ist, für

$$|x - x_0| \leqq r\vartheta$$

die Ungleichheit

$$(6) \qquad |F(x)| \leqq M \frac{|F(x_0)| + M\vartheta}{M + |F(x_0)|\vartheta}.$$

Bemerkt man jetzt, daß die rechte Seite von (6) monoton wächst, wenn $|F(x_0)|$ von Null bis M zunimmt, so sieht man, daß man in (6) $|F(x_0)|$ durch jede größere Zahl M_0 ersetzen kann, die M nicht übersteigt und erhält schließlich folgenden Satz:

Satz II. *Es sei die analytische Funktion $F(x)$ im Kreise $|x - x_0| < r$ regulär und daselbst ihr absoluter Betrag $|F(x)| < M$; es seien ϑ und M_0 zwei beliebige positive Konstanten, die den Bedingungen $0 < \vartheta < 1$ und $|F(x_0)| \leqq M_0 < M$ genügen.*

Dann ist für jeden Wert von x, der im Kreise $|x - x_0| \leqq \vartheta r$ liegt

$$(7) \qquad |F(x)| \leqq M \frac{M_0 + M\vartheta}{M + M_0\vartheta} < M.$$

Dieser Satz kann in gewisser Hinsicht als eine Verallgemeinerung von I angesehen werden; er geht nämlich in I über, wenn man $x_0 = 0$, $r = 1$, $M = 1$ und $M_0 = 0$ setzen kann.

Andererseits ist II ein spezieller Fall eines viel allgemeineren Satzes von Schottky*), den Landau**) vor kurzem noch erweitert hat.

8. Wir wollen jetzt den Satz I in einer anderen Richtung vervollständigen: Es sei wieder für $|z| < 1$ die Funktion $u = f(z)$ regulär und $|f(z)| < 1$; ferner sei $f(0) = 0$. Außerdem soll aber hier die neue Annahme gemacht werden, daß die erste Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ für $z = 0$ von Null verschieden sei.

Dann kann man die Gleichung $u = f(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ nach z auflösen und erhält ein Funktionselement $z = \varphi(u)$, das in der Umgebung von $u = 0$ regulär ist. Es sei ϱ_0 die größte positive Zahl zwischen Null und Eins (eingeschlossen), welche die Eigenschaft besitzt, daß für $|u| < \varrho_0$ die Funktion $\varphi(u)$ regulär und $|\varphi(u)| < 1$ ist.

Das Funktionselement $\varphi(u)$ ist im Kreise $|u| < \varrho_0$ die Umkehrung einer *eindeutigen* Funktion und stellt daher die Abbildung eines schlichten, sich nicht überdeckenden Gebietes T der z-Ebene auf den Kreis $|u| < \varrho_0$

---

*) Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen [Berl. Ber. 1904, S. 1244—1262] S. 1255.

**) Bohr u. Landau, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_k(s)$ in der Nähe der Geraden $s = 1$ [Gött. Nachr. Math.-phys. Klasse, 1910, S. 303—330].

dar. Umgekehrt entspricht jeder Kreisfläche $|z| < \varrho$ die ganz innerhalb des Gebietes T verläuft, ein schlichtes sich nicht überdeckendes Gebiet in der u-Ebene.

Um zu einem vollständigen Resultate zu gelangen, schließen wir den trivialen Fall $u = e^{i\vartheta} z$ aus; die Überlegungen des § 5 zeigen, daß dies der einzige Fall ist, wo $\varrho_0 = 1$ sein kann. Nach dem Satze I ist dann für $|z| \leqq \varrho_0$ immer $|u| < \varrho_0$ (Gleichheit ausgeschlossen).

Diese Kreisfläche liegt also einschließlich ihrer Peripherie ganz innerhalb des Gebietes T und es gibt Kreise $|z| \leqq \varrho$, wo $\varrho > \varrho_0$ ist, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Es sei ϱ_1 die größte positive Zahl zwischen Null und Eins (eingeschlossen) von der Eigenschaft, daß der Kreisfläche $|z| < \varrho_1$ vermöge der Funktion $u = f(z)$ ein schlichtes sich nirgends überdeckendes Gebiet der u-Ebene entspricht; nach vorhergehendem ist $\varrho_1 > \varrho_0$ (Gleichheit ausgeschlossen).

Nehmen wir nun die positive Zahl $\bar{\varrho}$, kleiner als ϱ_1 aber sonst beliebig an, so entspricht, wie der Satz I lehrt, der Kreisperipherie $|z| = \bar{\varrho}$ eine geschlossene Kurve C der u-Ebene, die ganz im Kreise $|u| < \bar{\varrho}$ liegt, und es entspricht zugleich der Kreisfläche $|z| \leqq \bar{\varrho}$ ein schlichtes, sich nirgends überdeckendes Gebiet $\bar{u}$, dessen Rand die Kurve C ist.

Wenden wir nun den Satz I, nachdem wir $u = \varrho_0 v$ gesetzt haben, auf die Funktion $\varphi(\varrho_0 v)$ an; so kommt für $|v| < 1$ oder, was dasselbe ist, für $|u| < \varrho_0$

$$\left|\frac{\varphi(\varrho_0 v)}{v}\right| = \left|\frac{\varrho_0 \varphi(u)}{u}\right| < 1.$$

Der Kreisfläche $|u| \leqq \bar{\varrho}\varrho_0$ entspricht also vermöge der Funktion $z = \varphi(u)$ ein Gebiet der z-Ebene, das einschließlich seines Randes innerhalb des Kreises $|z| = \bar{\varrho}$ verläuft; diese Kreisfläche $|u| \leqq \bar{\varrho}\varrho_0$ ist also im Gebiete $\bar{u}$ enthalten, und da dieses Gebiet sich nirgends überdeckt, folgt schließlich, daß die Kurve C im Kreisringe, der aus den Kreisen $|u| = \bar{\varrho}$ und $|u| = \bar{\varrho}\varrho_0$ gebildet ist, verläuft.

Wir sehen also, daß für jeden Wert von z, welcher der Bedingung

$$0 < |z| < \varrho_1$$

genügt, die Ungleichheiten

$$\varrho_0 |z| < |f(z)| < |z|$$

bestehen, und können folgenden Satz formulieren.

Satz III. *Es sei die analytische Funktion $u = f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und daselbst $|f(z)| \leqq 1$; diese Funktion sei keine lineare Funktion von z, und es sei ferner*

$$f(0) = 0, \quad f'(0) \neq 0.$$

Mit ϱ_0 bezeichnen wir die größte positive Zahl zwischen Null und Eins, für *welche das Funktionselement $z = \varphi(u)$, das in der Umgebung von $u = 0$ die Umkehrung von $f(z)$ darstellt, im Kreise $|u| < \varrho_0$ regulär und dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist.*

Mit ϱ_1 bezeichnen wir die größte positive Zahl zwischen Null und Eins (eingeschlossen) von der Eigenschaft, daß der Kreisfläche $|z| < \varrho_1$ vermöge der Funktion $u = f(z)$ ein schlichtes, sich nirgends überdeckendes Gebiet der u-Ebene entspricht.

Dann ist immer $\varrho_1 > \varrho_0$ (Gleichheit ausgeschlossen), und ferner ist für $0 < |z| < \varrho_1$

$$\varrho_0 |z| < |f(z)| < |z|. \tag{8}$$

9. Man kann durch eine Reihe von geeigneten elementaren Transformationen und nochmalige Anwendung des Satzes I unseren letzten Satz III durch einen anderen wesentlich schärferen ersetzen.

Wir führen zu diesem Zwecke eine Funktion $\varphi(z)$ ein, die für $|z| < 1$ regulär sein und den Bedingungen

$$\varrho < |\varphi(z)| < 1 \tag{9}$$

genügen soll, wo ϱ eine positive Größe zwischen Null und Eins bedeutet; außerdem soll $\varphi(0)$ reell und positiv sein. [Der Punkt $\varphi(z)$ liegt wegen (9) im Inneren der unendlichblättrigen Riemannschen Fläche, die das Ringgebiet

$$\varrho < |\varphi| < 1$$

ausfüllt; diese Fläche, die einfach zusammenhängend ist, wird im folgenden auf den Einheitskreis abgebildet.]

Es sei

$$\chi(z) = l\varphi(z) \tag{10}$$

und derjenige Zweig des Logarithmus gewählt, für welchen $\chi(0)$ reell ist. Dann ist wegen (9)

$$l\varrho < \Re\chi(z) < 0. \tag{11}$$

Zweitens sei

$$\psi(z) = e^{\pi i\left(1 - \frac{\chi(z)}{l\varrho}\right)}. \tag{12}$$

Aus (11) folgt sodann, daß für $|z| < 1$

$$\Im\,\psi(z) > 0 \tag{13}$$

ist; ferner ist $|\psi(0)| = 1$ also $\psi(0) = e^{\vartheta i}$, wo (wegen (13)) $0 < \vartheta < \pi$ ist.

Endlich sei

$$\tau(z) = \frac{\psi(z) - e^{\vartheta i}}{\psi(z) - e^{-\vartheta i}}; \tag{14}$$

wegen (13) ist für $|z| < 1$ auch $|\tau(z)| < 1$ und außerdem ist $\tau(0) = 0$

Nach dem Satze I ist also für jedes positive $\sigma < 1$ und für $|z| < \sigma$ auch $|\tau(z)| < \sigma$. Aus (14) folgt nun

$$\psi(z) = \frac{e^{\vartheta i} - e^{-\vartheta i}\tau}{1-\tau}. \tag{15}$$

Dem Kreise $|\tau| = \sigma$ entspricht vermöge (15) ein Kreis in der ψ-Ebene, der die Gerade, welche die Punkte $e^{\vartheta i}$ und $e^{-\vartheta i}$ dieser Ebene verbindet, orthogonal schneidet. Diese Gerade entspricht nämlich in der Transformation (15) reellen Werten von τ; wir bekommen also die zwei Endpunkte eines Durchmessers des betrachteten Kreises, wenn wir in (15) $\tau = \pm \sigma$ setzen und finden ferner für den Mittelpunkt m und den Radius r unseres Kreises die Werte

$$m = \frac{e^{\vartheta i} - e^{-\vartheta i}\sigma^2}{1-\sigma^2}. \qquad r = \frac{2\sigma \sin\vartheta}{1-\sigma^2}.$$

Hieraus entnehmen wir, daß die den Werten $|z| < \sigma$ entsprechenden Werte von $\psi(z)$ ganz innerhalb eines Kreisringes liegen, der aus zwei Halbkreisen besteht, deren Mittelpunkte in $\psi = 0$ liegen, und welche die Radien $|m| + r$ und $|m| - r$ besitzen.

