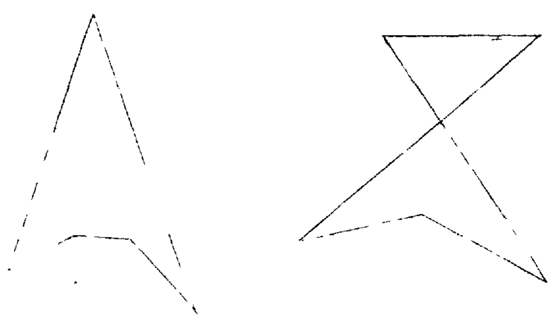
# Ueber das ebene Fünfeck.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Wenn man in einem einfach geschlossenen Fünfeck ohne einspringende Winkel die Diagonalen zieht, so bilden diese wieder ein solches, welches ganz innerhalb des ersten liegt. Geht man von diesem zweiten Fünfeck ebenso zu einem dritten, vierten etc. über, so nähert man sich schliesslich einem Punkte, mit welchem alle Ecken des nach unendlich vielfacher Wiederholung der Construction entstehenden Fünfecks zusammenfallen.

Dasselbe gilt auch noch von einem Fünfeck, welches aus einem der gegebenen Art durch Projection entsteht. Dabei bleibt die Gestalt entweder eine von demselben Charakter; oder, es wird eine oder zwei Ecken durch die unendlich ferne Gerade von den übrigen geschieden. Ersetzt man dann die unendlich grossen Seiten durch ihre endlichen Ergänzungen, so erhält man 2 Formen, welche im Folgenden unter dem Begriff des einfach geschlossenen Fünfecks ohne einspringende Winkel eingeschlossen sein sollen. Die Gestalten derselben sind folgende:



Für diese fährt der erwähnte Process fort, Fünfecke zu liefern, deren Ecken gegen einen bestimmten Punkt gleichzeitig convergiren.

Wenn irgendwie 5 Punkte gegeben sind, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen, so ist immer eines dieser Fünfecke zwischen ihnen möglich, und also ein derartiger Punkt gegeben.

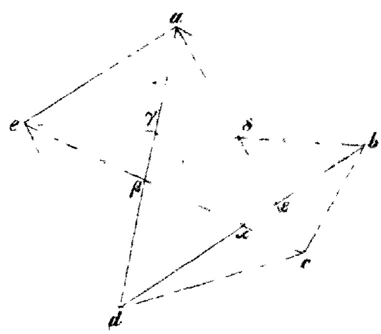
Es entsteht die Frage nach der Bedeutung dieses Punktes. Ich werde zeigen, dass er ein Fundamentalpunkt einer bestimmten bei dem gegebenen Fünfeck auftretenden Collineation ist, und somit der einen Wurzel einer cubischen Gleichung entspricht. Die genannte Construction liefert daher ein geometrisches Näherungsverfahren für die Lösung einer solchen cubischen Gleichung. Der Weg der Untersuchung führt zu einigen Sätzen über das Fünfeck, welche nicht ohne Interesse scheinen.

§ 1.

## Eine beim Fünfeck auftretende Collineation.

Denken wir uns 5 Punkte $a, b, c, d, e$ in der Ebene durch Gerade der Reihe nach verbunden. Die entstehende Figur nenne ich das *erste* Fünfeck. Die Diagonalen desselben, der entsprechenden Reihenfolge gemäss geordnet, bilden das *zweite* Fünfeck $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$; wobei die Bezeichnung so gewählt wird, dass $\alpha$ dem $a$, $\beta$ dem $b$ etc. gegenüberliegt.

*Das zweite Fünfeck ist dem ersten projectivisch.*




Um dieses einzusehen, braucht man nur die Strahlbüschel zu betrachten, von denen einer aus $a$ nach $b, c, d, e$, der andere von $\alpha$ nach $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ geht. Diese liegen perspectivisch, und zwar so, dass das Doppelverhältniss der Strahlen:

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad ae$$

in dieser Anordnung dem der Strahlen:

$$\alpha\varepsilon, \quad \alpha\delta, \quad \alpha\gamma, \quad \alpha\beta$$

gleich wird. Aber das Doppelverhältniss der letztern bleibt bekanntlich ungeändert, wenn man statt dieser Anordnung die Reihenfolge:

$$\alpha\beta, \quad \alpha\gamma, \quad \alpha\delta, \quad \alpha\varepsilon$$

festsetzt. Daher sind die Büschel aus $a$ und $\alpha$ auch projectivisch, wenn man die mit entsprechenden Buchstaben bezeichneten Strahlen einander entsprechen lässt.