Läßt man ϑ zwischen Null und π variieren, so wird sowohl das Maximum von

$$|m| + r = \frac{(1 - 2\sigma^2 \cos 2\vartheta + \sigma^4)^{\frac{1}{2}} + 2\sigma \sin\vartheta}{1-\sigma^2}$$

als auch das Minimum von

$$|m| - r = \frac{(1 - 2\sigma^2 \cos 2\vartheta + \sigma^4)^{\frac{1}{2}} - 2\sigma \sin\vartheta}{1-\sigma^2}$$

für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erreicht, und man erhält schließlich für $|z| < \sigma$

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} < |\psi(z)| < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}.$$

Aus (12) folgt sodann

$$l\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma} < \Re\left(-\pi i\,\frac{\chi(z)}{l\varrho}\right) < l\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma}. \tag{16}$$

Setzt man nun $\varphi(z) = \lambda e^{\mu i}$, wo λ und μ reelle Größen bedeuten, die von z abhängen, so liefert (10) die Gleichung $\chi(z) = l\lambda + i\mu$, und (16)

$$\frac{1}{\pi}\,l\varrho\; l\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \leqq \mu \leqq \frac{1}{\pi}\,l\varrho\; l\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma}.$$

Diese letzte Bedingung besagt, wenn wir $\sigma = \varrho$ machen und die Bezeichnung

$$\mu_0 = \frac{1}{\pi}\,l\varrho\; l\,\frac{1-\varrho}{1+\varrho} \tag{17}$$

einführen, daß für alle $|z| < \varrho$

$$(18) \qquad |\mu| < \mu_0$$

sein muß. Da ferner nach (9) λ zwischen ϱ und 1 liegen muß und dasselbe von $\varphi(0)$ gilt, bestehen die Ungleichheiten

$$\begin{cases} |1 - \lambda \cos \mu| < (1-\varrho) + \frac{\mu_0^2}{2}, \\ |\varphi(0) - \lambda \cos \mu| < (1-\varrho) + \frac{\mu_0^2}{2}, \\ |\lambda \sin \mu| < \mu_0, \end{cases}$$

die wir zur Abschätzung der Gleichungen

$$\begin{cases} 1 - \varphi(z) = 1 - \lambda \cos \mu - i\lambda \sin \mu, \\ \varphi(0) - \varphi(z) = \varphi(0) - \lambda \cos \mu - i\lambda \sin \mu \end{cases}$$

benutzen. Setzen wir dazu

$$(19) \qquad \varepsilon(\varrho) = \sqrt{\left(1 - \varrho + \frac{\mu_0^2}{2}\right)^2 + \mu_0^2},$$

so erhalten wir für $|z| < \varrho$

$$(20) \qquad \begin{cases} |\varphi(z) - 1| < \varepsilon(\varrho), \\ |\varphi(z) - \varphi(0)| < \varepsilon(\varrho). \end{cases}$$

Eine elementare Abschätzung zeigt ferner, daß für jeden der in Betracht kommenden Werte von ϱ

$$\varepsilon(\varrho) < 1{,}4\sqrt{1-\varrho}$$

ist, woraus folgt, daß $\lim\limits_{\varrho=1} \varepsilon(\varrho) = 0$ ist, eine Beziehung, die man auch direkt aus den Formeln (17) und (19) hätte entnehmen können.

Im allgemeinen liefert aber die letzte Formel eine viel zu hohe Zahl; so ist z. B. für $\varrho = 0{,}999$ die Größe $\varepsilon(\varrho) < 0{,}0010025$, während

$$1{,}4\sqrt{1-\varrho} > 0{,}044$$

wird.

Die Ungleichheiten (20) sind in dem Falle, den wir bis jetzt vorausgesetzt haben, daß $\varphi(0)$ reell und positiv ist, identisch mit den folgenden:

$$(21) \qquad \left|\varphi(z) - \frac{\varphi(0)}{|\varphi(0)|}\right| < \varepsilon(\varrho), \quad |\varphi(z) - \varphi(0)| < \varepsilon(\varrho).$$

In ihrer letzten Form (21) behalten sie aber ihre Gültigkeit, auch wenn $\varphi(0)$ komplex oder negativ ist, da man durch eine Drehung der φ-Ebene — wobei die Ungleichungen (21) invariant bleiben — den allgemeinen Fall auf den zuerst behandelten zurückführen kann.

Nun kehren wir zu der Funktion $f(z)$ unseres Satzes III zurück; nach diesem Satze ist für $|z| < \varrho_1$

$$\varrho_0 < \left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1.$$

Setzen wir $z = \varrho_1 \zeta$ und $\varphi(\zeta) = \frac{f(\varrho_1 \zeta)}{\varrho_1 \zeta} = \frac{f(z)}{z}$ wobei $\varphi(0) = f'(0)$ wird, so folgt aus (21)

$$\left| \frac{f(z)}{z} - \frac{f'(0)}{|f'(0)|} \right| < \varepsilon(\varrho_0), \qquad \left| \frac{f(z)}{z} - f'(0) \right| < \varepsilon(\varrho_0)$$

für $|\zeta| < \varrho_0$ oder, was dasselbe ist, für $|z| < \varrho_1 \varrho_0$.

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Satz IV. *Es sei die analytische Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und daselbst $|f(z)| \leqq 1$; außerdem sei $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$.*

Mit ϱ_0 und ϱ_1 bezeichnen wir, die im Satze III *definierten Größen mit $\varepsilon(\varrho)$ die durch die Gleichungen* (17) *und* (19) *definierte Funktion.*

Dann ist für $|z| < \varrho_0 \varrho_1$

$$|f(z) - f'(0)\, z| < \varrho_0 \varrho_1\, \varepsilon(\varrho_0) < 1{,}4\, \varrho_0 \varrho_1 \sqrt{1 - \varrho_0}$$

und

$$\left| f(z) - \frac{f'(0)}{|f'(0)|}\, z \right| < \varrho_0 \varrho_1\, \varepsilon(\varrho_0) < 1{,}4\, \varrho_0 \varrho_1 \sqrt{1 - \varrho_0}.$$

Der Satz IV kann als eine oft brauchbare Vervollständigung des im § 5 bewiesenen Eindeutigkeitstheorems angesehen werden; er zeigt nämlich, daß innerhalb eines jeden festen Kreises $|z| < \sigma < 1$ die Funktion $f(z)$ beliebig wenig von einer *linearen* Funktion abweicht, wenn nur die Zahl ϱ_0 hinreichend nahe an Eins liegt. Oder man kann auch sagen, daß das Maximum des absoluten Betrages des Restes

$$\frac{f''(0)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \cdots$$

der MacLaurinschen Reihe von $f(z)$, innerhalb des Kreises $|z| < \sigma$ nur von ϱ_0 abhängt, sobald $\varrho_0 > \sigma$ ist.

Interessant ist ferner die Bemerkung, daß bei gegebenem ϱ_0 die Größe der Approximation von der Gestalt oder Analytizität des Randes des Gebietes oder allgemeiner der Riemannschen Fläche, die $f(z)$ für $|z| < 1$ durchläuft, völlig unabhängig ist.

Kapitel II.

Der Kern einer Gebietsfolge.

10. Als *offenes* Gebiet G bezeichnet man bekanntlich jede Punktmenge (einer Ebene der komplexen Veränderlichen u), die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Um jeden Punkt von G als Mittelpunkt kann eine Kreisfläche beschrieben werden, die aus lauter Punkten von G besteht.

b) Zwei Punkte a und b von G können stets durch einen Polygonzug verbunden werden, der eine endliche Anzahl von Ecken besitzt und aus lauter Punkten von G besteht.

Unter Umständen wollen wir auch den unendlich fernen Punkt der Ebene u als Punkt von G zulassen. Damit verstehen wir, daß das Gebiet G_1, das aus G durch die Transformation durch reziproke Radien $u_1 = \frac{1}{u}$ entsteht, den Punkt $u_1 = 0$ enthalten soll.

Man nennt Begrenzung oder Rand des Gebietes G die Gesamtheit γ derjenigen Häufungspunkte von G, die selber nicht zu G gehören. Fügt man zu den Punkten von G die Punkte von γ hinzu, so erhält man eine abgeschlossene Punktmenge, die wir stets mit $\overline{G}$ bezeichnen wollen, und die man ein abgeschlossenes Gebiet nennt.

Ein Gebiet G (oder $\overline{G}$) ist *einfach zusammenhängend*, wenn entweder das Innere oder das Äußere eines jeden geschlossenen Polygons ohne Kreuzungspunkte, dessen Rand aus lauter Punkten von G besteht, ganz in G liegt.

11. Es seien $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$ unendlich viele einfach zusammenhängende, offene Gebiete der u-Ebene, die alle den Punkt $u = 0$ enthalten; außerdem wollen wir voraussetzen, um den einfachsten Fall vorweg zu behandeln, daß alle G_n innerhalb des Kreises $|u| < M$ liegen.

Wir nehmen an, daß man die konforme Abbildung sämtlicher Gebiete G_n auf das Innere des Kreises $|z| < 1$ bewerkstelligen kann und daß $f_n(z)$ diejenige analytische Funktion von z darstellt, welche die Abbildung von G_n liefert, bei welcher die Punkte $u = 0$ und $z = 0$ und in diesen Punkten die positiven Richtungen der Achsen des Reellen einander entsprechen.

Wir wollen untersuchen, ob man für die Gebiete G_n notwendige und hinreichende Bedingungen ausfindig machen kann, damit $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)$ für $|z| < 1$ existiere.

12. Die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots \tag{22}$$

sind für $|z| < 1$ regulär; ferner ist in diesem Kreise für jedes n

$$|f_n(z)| < M.$$

Für eine derartige Folge von Funktionen hat Herr Montel folgende Eigenschaften bewiesen*):

---

*) Sur les suites infinies de fonctions [Ann. Ec. Norm. (3) 24 (1907), S. 233—304].

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe [Paris, Gauthier-Villars 1910, S. 1—128], S. 20—25.

Vgl. auch Carathéodory und Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen [Berl. Ber. 1911, 16, S. 587—613].

a) *Wenn die Folge* (22) *im Kreise* $|z| < 1$ *konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem kleineren Kreise und stellt demnach im Kreise* $|z| < 1$ *eine reguläre Funktion dar.*

b) *Aus jeder Teilfolge von* (22) *kann man eine neue Teilfolge entnehmen, die für jedes* $|z| < 1$ *konvergiert.*

In der Terminologie von Fréchet würde man m. a. W. sagen, daß die Folge (22) *kompakt* ist.*)

13. Nehmen wir zuerst an, daß der $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)$ unserer Abbildungsfunktionen für $|z| < 1$ existiert und nicht konstant ist; dann ist nach vorhergehendem

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

und $f(z)$ stellt eine analytische reguläre Funktion dar, die nicht konstant ist.

Die Funktionen der Reihe (22) haben — als Abbildungsfunktionen von schlichten Gebieten — in jedem Punkte z_0 des Kreises $|z| < 1$ eine von Null verschiedene Ableitung; wir behaupten, daß dieselbe Eigenschaft der Funktion $f(z)$ zukommt.

Es sei nämlich, entgegen dieser Behauptung $f'(z_0) = 0$ und ϱ positiv und so klein gewählt, daß einerseits der Kreis $z_0 + \varrho e^{i\vartheta}$ im Inneren von $|z| < 1$ liege [was z. B. sicher der Fall ist, wenn $\varrho < \frac{1-|z_0|}{2}$ ist] und andererseits für $0 < |z - z_0| \leqq \varrho$ die Funktion $f'(z) \neq 0$ sei. Dann wird, wenn z den Kreis $z_0 + \varrho e^{i\vartheta}$ bei variablem ϑ einmal durchläuft, der Punkt $u = f(z)$ in der u-Ebene den Punkt $f(z_0)$ mehrfach — sagen wir k-mal ($k \geqq 2$) — umkreisen. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz, die als Folge der Eigenschaft a) des § 12 längs dieses Kreises erfolgt, müßte dies für hinreichend große n auch für den Punkt $f_n(z)$ der Fall sein. Letzteres ist aber unmöglich, da, wegen des Nichtverschwindens von $f_n'(z)$, der Punkt $f_n(z)$ jeden Punkt der Ebene u höchstens *einmal* umkreist.

Zweitens wollen wir zeigen, daß die Grenzfunktion $f(z)$ für zwei verschiedene Werte von z ebenfalls verschiedene Werte annimmt, d. h. daß aus $(z_2 - z_1) \neq 0$ die Ungleichheit $f(z_1) \neq f(z_2)$ folgt.

Da nämlich für jedes $|z| < 1$ die Ableitung $f'(z) \neq 0$ ist, so wird vermöge der Funktion $u = f(z)$ für hinreichend kleine ϱ dem Kreise $|z - z_1| \leqq \varrho$ ein schlichtes Gebiet U_ϱ in der u-Ebene entsprechen, das sich nirgends überdeckt und den Punkt $u_1 = f(z_1)$ in seinem Inneren enthält. Man wähle außerdem ϱ so klein, daß der Punkt z_2 außerhalb des

*) Fréchet, Sur quelques points du Calcul Fonctionnel [Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), S. 1—74], S. 6.

Kreises $|z - z_1| \leqq \varrho$ fällt, und dieser Kreis einschließlich seines Randes innerhalb $|z| < 1$ verläuft. Den Abstand des Punktes $u_1 = f(z_1)$ vom Rande des Gebietes U_ϱ bezeichne man mit σ.

Die Reihe (22) konvergiert gleichmäßig im Kreise $|z - z_1| \leqq \varrho$; der Peripherie dieses Kreises einerseits und dem Mittelpunkte andererseits entsprechen demnach, vermöge der Abbildungsfunktion $u = f_n(z)$, eine Kurve und ein Punkt, die von einem gewissen $n = N$ an vom Rande des Gebietes U_ϱ resp. vom Punkte $u_1 = f(z_1)$ um weniger als $\frac{\sigma}{2}$ abweichen; der Kreisfläche $|z - z_1| \leqq \varrho$ entsprechen dann bei denselben Abbildungen Gebiete der u-Ebene, die alle den Kreis $|u - u_1| \leqq \frac{\sigma}{2}$ in ihrem Inneren enthalten. Für $n > N$ wird demnach, da die Funktionen $f_n(z)$ für voneinander verschiedene Werte von z v. e. verschiedene Werte annehmen, die Ungleichheit $|f_n(z_2) - u_1| > \frac{\sigma}{2}$ gelten, woraus folgt, daß $f(z_2) \neq f(z_1)$ ist, wie zu beweisen war.

Aus diesen sämtlichen Überlegungen schließen wir folgendes Resultat.

Wenn durch die Funktionen

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_n(z),\ \cdots \tag{22}$$

eine Folge von unendlich vielen Gebieten

$$G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_n,\ \cdots$$

(die auf der u-Ebene alle innerhalb eines und desselben Kreises liegen und den Punkt $u = 0$ enthalten) auf den Kreis $|z| < 1$ derart konform abgebildet werden, daß die Punkte $u = 0$, $z = 0$ und in diesen Punkten die positiven Richtungen der Achsen des Reellen einander entsprechen; wenn außerdem für jedes $|z| < 1$ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

existiert, so ist entweder $f(z)$ identisch Null oder es liefert die Funktion $u = f(z)$ für $|z| < 1$ die konforme Abbildung eines gewissen Gebietes Γ der u-Ebene, das nirgends innere Windungspunkte enthält und sich nirgends überdeckt.

14. Es sei im Falle, wo $f(z)$ nicht identisch verschwindet, $\overline{H}$ ein *abgeschlossenes* Gebiet der u-Ebene, das einschließlich seines Randes ganz innerhalb Γ liegt und den Punkt $u = 0$ in seinem *Inneren* enthält. Durch die konforme Abbildung, welche die Funktion $u = f(z)$ leistet, wird dem Gebiete $\overline{H}$ ein gewisses abgeschlossenes Gebiet auf dem Kreise $|z| < 1$ entsprechen, das bei positivem hinreichend kleinem σ ganz im Inneren des Kreises $|z| \leqq 1 - 2\sigma$ liegen wird. Dem größeren Kreise $|z| = 1 - \sigma$ entspricht demnach vermöge der Funktion $u = f(z)$ eine analytische Kurve C in der u-Ebene, die das Gebiet $\overline{H}$ umgibt.

Es sei $2e$ die Entfernung zwischen C und $\overline{H}$. Dem Kreise $|z| = 1 - \sigma$ entspreche vermöge der Funktion $u = f_n(z)$ die analytische Kurve C_n in der u-Ebene; da die Funktionen $f_n(z)$ auf diesem Kreise *gleichmäßig* gegen $f(z)$ konvergieren, so wird von einem gewissen $n \geqq N$ an der Abstand zwischen den Kurven C_n und C kleiner als e sein.

Für diese Werte von n hat das Gebiet $\overline{H}$ keinen gemeinsamen Punkt mit C_n, und da der Punkt $u = 0$ sowohl im Inneren von $\overline{H}$ als auch im Inneren von C_n liegt, so muß $\overline{H}$ ganz innerhalb C_n und folglich ganz innerhalb G_n liegen.

Wir haben schließlich das Resultat, *daß von einem gewissen n ab $\overline{H}$ einschließlich seiner Grenze ganz im Inneren aller Gebiete G_n liegen muß.*

15. Wir wollen jetzt beweisen, daß jedes Gebiet Γ_1, das sonst beliebig ist und nur die im letzten Paragraphen bewiesene Eigenschaft von Γ besitzt, im Inneren oder mindestens nicht außerhalb von Γ verläuft.

Es sei also Γ_1 ein Gebiet, das den Punkt $u = 0$ in seinem Inneren enthält und von dem wir wissen, daß jedes abgeschlossene Gebiet $\overline{H}$, das den Punkt $u = 0$ in seinem Inneren enthält und einschließlich seines Randes in Γ_1 liegt, von einem gewissen n an innerhalb sämtlicher Gebiete G_n verläuft. Es sei u_0 ein (innerer) Punkt von Γ_1; zu beweisen ist, daß u_0 im Inneren von Γ enthalten ist.

Wir konstruieren zunächst ein abgeschlossenes Gebiet $\overline{H}$, das die Punkte $u = 0$ und $u = u_0$ in seinem Inneren enthält und in Γ_1 liegt, und verbinden diese beiden Punkte durch einen Polygonenzug, der ganz in $\overline{H}$ liegt, und dessen Abstand vom Rande von $\overline{H}$ gleich 2σ sein möge.

Wir konstruieren zweitens eine Kette von Kreisen, deren Radien gleich σ seien und deren Mittelpunkte auf diesem Polygone liegen. Der erste Kreis der Kette habe seinen Mittelpunkt in $u = 0$ und jeder der übrigen auf der Peripherie des vorhergehenden Kreises der Kette; der k^{te} Kreis der Kette enthalte den Punkt u_0. Es seien

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \cdots,\ \mu_k$$

die Mittelpunkte dieser Kreise.

Nun gibt es nach Voraussetzung eine positive ganze Zahl N derart, daß für jedes $n > N$ das Gebiet $\overline{H}$ und folglich die Kreise

$$(23) \qquad |u - \mu_j| \leqq 2\sigma \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, k)$$

alle im betreffenden G_n enthalten sind. Die Umkehrung $z = \varphi_n(u)$ der Abbildungsfunktion $u = f_n(z)$ ist also in jedem Kreise (23) regulär und da $|\mu_{j+1} - \mu_j| = \sigma$, $|u_0 - \mu_k| \leqq \sigma$ ist, so ist nach dem Satze II, in welchem man

$$M = 1, \quad \vartheta = \frac{1}{2}, \quad M_0 = |\varphi_n(\mu_j)|$$

zu setzen hat,

$$(24)\qquad \begin{cases} |\varphi_n(\mu_{j+1})| \leqq \dfrac{2|\varphi_n(\mu_j)|+1}{2+|\varphi_n(\mu_j)|} \\ |\varphi_n(u_0)| \leqq \dfrac{2|\varphi_n(\mu_k)|+1}{2+|\varphi_n(\mu_k)|} \end{cases} \qquad (j=1,2,\cdots,(k-1)).$$

Durch sukzessive Anwendung dieser Ungleichheiten folgt, wenn man auch hier bemerkt, daß man in den rechten Seiten von (24) die Größen $|\varphi_n(\mu_j)|$ durch größere Zahlen ersetzen darf und daß außerdem $\varphi_n(\mu_1)=0$ ist,

$$|\varphi_n(\mu_2)| < \frac{1}{2}, \quad |\varphi_n(\mu_3)| < \frac{8}{10}, \cdots, |\varphi_n(\mu_k)| < \frac{3^{k-1}-1}{3^{k-1}+1}.$$

Schließlich findet man

$$|\varphi_n(u_0)| < \frac{3^k-1}{3^k+1} < 1.$$

Die Punkte

$$\zeta_n = \varphi_n(u_0)$$

befinden sich demnach alle innerhalb eines festen Kreises, dessen Radius kleiner als Eins und von n unabhängig ist; sie haben also mindestens einen Häufungspunkt z_0, der sich in diesem Kreise

$$|z| \leqq \frac{3^k-1}{3^k+1}$$

befindet. Dieser Häufungspunkt z_0 wird durch die Funktion $u=f(z)$ auf einen Punkt u_0' des Gebietes Γ abgebildet; ich behaupte, daß u_0' mit u_0 identisch ist. Im entgegengesetzten Falle könnte man die positive Zahl η so klein wählen, daß der Kreis $|u-u_0'| \leqq 2\eta$ im Inneren des Gebietes Γ läge, während u_0 selbst außerhalb dieses Kreises und in endlichem Abstande h desselben sich befände.

Dem Kreise $|u-u_0'| \leqq \eta$ entspricht in der Abbildung von Γ auf $|z|<1$ eine gewisse Umgebung von z_0, die den Kreis $|z-z_0|<\varepsilon$ enthalten möge. Da die Funktionen $f_n(z)$ in diesem Kreise gleichmäßig konvergieren, wird von einem gewissen $n > N_1$ an für jeden Punkt dieser Kreisfläche $|f_n(z)-u_0'| < 2\eta$ und folglich $|f_n(z)-u_0| > h$ sein. Hierin ist aber ein Widerspruch enthalten, da nach unserer Konstruktion beliebig große n und Punkte, die an z_0 beliebig nahe sind, existieren, für welche $f_n(z)=u_0$ ist. Also müssen die Punkte u_0' und u_0 zusammenfallen, und es ist jeder Punkt von Γ_1 in Γ enthalten.

Wir haben alles in Allem gezeigt, *daß das Gebiet Γ, das durch die Grenzfunktion $f(z)$ auf den Einheitskreis abgebildet wird, das größte Gebiet ist von der Eigenschaft, daß jedes abgeschlossene Gebiet $\overline{H}$, das in ihm enthalten ist und selbst den Anfangspunkt der Koordinaten $u=0$ enthält, von* *einem gewissen n an innerhalb sämtlicher Gebiete G_n der gegebenen Folge verläuft.*

Zugleich hat sich ergeben, daß, wenn die Funktionen $f_n(z)$ gegen die Konstante Null konvergieren, kein einziger Kreis existiert, der den Punkt $u = 0$ umgibt und sich von einem gewissen n an innerhalb aller G_n befindet.

16. Die zuletzt gefundenen Eigenschaften von Γ sind rein mengentheoretischer Natur. Jeder Folge von unendlich vielen einfach zusammenhängenden Gebieten

$$G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots,$$

die alle den Punkt $u = 0$ enthalten und innerhalb des Kreises $|u| < M$ verlaufen, können wir ein Gebiet K zuordnen, das wir den *Kern* der Gebietsfolge nennen wollen und das immer existiert, ganz unabhängig davon, ob die Folge der Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ konvergiert oder nicht.