Ebendies gilt von den Strahlbüscheln aus $b, \beta$ u. s. w. Betrachtet man also eine Collineation, bei welcher die Punktepaare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ einander zugeordnet sind, so ist auch $e$ dem Punkte $\varepsilon$ zugeordnet, d. h. die Fünfecke selbst sind collineare Figuren, wie der obige Satz aussagt.

Mit Hülfe derselben Construction, welche von dem ersten Fünfeck zum zweiten führte, gelangt man nun vom zweiten zu einem dritten, vom dritten zu einem vierten u. s. w. Aber wenn man aus 2 collinearen Figuren vermöge einer und derselben Construction neue bildet, so sind diese wieder collinear. In der obigen Collineation ist also das dritte Fünfeck dem zweiten, das vierte dem dritten etc. ebenso collinear, wie das zweite dem ersten. Diese Reihe von Fünfecken bildet also eine solche Reihe von Gebilden, wie sie von Herrn Gordan und mir*), später aus andern Gesichtspunkten von Herrn Klein und Lie**) betrachtet worden sind; Reihen, in denen jedes folgende Gebilde als dem zweiten System angehörig dem vorhergehenden entspricht, wenn man dieses als dem ersten System angehörig betrachtet.

Wenn das Fünfeck die im Eingange betrachtete Gestalt hat, so nähert sich die Operation einer endlichen Grenze, einem Punkte; und wenn man $n$ unendlich gross nimmt, so fallen die Ecken sowohl des $n^{\text{ten}}$ als des $(n+1)^{\text{ten}}$ Fünfecks mit diesem Punkte zusammen. Dieser Punkt entspricht also sich selbst; *er ist eine Ecke für das Fundamentaldreieck der Collineation.*

Ich werde jetzt dies Dreieck und die analytische Form der collinearen Beziehung aufsuchen; zunächst aber werde ich eine Methode entwickeln, mit deren Hilfe das Fünfeck behandelt werden kann.

## § 2.

### Methode zur Behandlung des Fünfseits.

Betrachten wir zunächst ein *Fünfseit.* Die Seiten desselben seien:

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=0.$$

Zwischen den 5 linearen Ausdrücken $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ bestehen 2 lineare Relationen; und indem man diese passend schreibt, auch die $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ mit passend gewählten Multiplicatoren versieht, kann man diesen Relationen die Form geben:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A+\ B+\ C+\ D+\ E&=0\\ \alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D+\varepsilon E&=0. \end{aligned}$$

Und zwar kann man diese Formen der Identitäten noch auf unendlich viele Arten hervorrufen. Denn setzt man an Stelle der obigen Gleichungen die Combinationen:

$$\begin{aligned} (\mu+\nu\alpha)A+(\mu+\nu\beta)B+\cdots&=0\\ (\varrho+\sigma\alpha)A+(\varrho+\sigma\beta)B+\cdots&=0. \end{aligned}$$

*) Annalen Bd. I, p. 388.
**) Annalen Bd. IV, p. 50.

so erhält man aus diesen wieder die Form:

$$A' + B' + C' + D' + E' = 0$$
$$\alpha'A' + \beta'B' + \gamma'C' + \delta'D' + \varepsilon'E' = 0,$$

wenn man unter $A'$, $B'$ ... die von $A$, $B$ ... nur um constante Factoren unterschiedenen Ausdrücke:

$$A' = (\varrho + \sigma\alpha) A$$
$$B' = (\varrho + \sigma\alpha) B$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

unter $\alpha'$, $\beta'$ ... aber die Ausdrücke:

(2)
$$\alpha' = \frac{\varrho + \sigma\alpha}{\mu + \varrho\alpha}$$
$$\beta' = \frac{\varrho + \sigma\beta}{\mu + \nu\beta}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

versteht.