Definition I. *Der Kern K einer Gebietsfolge soll aus dem einzigen Punkte $u = 0$ bestehen, wenn es keinen Kreis gibt, der $u = 0$ zum Mittelpunkte hat und von einem gewissen n an innerhalb sämtlicher G_n liegt. In jedem anderen Falle soll K das größte Gebiet von der Eigenschaft sein, daß jedes abgeschlossene Gebiet $\overline{H}$, das den Punkt $u = 0$ als inneren Punkt enthält und samt seinem Rande im Inneren von K liegt, auch von einem gewissen n an innerhalb sämtlicher G_n verläuft.*

Der Kern K ist durch diese Definition *eindeutig* bestimmt. Man kann diese Tatsache beweisen, indem man eine eindeutig bestimmte Konstruktionsregel angibt, die ein Gebiet liefert, von dem man beweist, daß es mit jedem Gebiete, das unserer Definition genügt, identisch ist:

Wenn der Kern nicht aus dem einen Punkte $u = 0$ besteht, so gibt es Kreise vom Mittelpunkte $u = 0$, die von einem gewissen n an, innerhalb sämtlicher Gebiete G_n liegen. Der Radius dieser Kreise ist sicher kleiner als M und besitzt eine obere Grenze ϱ_0. Es sei u_1 irgend ein Punkt des Inneren des Kreises $|u| < \varrho_0$, es gibt dann sicher Kreise $|u - u_1| \leqq \varrho$, die von einem gewissen n an innerhalb sämtlicher G_n liegen; die Radien dieser Kreise haben eine obere Grenze ϱ_1 und es ist $\varrho_1 \geqq \varrho_0 - |u_1|$. Indem man genau so fortfährt, wie bei der Konstruktion des Definitionsbereiches einer analytischen Funktion, von der ein Funktionselement bekannt ist und dabei berücksichtigt, daß die G_n alle einfach zusammenhängend sind, erhält man ein Gebiet, das mit dem Kerne K unserer Folge übereinstimmen muß.*)

17. Nachdem wir eingesehen haben, daß jede Folge von Gebieten

*) Vgl. § 21 dieser Arbeit, der eine detailliertere Konstruktionsregel enthält.

notwendig zu einem wohlbestimmten Kerne führt, können wir folgende Vereinbarung treffen:

Definition II. *Wir wollen sagen, daß eine Gebietsfolge*

$$G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots, \tag{25}$$

die aus unendlich vielen Gebieten (mit denselben Eigenschaften wie früher) besteht, gegen ihren Kern K konvergiert, wenn jede beliebige Teilfolge

$$G_{\nu_1}, G_{\nu_2}, \cdots, G_{\nu_n}, \cdots \tag{26}$$

von (25) *denselben Kern, wie die Hauptfolge besitzt.*

Es ist klar, daß, wenn der Limes der Abbildungsfunktionen

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

für $|z| < 1$ existiert, die Gebietsfolge gegen ihren Kern konvergieren muß. Jede Teilfolge

$$f_{\nu_1}(z), f_{\nu_2}(z), \cdots, f_{\nu_n}(z), \cdots$$

konvergiert nämlich dann gegen *dieselbe* Funktion $f(z)$, und diese ist nach Früherem nichts anderes als die Abbildungsfunktion für den Kern der Gebietsfolge (26).

Wenn nun aber umgekehrt die Gebietsfolge (25) gegen ihren Kern K konvergiert, so behaupte ich, daß die Grenzfunktion $f(z)$ existieren muß und die Abbildungsfunktion von K darstellt.

Angenommen nämlich, es gäbe im Kreise $|z| < 1$ einen Punkt $z = z_0$, für welchen $\operatorname{Lim} f_n(z)$ nicht existiert, so kann man aus der Folge $f_1(z)$, $f_2(z), \cdots$ zwei Teilfolgen

$$f_{\mu_1}(z), f_{\mu_2}(z), \cdots, f_{\mu_n}(z), \cdots \tag{27}$$

und

$$f_{\nu_1}(z), f_{\nu_2}(z), \cdots, f_{\nu_n}(z), \cdots \tag{28}$$

aussondern derart, daß

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_{\mu_n}(z_0) = \alpha, \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_{\nu_n}(z_0) = \beta$$

und $\alpha \neq \beta$ ist.

Ferner können wir nach § 12 b) aus (27) eine Teilfolge aussondern, die gegen eine Funktion $\varphi(z)$ und aus (28) eine andere Teilfolge, die gegen eine Funktion $\psi(z)$ konvergiert.

Übrigens ist $\varphi(z_0) = \alpha$ und $\psi(z_0) = \beta$, also

$$\varphi(z) \neq \psi(z). \tag{29}$$

Andererseits sind $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ die Abbildungsfunktionen eines und desselben Gebietes, nämlich des Kernes K, gegen welchen die Gebietsfolge (25) konvergiert. Nach dem Eindeutigkeitsbeweise von § 5 müssen sie also identisch sein, was mit (20) im Widerspruche steht. Es muß also entgegen unserer Annahme $\lim_{n=\infty} f_n(z)$ für jedes $|z| < 1$ existieren und wir haben den Satz:

Satz V. *Ist in der u-Ebene eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten $G_1, G_2, \cdots$ gegeben, die alle den Punkt $u = 0$ enthalten, im Inneren des Kreises $|u| < M$ liegen und die man auf den Einheitskreis abbilden kann; bezeichnet man ferner mit $f_1(z), f_2(z), \cdots$ die analytischen Funktionen, welche diejenigen konformen Abbildungen der Gebiete $G_1, G_2, \cdots$ auf den Kreis $|z| < 1$ liefern, bei welchen die Punkte $u = 0$ und $z = 0$ und in diesen die positiven Richtungen der Achsen des Reellen einander entsprechen; so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß*

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

für jedes $|z| < 1$ existiere, die, daß die betrachtete Gebietsfolge gegen ihren Kern konvergiert. Die Funktion $f(z)$ liefert die Abbildung von K auf $|z| < 1$.

18. Der Satz V kann nach verschiedenen Richtungen hin erweitert werden. Wir wollen zuerst algebraische und logarithmische Windungspunkte zulassen und statt der Gebiete $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$ eine Folge von Riemannschen Flächen

$$(30) \qquad R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$$

auf der u-Ebene betrachten; von diesen wollen wir voraussetzen, daß sie sämtlich, einschließlich ihres Randes im Inneren eines Kreises $|u| < M$ liegen und auf das Innere des Kreises $|z| < 1$ konform abgebildet werden können, also einfach zusammenhängend sind. Wir bezeichnen auch jetzt mit

$$(31) \qquad f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$$

die (eindeutigen) Funktionen von z, welche diese Abbildung leisten, und nehmen wieder an, daß für jedes n $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0)$ reell ist. Den Punkt, der in jedem R_n dem Punkte $z = 0$ entsprechen soll, wollen wir mit $u^* = 0$ bezeichnen, um ihn von den anderen Punkten von R_n zu unterscheiden, in denen möglicherweise ebenfalls $u = 0$ ist.

Außerdem wollen wir sofort bemerken, daß diese Funktionen sämtlichen Eigenschaften des § 12 genügen, da sie für $|z| < 1$ regulär und gleichmäßig beschränkt sind.

19. Unsere Untersuchung beginnen wir wieder mit dem Falle, wo

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

für $|z| < 1$ existiert und keine Konstante darstellt, wo also $f(z)$ nicht durchweg in diesem Kreise verschwindet; die Konvergenz ist nach § 12a) in jedem kleineren Kreise gleichmäßig, woraus man, nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie folgert, daß

$$\lim_{n=\infty} f_n'(z) = f'(z)$$

für jedes $|z| < 1$ existiert und daß die Konvergenz der $f_n'(z)$ in jedem kleineren Kreise ebenfalls eine gleichmäßige ist. Hieraus entnehmen wir ferner, daß sowohl $f(z)$ als auch $f'(z)$ für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktionen darstellen. Außerdem folgt aus unseren Voraussetzungen, daß $f'(z)$ nicht durchweg verschwinden kann; die Funktion $u = f(z)$ vermittelt demnach die konforme Abbildung einer gewissen Riemannschen Fläche P der u-Ebene auf den Einheitskreis $|z| < 1$. Da die nicht überall verschwindende reguläre Funktion $f'(z)$ in jedem Kreise $|z| \leqq \vartheta < 1$ nur eine endliche Anzahl von Nullstellen besitzen kann, so hat sie im ganzen Bereiche $|z| < 1$ höchstens eine abzählbare Menge dieser Punkte, denen die algebraischen Windungspunkte der Riemannschen Fläche P entsprechen. Wir wollen die Gesamtheit der übrigen Punkte, also die Gesamtheit derjenigen Punkte von P, die keine Windungspunkte sind, mit P' bezeichnen.

Es sei u_0 ein beliebiger Punkt von P', der durch die Funktion $u = f(z)$ auf den Punkt z_0 abgebildet sein möge. Da nach Voraussetzung $f'(z_0) \neq 0$ ist, so kann man den Radius ϱ eines Kreises $|z - z_0| \leqq \varrho$, dessen Mittelpunkt in z_0 liegt, so klein wählen, daß in diesem Kreise

$$|f'(z)| \geqq \frac{1}{2} |f'(z_0)| > 0$$

sei, und daß ferner das diesem Kreise auf der Fläche P' entsprechende Gebiet sich nicht überdecke. Dieses letzte Gebiet enthält den Punkt u_0 und folglich auch einen Kreis $|u - u_0| \leqq \sigma$ in seinem Inneren. Aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Funktionen $f_n'(z)$ im Kreise $|z - z_0| \leqq \varrho$ folgt, daß in diesem Kreise von einem gewissen n an $|f_n'(z)|$ größer als eine feste positive Zahl, z. B. größer als $\frac{1}{4} |f'(z_0)|$ sein muß. Indem man die Schlußweise des § 14 wiederholt, wird man auch hier folgern können, daß der Kreis $|u - u_0| < \sigma$ für hinreichend große n im Inneren sämtlicher Riemannschen Flächen R_n liegen muß und keine Windungspunkte dieser Riemannschen Flächen enthält.

Es sei jetzt $\overline{S}$ ein beliebiges *einfach zusammenhängendes*, abgeschlossenes Flächenstück, das ganz im Inneren der Fläche P' verläuft. Das Flächenstück $\overline{S}$ darf sich teilweise überdecken, es folgt aber aus der Abgeschlossenheit von $\overline{S}$, daß in jedem Punkte der u-Ebene nur eine endliche Anzahl von Blättern von $\overline{S}$ übereinander liegen. Um jeden Punkt u_0 des Flächenstückes S gibt es einen Kreis $|u - u_0| \leqq \sigma$, der für hinreichend große n im Inneren von sämtlichen R_n liegt; nach dem bekannten Satze von

Borel-Lebesgue wird man das ganze abgeschlossene Gebiet $\bar{S}$ mit einer *endlichen* Anzahl derartiger Kreise überdecken können. Hieraus folgt, daß das ganze Gebiet $\bar{S}$ für hinreichend große n innerhalb der Flächen R_n liegt und keine Windungspunkte dieser Riemannschen Flächen enthält.

Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Weg, der innerhalb $\bar{S}$ verläuft und auf der Fläche P' geschlossen sein möge. Diesem Wege entspricht durch $u = f(z)$ eine geschlossene Kurve C der z-Ebene, die ganz innerhalb eines Kreises $|z| < \vartheta < 1$ liegt. Durch die Funktion $u = f_n(z)$ wird die Kurve C auf einen Weg $\mathfrak{w}_n$ abgebildet, der auf der Riemannschen Fläche R_n geschlossen ist; wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z)$ längs der Kurve C wird für hinreichend große n der Weg $\mathfrak{w}_n$ ganz innerhalb des Flächenstückes $\bar{S}$ und dieses nach obigen Überlegungen ganz in R_n liegen und keine Windungspunkte dieser Fläche enthalten.

Der Weg $\mathfrak{w}$, der ganz in $\bar{S}$ verläuft, ist zwar nach Voraussetzung auf P' geschlossen, im allgemeinen sind aber auf $\bar{S}$ sein Anfangspunkt A und sein Endpunkt B voneinander verschieden: sie liegen m. a. W. in zwei Teilen von $\bar{S}$, die sich (in P') überdecken. Um diese beiden übereinanderliegenden Punkte als Mittelpunkt gibt es also zwei Kreise von gleichem Radius, die beide in $\bar{S}$ verlaufen und sich überdecken und folglich auf der Riemannschen Fläche P' nicht voneinander verschieden sind. Für hinreichend große Werte von n fallen nun diejenigen Punkte von $\mathfrak{w}_n$, wenn man diese Kurve auf $\bar{S}$ verlaufend denkt, die den Punkten A und B entsprechen, in das Innere der soeben betrachteten Kreise. Da die Kurve $\mathfrak{w}_n$ auf der Fläche R_n geschlossen ist und die Fläche R_n die beiden Kreise in ihrem Inneren enthält, müssen diese Kreise in demselben Blatte von R_n liegen, und es ist folglich auch $\mathfrak{w}$ eine *geschlossene* Kurve auf R_n.

Da man jedes Kurvenstück, das in P' verläuft, gleichviel ob es mehrfache Punkte besitzt oder nicht, mit einer abgeschlossenen einfach zusammenhängenden Fläche $\bar{S}$ umgeben kann, haben wir schließlich das Resultat: *Jede Kurve, die ganz im Inneren der Fläche* P' *verläuft und auf dieser Fläche geschlossen ist, verläuft von einem gewissen n ab innerhalb sämtlicher Gebiete R_n und ist auch dort geschlossen.*

Diese Eigenschaft der Fläche P' hat zur Folge, daß wir die Bedingung, die wir $\bar{S}$ auferlegt haben, einfach zusammenhängend zu sein, fallen lassen können und dann zu folgendem Resultate gelangen: *Ist $\bar{S}$ eine abgeschlossene einfach oder mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die ganz innerhalb* P' *liegt, auf dieser letzten Riemannschen Fläche aber schlicht ausgebreitet ist, so liegt von einem gewissen n ab die Fläche $\bar{S}$ im Inneren sämtlicher Flächen R_n und ist auch dort schlicht ausgebreitet.*

20. Die Funktion $f'(z)$ kann sehr wohl eine Nullstelle im Punkte

$z = 0$ besitzen; jedenfalls gibt es aber einen Kreis $|z| \leqq \sigma$, in dessen Inneren sie keine andere Nullstelle besitzt. Diesem Kreise $|z| \leqq \sigma$ entspricht vermöge der Abbildung $u = f(z)$ ein einfach zusammenhängendes Stück der Riemannschen Fläche P, die außer dem Punkte $u^* = 0$ keine Singularität enthält. Da $u^* = 0$ im Inneren dieses Gebildes liegt, gibt es eine Kreislinie $|u| = \tau$ von der Eigenschaft, daß, wenn man sämtliche Blätter der Riemannschen Fläche P längs $|u| = \tau$ aufschneidet, ein ein- oder mehrblättriges Stück dieser Fläche abgesondert wird, das den Punkt $u^* = 0$ enthält, außer diesem Punkte keine Singularität besitzt und dessen Rand aus der ein- oder mehrfach durchlaufenen Kreislinie $|u| = \tau$ besteht.

Dieses Stück wollen wir P_1 resp. P_1' nennen, je nachdem wir ihm den (allerdings nicht immer vorhandenen) Windungspunkt $u^* = 0$ zuzählen oder nicht.

Jeder Teil von P_1', der in einem Kreisringe $\tau_0 \leqq |u| \leqq \tau$ enthalten ist, hat dieselben Eigenschaften, wie die Fläche $\bar{S}$ des vorigen Paragraphen: Von einem gewissen n ab liegt es innerhalb sämtlicher R_n und ist auf diesen Flächen schlicht ausgebreitet.

Damit eine Grenzfunktion $f(z)$ existiere, die nicht durchweg gleich Null ist, ist insbesondere notwendig, daß eine Fläche mit den Eigenschaften von P_1 resp. P_1' im Inneren von P resp. P' enthalten sei.

Es sei jetzt P_0' irgend eine Riemannsche Fläche, welche die die Fläche $\bar{S}$ betreffende für P' ausgesprochene Eigenschaft besitzt und den Punkt $u^* = 0$, sowie die Umgebung P_1' dieses Punktes mit P' gemeinsam hat. Wir betrachten irgend einen Punkt u_0 des Inneren von P_0' und einen Weg $\mathfrak{w}_1$, der das Innere von P_0' nicht verläßt und u_0 mit einem Punkte des Inneren von P_1' verbindet.

Durch *wörtliche* Wiederholung der Betrachtungen des § 15 zeigt man, daß dieser Weg $\mathfrak{w}_1$ das Innere von P' nie verläßt, und daß folglich u_0 auf P' liegen muß.

Jeder andere Weg $\mathfrak{w}_2$, der auf P_0' zu demselben Punkt u_0 führen würde, muß auch auf P' diese Eigenschaft besitzen.

Es ist mit anderen Worten die Fläche P_0' ganz in P' enthalten und P' kann als die *größte* Riemannsche Fläche angesehen werden, welche die am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochene Eigenschaft besitzt und die Fläche P_1' enthält.

Die Riemannsche Fläche, die durch $f(z)$ auf $|z| < 1$ abgebildet wird, wollen wir wieder den *Kern* K der Folge

$$R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$$

nennen. Der Kern K ergibt sich, wenn man zu P' die algebraischen Verzweigungspunkte hinzufügt.

Die folgende eindeutige Konstruktion kann man benutzen, um P' und dann natürlich auch K zu gewinnen.

Wir betrachten eine abzählbare Menge von Punkten

$$(32) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots,$$

die alle im Kreise $|u| < M$ liegen und diesen Kreis überall dicht ausfüllen. Unser Ziel ist eine Folge

$$(33) \qquad P_1', P_2', P_3', \cdots, P_n', \cdots$$

von Riemannschen Flächen sukzessive zu konstruieren, die folgende Eigenschaften haben:

a) Jedes P_n' besitzt in jedem Punkte des Kreises $|u| < M$ nur eine endliche Anzahl (ev. Null) Blätter.

b) Jedes P_n' enthält P_{n-1}', ist in P' enthalten und ist schlicht auf P' ausgebreitet.

c) Die P_n' konvergieren gegen P', d. h. jeder Punkt von P' ist von einem gewissen n ab in sämtlichen P_n' enthalten.

Wir definieren die Folge (33) folgendermaßen:

Das erste Gebiet P_1' soll mit dem soeben eingeführten P_1' zusammenfallen.

Ist P_n' gefunden, so wird P_{n+1}' folgendermaßen konstruiert: man betrachte die n ersten Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ der Reihe (32) und markiere jeden dieser Punkte in jedem Blatte von P_n', in welchen sie ev. einen *inneren* Punkt darstellen; die Punkte des Randes von P_n', sowie die Windungspunkte, werden bei dieser Auswahl also nicht berücksichtigt. Jeder der markierten Punkte wird von irgend einem Punkte von P_1' aus längs eines Weges erreicht, der ganz in P_n', und von einem gewissen ν ab, ganz in R_ν liegt; es entspricht ihm dann ein ganz bestimmter Punkt jeder dieser R_ν. Um jeden der markierten Punkte als Mittelpunkte gibt es Kreise derart, daß jeder Kreis von kleinerem Radius von einem gewissen ν an in sämtlichen R_ν liegt; der größte Kreis, welcher diese Eigenschaft besitzt, werde dazu benutzt, um P_n' zu erweitern.

Im Falle, daß bei einer derartigen Erweiterung von P_n' Teile der so entstandenen Fläche sich überdecken, und die Punkte von zwei übereinanderliegenden Stücken der Fläche, von einem gewissen ν ab einem und demselben Punkte von R_ν entsprechen, sind die zugeordneten Flächenstücke aneinanderzuheften, was durch Auslöschen eines Teiles des Randes in jedem dieser Flächenstücke geschieht.

Die Fläche P_{n+1}' entsteht, nachdem man diese verschiedenen Operationen an jedem der in Betracht kommenden Punkte, der Reihe nach vorgenommen hat.

Die so konstruierte Folge genügt selbstverständlich unseren Forderungen a) und b); es wird aber auch, wie c) verlangt, schließlich jeder Punkt von P' erreicht, auch wenn P' unendlich viele Blätter, die in einem Punkte übereinanderliegen, enthält, da jeder Punkt α_k bei der von uns benutzten Anordnung unendlich oft berücksichtigt wird.

21. Die soeben geschilderte Konstruktion kann auf jede Folge von einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen, welche die von uns geforderten Bedingungen erfüllen, angewandt werden, ganz unabhängig davon, ob die Folge der entsprechenden Abbildungsfunktionen konvergiert oder nicht und liefert immer ein wohlbestimmtes Gebilde, den *Kern* K der Folge. Im Falle, wo ein Gebiet, das die Eigenschaften von P_1 besitzt, nicht existiert, soll K aus einem einzigen Punkte, nämlich $u = 0$, bestehen.

Wir wollen auch hier sagen, *daß die Folge* (31) *gegen ihren Kern konvergiert, wenn jede Teilfolge denselben Kern wie die Hauptfolge besitzt.*

Wenn wir jetzt bemerken, daß sowohl der Eindeutigkeitsbeweis des § 5 als auch der Satz von § 12 sich auf unseren jetzigen Fall erstrecken, so sehen wir, daß wir den Beweis des § 17 *wörtlich* hier wiederholen können und folgenden Satz erhalten.

Satz VI. *Es sei eine Folge* $R_1, R_2, \cdots$ *von einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen gegeben; jede Fläche* R_n *liege im Kreise* $|u| < M$ *und enthalte den Punkt* $u^* = 0$ *in ihrem Inneren. Durch die Funktionen* $f_n(z)$ *werde* R_n *derart auf* $|z| < 1$ *abgebildet, daß die Punkte* $u^* = 0$ *und* $z = 0$ *und in diesen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen.*

Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ *für jedes* $|z| < 1$ *existiere, die, daß die Folge der* R_n *gegen ihren Kern* K *konvergiere. Die Grenzfunktion* $f(z)$ *liefert dann die konforme Abbildung des Kernes* K.

Zu bemerken ist noch folgender Umstand: Der Kern einer Folge von Riemannschen Flächen $R_1, R_2, \cdots$, welche unsere übrigen Bedingungen erfüllen, aber nicht gegen K konvergieren, kann sehr wohl mehrfach zusammenhängend sein, wie einfache Beispiele zeigen. Dagegen folgt aus unserem Satze VI, daß, wenn (31) gegen K konvergiert, K notwendig einfach zusammenhängend sein muß.

22. Andere Erweiterungen unserer Sätze V und VI bestehen darin, daß man die Bedingung, daß die Gebiete der Folge (31) im Inneren eines festen Kreises $|u| < M$ liegen, durch allgemeinere ersetzt. Diese Bedingungen haben wir lediglich dazu benutzt, um die Resultate des § 12 anwenden zu können. Diese Eigenschaften bleiben aber, wie Herr Landau

und ich in einer gemeinsamen Arbeit gezeigt haben, bei viel allgemeineren Klassen von Funktionen erhalten.*)

Jede derartige Klasse ist durch gewisse Bedingungen charakterisiert, die man auf die Riemannschen Flächen R_n übertragen kann. Ist dann eine Folge von Riemannschen Flächen gegeben, welche diesen Bedingungen genügen, so folgt aus der Konvergenz der Folge gegen ihren Kern die Konvergenz der Abbildungsfunktionen und umgekehrt.

Um einen bestimmten Fall zu betrachten, so sehen wir (nach Satz VI der erwähnten Arbeit), daß unser Satz VI auch dann richtig ist, wenn wir die Bedingung $|u| < M$ fallen lassen, dafür aber die Forderung stellen, daß die Riemannschen Flächen $R_1, R_2, \cdots$ drei beliebige feste Punkte a, b, c nicht in ihrem Inneren enthalten, also dort kein Blatt besitzen, das regulär oder algebraisch verzweigt ist. Diese Bedingung ist natürlich immer erfüllt, wenn die R_n sämtlich in einem Kreise $|u| < M$ liegen.

Dagegen muß betont werden, daß eine Beschränkung irgendwelcher Natur *notwendig* ist, damit unser Satz gelte, und daß ihre Einführung beim Beweise unseres Satzes keineswegs künstlich war: Man kann leicht Beispiele bilden $\left(\text{z. B. bei } f_n(z) = \frac{n^n z^n}{(n^n z^n - 1)}\right)$, bei denen nicht nur die Folge von Riemannschen Flächen gegen ihren Kern konvergiert, sondern auch eine ganz bestimmte Abbildungsfunktion $f(z)$ des Kernes K existiert, aber die $f_n(z)$ *nicht* gegen $f(z)$ konvergieren.

Kapitel III.

Anwendungen.

23. Die erste Anwendung, die wir von unseren Sätzen machen wollen, gilt der Approximation der konformen Abbildung einer gewissen Klasse von einfach zusammenhängenden Gebieten, durch die konforme Abbildung von Gebieten, deren Rand aus einer oder mehreren analytischen Kurven bestehen.

Es sei in der u-Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet A mit dem Rande α gegeben; außerdem sei bekannt, daß ein einfach zusammenhängendes, nicht mit A identisches Gebiet B existiert, dessen Rand β den Rand α enthält.