Wenn man das Fünfseit projectivisch umformt, so erhalten nur die in den linearen Functionen $A$, $B$ ... enthaltenen Veränderlichen andere Bedeutungen; die Identitäten bleiben ungeändert.

Umgekehrt sind aber auch immer 2 Fünfseite, bei denen die Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ dieselben Werthe haben, projectivisch. Denn bezeichnet man die Seiten des zweiten Fünfseits alsdann durch:

$$\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Delta = 0, \quad \mathsf{E} = 0,$$

und schreibt man die Ausdrücke $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$ ... mit andern Veränderlichen als $A$, $B$, ..., so sind die Gleichungen:

$$\mathsf{A} = A, \quad \mathsf{B} = B, \quad \Gamma = C,$$

Formeln für eine lineare Transformation, aus welchen wegen der gleichen Form der Identitäten sofort auch:

$$\Delta = D, \quad \mathsf{E} = E$$

folgt. Es gehen also durch dieselbe lineare Transformation die Seiten des einen Fünfseits der Reihe nach in die des andern über.

Die projectivischen Eigenschaften eines Fünfseits hängen also nur von den Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ ab. Aber auch diese sind noch durch die Ausdrücke (2) ersetzbar, welche mittelst einer linearen Transformation mit jenen zusammenhängen.

Solange wir also nur das Fünfseit als solches betrachten, bei welchem eine Reihenfolge der 5 Seiten nicht festgesetzt wird, können wir den Satz aussprechen:

*Die projectivischen Eigenschaften eines Fünfseits hängen nur von den absoluten Invarianten der Gleichung* 5ten *Grades ab, deren Wurzeln die Grössen* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ *sind.*

Diese Gleichung ist nicht verschieden von derjenigen, welche nach der

p. 285 folg. dieses Bandes der Annalen von mir entwickelten Anschauung durch dieses Fünfseit interpretirt wird. Denn bezeichnen wir die Wurzeln jener Gleichung durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, durch $\varphi(z)$ den Ausdruck:

$$\varphi(z) = z - \alpha \,.\, z - \beta \,.\, z - \gamma \,.\, z - \delta \,.\, z - \varepsilon\,,$$

also durch $\varphi = 0$ die fragliche Gleichung selbst, so können wir den Gleichungen der Seiten des Fünfseits die Form geben:

$$A = \frac{x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3}{\varphi'(\alpha)}\,,$$
$$B = \frac{x_1 + \beta x_2 + \beta^2 x_3}{\varphi'(\beta)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es wird daher nach bekannten Sätzen der Partialbruchzerlegung:

$$A + B + C + D + E = 0$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E = 0,$$

so dass $\alpha$, $\beta$ ... gerade die oben benutzten Coefficienten sind.

## § 3.

## Das Fünfeck.

Gehen wir nun vom Fünfseit zu einem Fünfeck im gewöhnlichen Sinne über, so haben wir nur eine bestimmte Reihenfolge der Seiten festzustellen, so dass nur die Durchschnitte aufeinander folgender als Ecken betrachtet werden sollen. Sei dieses die Anordnung $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Man kann diese Anordnung auch dadurch bestimmen, dass man den symmetrischen Functionen bez. Invarianten von $\varphi = 0$ irgend eine cyclische Function, etwa das Differenzenprodukt:

$$p = \alpha - \beta \,.\, \beta - \gamma \,.\, \gamma - \delta \,.\, \delta - \varepsilon \,.\, \varepsilon - \alpha$$

adjungirt, in dessen Zusammensetzung die gedachte Reihenfolge ausgedrückt ist. Dieses Differenzenprodukt wird zu dem vollständigen Differenzenprodukt aller Wurzeln ergänzt durch das analog gebildete:

$$q = \alpha - \gamma \,.\, \gamma - \varepsilon \,.\, \varepsilon - \beta \,.\, \beta - \delta \,.\, \delta - \alpha\,.$$

Das Fünfeck $A$, $C$, $E$, $B$, $D$, zu welchem dieses letztere gehört, hat dieselben Seiten wie das erste, aber keine Ecke mit ihm gemein, und ist dadurch bestimmt*).