Durch die letzte Voraussetzung ist dem Gebiete A eine gewisse Beschränkung auferlegt (das Innere eines längs eines Radius aufgeschnittenen Kreises genügt z. B. unseren Voraussetzungen nicht); dagegen sei gleich hervorgehoben, daß jedes Gebiet, dessen Begrenzung eine Jordansche Kurve ist unseren Bedingungen genügt.

*) Vgl. § 6 u. folg. der in der Fußnote S. 119 zitierten Arbeit.

Aus unseren Annahmen folgt zunächst, daß die Gebiete A und B getrennt liegen d. h. keinen gemeinsamen Punkt besitzen; es gibt nämlich nach Voraussetzung mindestens einen Punkt u_1 von B der kein Punkt von A ist. Wäre nun u_2 ein gemeinsamer Punkt von A und B, so könnte man u_1 und u_2 durch ein Polygon verbinden, das keinen Punkt von β und folglich auch keinen Punkt von α enthält. Danach müßte u_1 auch ein Punkt von A sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Wir können weiter, ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß A den Punkt $u=0$ und B den Punkt $u=\infty$ in ihrem Inneren enthalten; im entgegengesetzten Falle nämlich, können wir dies immer durch eine linear gebrochene Substitution erreichen.

Nun konstruieren wir eine Folge von Gebieten

$$G_1, G_2, G_3, \cdots, \tag{34}$$

die folgende Eigenschaften haben sollen

a) jedes G_n enthält in seinem Inneren den Punkt $u=0$ und ist einfach zusammenhängend,

b) der Rand γ_n von G_n besteht ausschließlich aus Punkten des Inneren des Gebietes B und der Abstand ε_n zwischen γ_n und β ist von Null verschieden,

c) jeder Kreis, der einschließlich seiner Peripherie ganz im Inneren von B liegt ist von einem gewissen n ab *außerhalb* sämtlicher G_n.

Man kann sehr leicht Folgen von Gebieten G_n angeben, welche diese sämtlichen Eigenschaften besitzen und die wegen der Eigenschaft c) alle innerhalb eines festen Kreises liegen müssen.

Nun bemerke man, daß der Kern K der Gebietsfolge (34) mit dem Gebiete A identisch ist. Erstens ist jeder Punkt u_0 von A in sämtlichen G_n enthalten, weil die Punkte $u=0$ und $u=u_0$ durch ein Polygon verbunden werden können, das keinen Punkt von B und folglich keinen Punkt irgend eines der Ränder γ_n enthält. Folglich ist jedes abgeschlossene Gebiet $\overline{H}$, das samt seinem Rande in A verläuft, auch in jedem G_n enthalten, und wir schließen daraus, daß das ganze Gebiet A in K enthalten ist.

Andererseits aber liegt kein einziger Punkt des Randes α von A im Inneren des Kernes K; denn in jeder Umgebung eines solchen Punktes liegen (weil dieser Punkt auch in β enthalten ist) Punkte von B, die infolge der Eigenschaft c) von einem gewissen n ab sich außerhalb sämtlicher G_n befinden.

Die Eigenschaften a), b), c) besitzt nun nicht nur die Folge (34) sondern auch jede Teilfolge, die aus dieser ausgesondert wird. Der Kern einer jeden Teilfolge ist mithin wiederum A, wodurch gezeigt ist, daß die Folge (34) gegen ihren Kern konvergiert.

Nach unserem Satze V (§ 17) konvergieren also die Abbildungsfunktionen $f_n(z)$, welche die Gebiete G_n auf den Kreis $|z| < 1$ derart konform abbilden, daß $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0)$ reell sei, gegen eine Grenzfunktien $f(z)$ und die Konvergenz ist gleichmäßig für $|z| \leqq \vartheta < 1$.

24. Es sei ϱ eine beliebige positive Zahl, die kleiner als Eins ist. Dem Kreise $|z| = \varrho$ entspricht, vermöge der Grenzfunktion $u = f(z)$, die das Gebiet A abbildet, eine geschlossene Kurve C, die ganz in A verläuft und deren Abstand vom Rande α mit 2σ bezeichnet sein möge. Durch die Abbildungsfunktion $u = f_n(z)$ entspricht *demselben* Kreise $|z| = \varrho$ eine Kurve C_n, welche (wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $f_n(z)$ auf $|z| = \varrho$) von einem gewissen n ab um weniger als σ von C abweicht. Es sei N der erste Wert von n für welchen dies stattfindet. Dann verläuft C_N ganz im Inneren von A und der Abstand zwischen C_N und α und folglich auch zwischen C_N und β ist mindestens gleich σ.

Die perfekte Punktmenge $(A + \beta)$ liegt ganz im Inneren des Gebietes G_N und hat mit dem Rande von G_N keinen gemeinsamen Punkt. Ihr entspricht vermöge der Funktion $u = f_N(z)$ eine perfekte Punktmenge T, deren größter Abstand vom Punkte $z = 0$ kleiner als Eins ist. Letzteres kann man folgendermaßen beweisen: angenommen es gäbe unendlich viele Punkte $z_1, z_2, z_3, \cdots$ für welche $\lim\limits_{k=\infty} |z_k| = 1$ ist und die alle der betreffenden Punktmenge T gehören, so würden die ihnen entsprechenden Punkte $u_k = f_N(z_k)$ mindestens einen Häufungspunkt u_0 haben, der notwendig ein Punkt von $(A + \beta)$ sein muß. Dem Punkte u_0 entspricht aber bei der konformen Abbildung von G_N ein Punkt z_0 des Inneren des Kreises $|z| < 1$. Einem kleinen Kreise $\varkappa$, der z_0 umgibt und einen endlichen Abstand vom Kreise $|z| = 1$ besitzt, entspricht vermöge der Funktion $f_N(z)$ eine Umgebung von u_0, und kein Punkt dieser letzten Umgebung ist Bild eines Punktes, der außerhalb $\varkappa$ liegt. Nun ist aber nach Voraussetzung u_0 Häufungspunkt von Punkten u_k, also müßten unendlich viele Punkte der Reihe $z_1, z_2, \cdots$ innerhalb des Kreises $\varkappa$ liegen; letzteres ist aber unmöglich, wenn die Beziehung $\lim\limits_{k=\infty} |z_\mu| = 1$ gelten soll.

Es gibt also einen Kreis $|z| \leqq \varrho' < 1$, der die Punktmenge T enthält, wobei $|z| = \varrho'$ und T keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Dem Kreise $|z| = \varrho'$ entspricht also vermöge $u = f_N(z)$ eine geschlossene analytische Kurve C_N', die ganz in B verläuft und die Punktmenge α umgibt.

Die Kurven C_N und C_N' sind Niveaulinien einer und derselben Potentialfunktion; die Differenz $l \frac{\varrho'}{\varrho}$ der Werte dieser Potentialfunktion auf C_N' und C_N ist kleiner als $l \frac{1}{\varrho}$, und kann, wenn man ϱ hinreichend nahe an Eins wählt, beliebig klein gemacht werden.

Wir haben folgendes Resultat erhalten:

Jede Punktmenge α, die einerseits mit der vollen Begrenzung eines Gebietes A zusammenfällt, andererseits in der Begrenzung eines von A verschiedenen Gebietes B enthalten ist, insbesondere also jede Jordansche Kurve, liegt ganz im Inneren von Streifen die durch zwei Niveaulinien einer und derselben Potentialfunktion gebildet sind; die Differenz der Werte der Potentialfunktion auf diesen beiden Niveaulinien kann beliebig klein gemacht werden.

25. Es bedeute jetzt A' ein beliebiges, einfach-zusammenhängendes, schlichtes Gebiet, das die Kurve C_N ganz in seinem Inneren enthält und selbst im Inneren des Gebietes G_N liegt.

Durch die Abbildungsfunktion $u = f_N(v)$ wird dieses Gebiet A' auf ein Gebiet A'' der v-Ebene abgebildet, das den Kreis $|v| = \varrho$ in seinem Inneren enthält und selbst im Inneren von $|v| = 1$ verläuft. Es sei $v = \varphi(z)$ die Funktion, welche die Abbildung von A'' auf den Kreis $|z| < 1$ liefert, wobei die Punkte $v = 0$ und $z = 0$ und in ihnen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen sollen.

Die Abbildungsfunktion des Gebietes A' auf $|z| < 1$ sei mit $F(z)$ bezeichnet, und es sei ebenfalls $F(0) = 0$ und $F'(0)$ reell; dann ist

$$F(z) = f_N(\varphi(z)). \tag{35}$$

Nun bemerke man, daß man den Satz IV (§ 9) auf $\varphi(z)$ anwenden kann; hier sind die Größen $\varrho_1 = 1$ und $\varrho_0 > \varrho$, und ferner ist $\varphi'(v)$ reell und positiv, also ist für $|z| < \varrho$

$$|\varphi(z) - z| < \varrho_0 \varepsilon(\varrho_0) < \varrho\,\varepsilon(\varrho) < 1{,}4\,\varrho\sqrt{1-\varrho}, \tag{36}$$

wo $\varepsilon(\varrho)$ durch die Gleichungen (17) und (19) des § 9 (S. 116, 117) definiert ist.

Sind zwei positive Zahlen σ und η gegeben, von denen die erste kleiner als Eins, die zweite beliebig ist, so wollen wir zeigen, daß bei geeigneter Wahl von ϱ und N die Größe $|F(z) - f(z)|$ für alle $|z| \leqq \sigma$ die Zahl η nicht übersteigt und von der Gestalt von A' unabhängig ist.

Im Kreise $|z| \leqq \sigma$ sind nämlich die Ableitungen $f_1'(z), f_2'(z), \cdots$ unserer Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ gleichmäßig beschränkt [weil diese Ableitungen in diesem Kreise *gleichmäßig* gegen eine reguläre Funktion $f'(z)$ konvergieren]. Es sei M das Maximum von $|f_n'(z)|$, wenn $|z| \leqq \sigma$ ist und n die ganze Zahlenreihe $1, 2, \cdots$ durchläuft.

Nun wähle man ϱ im Intervalle zwischen σ und Eins so groß, daß $\varrho\,\varepsilon(\varrho) \leqq \frac{\eta}{2M}$ sei. Zweitens wähle man die ganze Zahl N so groß, daß einerseits in der Abbildung des Gebietes G_N der Kreislinie $|z| = \varrho$ eine Kurve C_n entspreche, die ganz im Inneren von A verlaufe und mit der

Begrenzung α keinen gemeinsamen Punkt habe, und daß andererseits für $|z| \leqq \sigma$ die Beziehung $|f_N(z) - f(z)| \leqq \frac{\eta}{2}$ gelte.

Bemerkt man nun, daß nach Satz I für $|z| \leqq \sigma$ auch $|\varphi(z)| \leqq \sigma$ ist, so sieht man, daß für $|z| \leqq \sigma$ in der Formel

$$F(z) - f_N(z) = f_N(\varphi(z)) - f_N(z) = \int_z^{\varphi(z)} f_N'(t)\, dt$$

bei geradlinigem Integrationswege $|f_N'(t)| \leqq M$ ist; dann liefert der erste Mittelwertsatz mit Berücksichtigung von (36)

$$|F(z) - f_N(z)| \leqq M\varrho\, \varepsilon(\varrho) \leqq \frac{\eta}{2}.$$

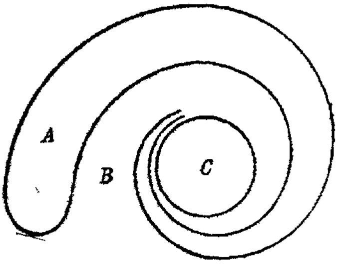
Also ist

$$|F(z) - f(z)| \leqq |F(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f(z)| \leqq \eta.$$

Es sei δ_1 die kleinste Entfernung zwischen den Begrenzungen γ_N und α der Gebiete G_N und A, δ_2 die kleinste Entfernung zwischen C_N und α, δ die kleinste der beiden Zahlen δ_1 und δ_2. Unsere Ungleichheiten gelten für jedes Gebiet A', das den Punkt $u = \sigma$ enthält, wenn jeder beliebige Punkt der Begrenzung α' von A' um weniger als δ von dem Rande α von A entfernt ist.

Um die Abbildungsfunktion $f(z)$ von A durch die Abbildungsfunktion $F(z)$ eines anderen Gebietes A' innerhalb des Kreises $|z| < \sigma$ mit beliebiger Genauigkeit zu approximieren, genügt es also das Maximum des Abstandes eines Punktes der Begrenzung von A' von der Begrenzung von A hinreichend klein zu nehmen. Die Gestalt des Randes von A' bleibt dagegen vollständig willkürlich.

26. Die Resultate dieses Kapitels gelten natürlich für alle Gebiete A, deren Begrenzung aus einer *Jordanschen Kurve* gebildet ist.



Instruktiver ist es, ein Gebiet A als Beispiel zu betrachten, für welches der Rand α keine Jordansche Kurve ist und das den Bedingungen des § 23 genügt.

Betrachten wir mit Herrn Brouwer*) einen Streifen A, der an einem Ende geschlossen ist und sich spiralförmig um eine Kreisfläche C unendlich oft windet. Durch den Rand α dieses Streifens werden drei Gebiete A, B und C voneinander getrennt. Die Ränder α und β von A und B fallen zusammen und enthalten beide den Rand γ von C.

Das Gebiet A sowohl wie das Gebiet C liegen *beide* innerhalb einer

*) Zur Analysis Situs [Math. Ann. 68, S. 422—444] S. 423.

jeden geschlossenen analytischen Kurve ohne Doppelpunkte, die in B verläuft, und die irgend einen Punkt von A oder C in ihrem Inneren enthält; B und C liegen *beide* außerhalb jeder geschlossenen Kurve, die in A verläuft.

Trotzdem gelten, nach unseren Resultaten, folgende Sätze:

1. Man kann jede konforme Abbildung des Gebietes A (oder des Gebietes C) durch die konformen Abbildungen des Inneren von Gebieten approximieren, deren Rand in B verläuft.

2. Man kann jede konforme Abbildung des Gebietes B (oder des Kreises C) durch die konforme Abbildung des Äußeren von Gebieten approximieren, deren Rand in A verläuft.

3. Man kann zwei Niveaulinien einer und derselben Potentialfunktion finden, die beliebig benachbarten Werten dieser Funktion entsprechen, und von denen die erste in A, die zweite in B verläuft, und auch dasselbe mit B und C oder mit A und C erreichen.

27. Wir gehen jetzt zu einer anderen Klasse von Problemen über und betrachten einen reellen Parameter t, der in einem Intervalle, z. B. im Intervalle $\overline{0\,1}$, variiert; jedem Werte von t entspreche ein Gebiet G_t, das innerhalb des festen Kreises $|u| < M$ liege und den Punkt $u = 0$ enthalte.

Die Abbildungsfunktionen $f_t(z)$ der Gebiete dieser Schar auf den Kreis $|z| < 1$ sind natürlich Funktionen von t und wir wollen wiederum festsetzen, daß für jedes t die Größen $f_t(0)$ und $f_t'(0)$ gleich Null resp. reell seien.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit diese Abbildungsfunktionen bei festem z, wenn $|z| < 1$ ist, *stetige* Funktionen von t seien, ist, nach unserem Satze V, die, daß für jede gegen einen bestimmten Wert t konvergierende Folge $t_1, t_2, \cdots$ die entsprechenden Gebiete

$$G_{t_1},\ G_{t_2},\ \cdots,\ G_{t_n},\ \cdots \tag{36}$$

gegen einen Kern konvergieren, der mit G_t identisch ist.

Es sei, unter der Annahme, daß die soeben ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, $\overline{H}$ ein abgeschlossenes Gebiet, das den Punkt $u = 0$ enthält und samt seinem Rande im Inneren von G_t liegt. Dann muß für jede Folge $t_1, t_2, \cdots$ von Werten des Parameters, die gegen t konvergieren, von einem gewissen $n > N$ ab das Gebiet $\overline{H}$ im Inneren sämtlicher G_{t_n} liegen.

Hieraus folgt, daß eine positive Zahl ε gefunden werden kann, derart, daß für alle Werte τ des Parameters, die im Inneren des Intervalles $\overline{0\,1}$ liegen und die Ungleichheit

$$|\tau - t| \leqq \varepsilon$$

befriedigen, das Gebiet $\overline{H}$ im Gebiete G_τ enthalten ist.

Im entgegengesetzten Falle würde nämlich eine Folge $t_1', t_2', \cdots, t_n', \cdots$ von Werten des Parameters bestimmt werden können, die gegen t konvergiert und die Eigenschaft besitzt, daß kein einziges $G_{t_n'}$ das ganze Gebiet $\overline{H}$ enthält.

Ist zweitens $\overline{H}$ ein abgeschlossenes Gebiet, das den Punkt $u = 0$ enthält und im Inneren von unendlich vielen Gebieten

$$G_{t_1}, G_{t_2}, \cdots, G_{t_n}, \cdots$$

liegt, und ist t irgend ein Häufungspunkt der Folge $t_1, t_2, \cdots$, so muß $\overline{H}$ im Inneren von G_t liegen. Denn aus $t_1, t_2, \cdots$ kann man eine Folge $t_1', t_2', \cdots$ aussondern, die gegen t *konvergiert* und der Kern K der entsprechenden $G_{t_n'}$ muß einerseits $\overline{H}$ enthalten, andererseits mit G_t identisch sein.

28. Die beiden Bedingungen, die wir gefunden haben, müssen notwendig erfüllt sein, damit die Abbildungsfunktionen $f_t(z)$ stetig von t abhängen; wir können sehr leicht zeigen, daß sie auch hinreichend sind.

Wir nehmen dazu an, sie seien erfüllt, und $t_1, t_2, \cdots$ sei eine beliebige Folge von Zahlen des Intervalls $\overline{0\,1}$, die gegen eine Zahl t desselben Intervalls konvergieren. Jedes Gebiet $\overline{H}$, das von einem gewissen k ab im Inneren jedes einzelnen G_{t_k} liegt und den Punkt $u = 0$ enthält, ist, unserer Voraussetzung nach, ein Teil von G_t; also ist G_t im Kerne K der Folge G_{t_k} enthalten.

Andererseits ist aber jedes abgeschlossene Gebiet $\overline{H}$, das im Inneren von G_t liegt und den Punkt $u = 0$ enthält, von einem gewissen k ab auch im Inneren sämtlicher G_{t_k}, woraus folgt, daß der Kern der Gebietsfolge in G_t enthalten ist.

Der Kern der Gebietsfolge $G_{t_1}, G_{t_2}, \cdots$ ist bei unseren Annahmen, unter der alleinigen Voraussetzung, daß die t_k gegen t konvergieren, mit G_t identisch. Unsere Gebietsfolge konvergiert also gegen ihren Kern.

Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Es sei jedem Werte eines Parameters t im Intervalle $\overline{0\,1}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_t zugeordnet, das den Punkt $u = 0$ in seinem Inneren enthält. Es sei $f_t(z)$ diejenige analytische Funktion, die das Innere des Gebietes G_t auf den Einheitskreis $|z| < 1$ abbildet und bei welcher $f_t(0) = 0$ und $f_t'(0)$ reell und positiv ist. Dann ist notwendig und hinreichend, damit für jeden Wert von z, der dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist, die Funktion $f_t(z)$ stetig von t abhänge, daß:

a) *jedem abgeschlossenen Gebiete $\overline{H}$, das im Inneren von G_t liegt und den Punkt $u = 0$ enthält, eine positive Zahl ε zugeordnet werden kann,* *sodaß für jeden Punkt* τ *des Intervalls* $\overline{01}$, *welcher der Bedingung* $|t-\tau|<\varepsilon$ *genügt, das Gebiet* $\overline{H}$ *im Inneren von* G_τ *liegt.*

b) *jedes abgeschlossene Gebiet* $\overline{H}$, *das den Punkt* $u=0$ *enthält und im Inneren von unendlich vielen Gebieten* $G_{t_1}, G_{t_2}, \cdots$ *liegt, auch im Inneren von* G_t *liegt, wo* t *einen beliebigen Häufungspunkt der Zahlenfolge* $t_1, t_2, \cdots$ *bedeutet.*

Die beiden Bedingungen a) und b) des vorigen Satzes sind voneinander unabhängig, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei G_t für jedes t eine Kreisfläche, deren Mittelpunkt in $u=0$ liege. Der Radius dieser Kreise sei r_0 für $t=0$ und r für $0<t\leqq 1$.

Ist $r_0<r$, so ist die erste Bedingung erfüllt aber nicht die zweite; ist $r_0>r$, so ist umgekehrt die zweite Bedingung erfüllt aber nicht die erste.

29. Zum Schluß wollen wir eine Anwendung des Satzes VI machen, indem wir bemerken, daß er zu einem häufig bequemen Kennzeichen führt durch das man entscheidet, ob eine Folge von Funktionen $f_1(z), f_2(z), \cdots$ für $|z|<\vartheta<1$ gleichmäßig gegen Null konvergiert, wenn $f_n(0)=0$ ist. Kennt man nämlich die Riemannschen Flächen $R_1, R_2, \cdots$, welche diese Funktionen auf die Kreisfläche $|z|<1$ abbilden, und liegen die R_n innerhalb eines und desselben Kreises, so ist notwendig und hinreichend, damit $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)=0$ sei (für $|z|<\vartheta<1$), daß entweder der kürzeste Abstand δ_n des Randes von R_n mit wachsendem n die Grenze Null habe, oder daß in jedem Kreise $|u|<\sigma$ von einem gewissen n ab dasjenige Stück von R_n, das auf die Umgebung von $z=0$ abgebildet wird, einen Windungspunkt p_n^{ter} Ordnung oder einen logarithmischen Windungspunkt enthalte, wobei nicht unendlich viele p_n einander gleich sein dürfen.

Kapitel IV.

Die Existenz der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete.

30. Wir haben uns bis jetzt auf den Standpunkt gestellt, daß die Resultate von Schwarz oder sogar die von Osgood uns bekannt wären.

Bemerkt man aber, daß die Beweise des Kapitels II nur die Existenz der Abbildung der Annäherungsgebiete, nicht aber die des Kerns voraussetzen, so können wir bei geeigneter Wahl der Folge $G_1, G_2, \cdots$ [Satz V] oder der Folge $R_1, R_2, R_3, \cdots$ [Satz VI] die Existenz der Lösung des Problems der konformen Abbildung mit rein funktionentheoretischen Hilfsmitteln beweisen.

Der Weg, der im ersten Augenblicke als der natürlichste erscheint, würde darin bestehen, Polygone als Approximationsgebiete zu wählen.

Schwarz hat nämlich eine Methode ersonnen*), die rein funktionentheoretisch ist und die konforme Abbildung des Inneren eines Polygons liefert. Diese Methode fordert aber bei jedem neuen Schritte eine schwierige Konstantenbestimmung, die mit der Auflösung transzendenter Gleichungen verbunden ist. Die gewonnenen Annäherungsfunktionen dürften daher sehr unübersichtlich sein.

Dagegen werden wir sehen, daß wir mit rationalen Funktionen auskommen können, wenn wir die Eineindeutigkeit der Abbildung für die Approximationsgebiete aufgeben und zu Riemannschen Flächen übergehen.

31. Wir behandeln zunächst das Problem für ein einfach zusammenhängendes Gebiet A, das derselben Beschränkung wie im § 23 unterworfen ist: Es gibt ein von A verschiedenes Gebiet B, dessen Begrenzung β die Begrenzung α von A enthält. Ist z. B. α eine Jordansche Kurve, so ist die Bedingung für A erfüllt. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß A den Punkt $u = 0$ und B den Punkt $u = \infty$ enthält, daß A im Kreise $|u| < 1$ liegt und der Rand α von A mit der Kreislinie $|u| = 1$ keinen einzigen Punkt gemeinsam hat: mittels einer linear gebrochenen Substitution können diese sämtlichen Bedingungen erfüllt werden.

Nun sei

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \tag{37}$$

eine Folge von unendlich vielen Punkten, die sämtlich in dem Gebiete B, aber innerhalb (also nicht auf der Peripherie) des Kreises $|u| < 1$ liegen und die Eigenschaft haben, daß jeder Punkt von α Häufungspunkt der Punktmenge (37) ist. Eine derartige Punktmenge läßt sich mit Hilfe einer Folge von quadratischen Netzzerlegungen der u-Ebene, deren Seitenlängen gegen Null konvergieren, sofort konstruieren.**)

Von p_1 aus kann man einen Schnitt s_1 führen, der p_1 mit der Peripherie des Kreises $|u| = 1$ verbindet und keinen Punkt mit α gemeinsam hat (also eine endliche Entfernung von α besitzt). Von p_2 aus führen wir einen analogen Schnitt s_2, der keinen Punkt mit α und mit eventueller Ausnahme von p_2 selbst keinen einzigen Punkt mit s_1 gemeinsam hat, von p_3 aus einen Schnitt s_3, der keinen Punkt mit α und mit eventueller Ausnahme von p_3 selbst keinen einzigen Punkt mit den beiden vorhergehenden Schnitten s_1 und s_2 gemeinsam hat usf.

31. Nun betrachten wir eine Riemannsche Fläche R_1, die auf der u-Ebene ausgebreitet ist, im Punkte p_1 einen Windungspunkt zweiter Ord-

*) Über einige Abbildungsaufgaben [J. f. Math. 70, S. 105—120, Gesammelte Werke II, S. 65—83].

**) cf. z. B. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie I, Kap. 5, § 9.

nung besitzt, und deren Rand aus dem doppelt zu durchlaufendem Kreise $|u| = 1$ besteht.*)

Setzt man $p_1 = r^2 e^{i\vartheta}$, so ist die konforme Abbildung dieser Riemannschen Fläche auf den Kreis $|z| < 1$, bei welcher die Punkte $z = 0$ und $u = 0$ und in ihnen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen, durch die Funktion

$$u = z\,\frac{(1+r^2)z - 2re^{i\vartheta}}{2rz - (1+r^2)e^{i\vartheta}}$$

realisiert. Man kann diese Funktion folgendermaßen schreiben:

$$(38) \qquad f_1(z) = z\,\frac{(|p_1| + |p_1{}^2|)z - 2p_1\left|p_1^{\frac{1}{2}}\right|}{2\left|p_1^{\frac{3}{2}}\right| z - p_1(1 + |p_1|)}.$$

Die Funktion $f_1(z)$ soll die erste einer Folge von Abbildungsfunktionen sein, die im Limes das gegebene Gebiet A auf den Kreis $|z| < 1$ abbilden.

Um die zweite dieser Funktionen zu erhalten, betrachten wir eine Hilfsebene u_1 und die Abbildung der Schnitte s_1 und s_2 der u-Ebene auf u_1 durch die Funktion (38)

$$u = f_1(u_1).$$

Dem Schnitte s_1 entspricht (wenn man seine beiden Ufer betrachtet) eine Kurve s_1', die durch den Punkt $u_1 = p_1\left|p_1^{-\frac{1}{2}}\right|$, welcher dem Verzweigungspunkte $u = p_1$ entspricht, geht und den Kreis $|u_1| < 1$ in zwei Teile zerlegt. Dem Schnitte s_2 entsprechen zwei Kurven, (die keinen gemeinsamen Punkt haben und) die durch s_1' voneinander getrennt liegen. Wir bezeichnen mit s_2' diejenige von ihnen, die auf derselben Seite von s_1' liegt, wie $u_1 = 0$ und mit p_2' die auf s_2' liegende Wurzel der Gleichung zweiter Ordnung

$$(39) \qquad p_2 = f_1(u_1).$$

Nun betrachten wir eine Riemannsche Fläche, die aus zwei über der u_1-Ebene ausgebreiteten Blättern besteht, deren Rand aus dem zweimal zu durchlaufenden Kreise $|u_1| = 1$ gebildet ist, und die in p_2' verzweigt ist. Die Abbildung dieser Riemannschen Fläche auf den Kreis $|z| < 1$, bei welcher die Nullpunkte $u_1 = 0$ und $z = 0$ und in diesen die positiven Richtungen der reellen Achsen einander entsprechen, wird durch eine Funktion

$$u_1 = \varphi_2(z)$$

*) Die Idee, zweiblättrige Hilfsflächen als Majoranten zu benutzen, rührt von Koebe her, der derartige Majoranten vielfach benutzt hat; cf. z. B. „Über die Uniformisierung algebraischer Kurven I" [Math. Ann. 67, p. 145—224], S. 209.

geliefert, die man erhält, indem man in (38) die Konstante p_1 durch p_2' ersetzt.

Die Funktion

$$u = f_1(\varphi_2(z)) = f_2(z) \tag{40}$$

liefert die konforme Abbildung des Kreises $|z| < 1$ auf eine vierblättrige Riemannsche Fläche R_2, die folgende Eigenschaften hat: im Punkte $u = p_1$ besitzt R_2 zwei übereinanderliegende aber getrennte Windungspunkte zweiter Ordnung und die vier Blätter von R_2 sind dort verzweigt; im Punkte $u = p_2$ besitzt R_2 einen einzigen Windungspunkt zweiter Ordnung und nur zwei Blätter von R_2 sind in diesem Punkt verzweigt. Schneidet man die vier Blätter von R_2 längs s_1 und s_2 auf, so zerfällt R_2 in vier Stücke. Das eine Stück, das den Punkt $u = 0$ enthält, dem in der Abbildung $z = 0$ entspricht, ist sowohl in p_1 als auch in p_2 verzweigt.

Die dritte Funktion $f_3(z)$ der Folge, die wir konstruieren wollen, ist auf ganz analogem Wege zu ermitteln: Wir betrachten eine neue Hilfsebene u_2 und die Funktionen

$$u = f_1(u_1), \quad u_1 = \varphi_2(u_2);$$

dem Schnitte s_2' (den wir in der u_1-Ebene gebildet haben) entspricht in der u_2-Ebene vermöge $u_1 = \varphi_2(u_2)$ eine Kurve s_2'', die den Kreis $|u_2| < 1$ in zwei Teile zerlegt. Dem Schnitte s_3 entsprechen in u_1 vermöge $u = f_1(u_1)$ zwei Kurven, die durch s_1' getrennt sind; es sei s_3' diejenige von ihnen, welche auf derselben Seite von s_1' wie $u_1 = 0$ liegt. Dem Schnitte s_3' entsprechen in der u_2-Ebene, vermöge der Funktion $u_1 = \varphi_2(u_2)$ wiederum zwei Kurven; es sei s_3'' diejenige von ihnen, die auf derselben Seite von s_2'' wie $u_2 = 0$ liegt.

Mit p_3'' bezeichnen wir ferner dasjenige in u_3 gelegene Bild von p_3, das auf s_3'' liegt, und mit $\varphi_3(z)$ die Funktion, die man erhält, indem man in (38) die Größe p_1 durch p_3'' ersetzt. Dann kann man für die gesuchte Funktion $f_3(z)$ setzen:

$$f_3(z) = f_2(\varphi_3(z)).$$

Indem man auf diese Weise fortfährt, erhält man eine Folge von unendlich vielen rationalen Funktionen

$$f_1(z),\, f_2(z),\, \cdots,\, f_n(z),\, \cdots. \tag{41}$$

Die n^{te} Funktion $f_n(z)$ dieser Folge bildet den Kreis $|z| < 1$ auf eine 2^n-blättrige Riemannsche Fläche R_n der u-Ebene ab, deren Rand aus der 2^n-fach durchlaufenen Kreislinie $|u| = 1$ besteht. Schneidet man sämtliche Blätter von R_n längs der Schnitte $s_1, s_2, \cdots, s_n$ auf, so zerfällt R_n in 2^n Stücke, von denen das eine u^* den dem Punkte $z = 0$ entsprechenden Punkt $u^* = 0$ enthält; außerdem sind die n Punkte

$$u^* = p_1, \; u^* = p_2, \; \cdots, \; u^* = p_n$$

die auf dem Rande dieses Stückes liegenden Verzweigungspunkte von R_n.

32. Betrachtet man den Kern der Folge von Riemannschen Flächen $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$, so sieht man aus unserer letzten Bemerkung, daß dieser jeden (inneren) Punkt des Gebietes A enthält. Da aber die Verzweigungspunkte $p_1, p_2, \cdots$ der Folge $R_1, R_2, \cdots$ in jedem Punkt des Randes α von A einen Häufungspunkt besitzen, so gehören die Punkte von α nicht zum Kern, und dieser muß mit A identisch sein. Ganz analog würde man beweisen, daß A mit dem Kerne einer beliebigen Teilfolge von $R_1, R_2, \cdots$ zusammenfallen muß. Die Folge $R_1, R_2, \cdots$ konvergiert demnach gegen ihren Kern und nach Satz VI muß also

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

existieren und die konforme Abbildung des Gebietes A darstellen.

Hiermit ist die Möglichkeit der konformen Abbildung des Inneren eines durch eine Jordansche Kurve begrenzten Gebietes auf das Innere eines Kreises erbracht.

Die allgemeinsten Gebiete, die z. B. Osgood betrachtet hat, können durch Gebiete A approximiert werden; die Möglichkeit, auch diese Gebiete abzubilden, kann also aus den im § 22 angedeuteten Resultaten entnommen werden, wodurch das Resultat von Osgood auf rein funktionentheoretischem Wege erbracht ist.

33. Die n^{te} Approximationsfunktion $f_n(z)$ liefert die Abbildung einer 2^n-blättrigen Riemannschen Fläche. Bei dieser Abbildung enthält der Kreis $|z| < 1$ ebensoviele d. h. 2^n Bilder des Gebietes A.

Dasjenige dieser Bilder, das den Punkt $z = 0$ enthält, möge mit $\mathfrak{a}_n$ bezeichnet werden. Es sei ϱ_n der Radius des größten Kreises von der Eigenschaft, daß sämtliche Punkte $|z| < \varrho_n$ im Gebiete $\mathfrak{a}_n$ enthalten sind. Die Folge von Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots$ wächst monoton: es ist nämlich, nach unserer Konstruktion $f_{n+1}(z) = f_n(\varphi_{n+1}(z))$, wo $\varphi_{n+1}(z)$ dieselbe Form wie die Funktion (38) hat; für $|z| \leqq \varrho_n$ ist daher $|\varphi_{n+1}(z)| < \varrho_n$ (Gleichheit ausgeschlossen), und folglich liegt der Punkt $f_{n+1}(z)$ im Inneren von A. Außerdem ist, wegen der Konvergenz der $f_n(z)$ gegen die Abbildungsfunktion von A

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \varrho_n = 1.$$

Die übrigen von $\mathfrak{a}_n$ verschiedenen $(2^n - 1)$ Bilder des Gebietes A liegen bei der Abbildung $u = f_n(z)$ alle im Kreisringe $\varrho_n < |z| < 1$ und werden allmählich an den Rand $|z| = 1$ gedrückt. Unser Satz IV des § 9 gibt uns die Möglichkeit, die Größe $|f(z) - f_n(z)|$ für alle Werte von z

innerhalb eines festen Kreises $|z| \leqq \vartheta < 1$ abzuschätzen, wenn eine untere Schranke für ϱ_n berechnet ist, und liefert Aufschluß über die jeweilige Größe der Approximation der gesuchten Abbildungsfunktion $f(z)$ durch irgend eine Funktion der Reihe (41).

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß die Folge (41) für jedes z vom absoluten Betrage Eins *divergent* ist. Für ein derartiges z ist nämlich $|f_n(z)| = 1$, der entsprechende Wert von $f(z)$ dagegen ist, wenn er existiert, dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins.

Breslau, den 17. Juli 1911.