Man kann nun die nächstliegenden Besonderheiten leicht angeben, welche ein Fünfeck annehmen kann. Zunächst kann es ein *symmetrisches* sein; worunter zugleich ein solches mit inbegriffen sein mag,

*) Die Beziehung zwischen diesem Fünfeck und dem gegebenen ist derjenigen in gewissem Sinne entgegengesetzt, in welcher sich das erste und zweite Fünfeck des § 1. befinden.

welches durch Projection ein symmetrisches werden kann. In diesem Falle existirt eine lineare Transformation (Umlegen um die Symmetrieaxe), bei welcher eine Seite in sich selbst übergeht, die anderen sich paarweise vertauschen. Mag also dabei $A$ in $aA$, $B$ in $eE$, $C$ in $dD$, $D$ in $cC$, $E$ in $bB$ übergehen; indem wir diese Ausdrücke $A$, $eE$, $dD$, $cC$, $bB$ als die neuen linearen Functionen einführen, und sie etwa durch $A'$, $E'$, $D'$, $C'$, $B'$ bezeichnen, erhalten die ursprünglichen Identitäten die Form:

$$A' + B' + C' + D' + E' = 0$$
$$\alpha A' + \varepsilon B' + \delta C' + \gamma D' + \beta E' = 0,$$

und dieses Fünfeck muss dem ersten projectivisch sein, wenn wir $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ der Reihe nach den $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ entsprechen lassen. Daher müssen die Grössen

$$\alpha, \quad \varepsilon, \quad \delta, \quad \gamma, \quad \beta$$

durch lineare Transformation aus

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

entstehen. Repräsentiren wir aber $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ durch Punkte einer Geraden, so heisst dies, $\alpha$ ist Doppelpunkt einer Involution, welche $\beta$, $\varepsilon$ und $\gamma$, $\delta$ zu Paaren hat. Aber dies wieder führt auf das Verschwinden der Invariante 18ten Grades $R$ von $\varphi$, und man hat den Satz:

*Für ein Fünfeck, welches in ein symmetrisches projicirbar ist, verschwindet die Invariante $R$.*

Man kann $\alpha = 0$ setzen und hat dann $\varepsilon = -\beta$, $\delta = -\gamma$. Die Differenzenprodukte $p$, $q$, von deren Werthen später Gebrauch gemacht werden wird, erhalten dann die Ausdrücke:

$$p = 2\beta^2\gamma(\beta - \gamma)^2, \qquad q = -2\beta\gamma^2(\beta + \gamma)^2.$$

Soll das Fünfeck ein regelmässiges sein, oder in ein solches projicirbar, so muss eine lineare Transformation (Drehung) existiren, durch welche jede Seite in die folgende übergeht. Es verwandeln sich also $A$ in $bB$, $B$ in $cC$ etc., $E$ in $aA$. Bezeichnen wir $aA$, $bB$ etc. also wieder durch $A'$, $B' \ldots$, so haben wir aus den früheren Identitäten jetzt:

$$A' + B' + C' + D' + E' = 0$$
$$\varepsilon A' + \alpha B' + \beta C' + \gamma D' + \delta E' = 0.$$

Soll also das Fünfeck $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ dem Fünfeck $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ projectivisch entsprechen, so müssen die Grössen

$$\varepsilon, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

aus den Grössen

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

der Reihe nach durch lineare Transformation hervorgehen, d. h. die Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ müssen cyclisch projectivisch sein.

*Die Gleichung $\varphi = 0$ wird also für das symmetrische Fünfeck eine reine Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades, oder ihre Covariante $j$ verschwindet.*

Ist also $\omega$ eine imaginäre $5^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit, so kann man für das regelmässige Fünfeck

$$\alpha = 1, \quad \beta = \omega, \quad \gamma = \omega^2, \quad \delta = \omega^3, \quad \varepsilon = \omega^4$$

setzen. Die Differenzenprodukte $p$, $q$ erhalten dann numerische Werthe, von denen später Gebrauch gemacht werden wird; es wird nämlich:

$$p = (1-\omega)^5, \qquad q = (1-\omega^2)^5, \qquad \frac{q}{p} = (1+\omega)^5,$$

und also, wenn

$$\omega + \omega^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \omega^2 + \omega^3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

ist, wird:

$$\frac{q}{p} = \frac{-11-5\sqrt{5}}{2}.$$

Für das einfach geschlossene regelmässige Fünfeck und dessen Projectionen muss man bei $\sqrt{5}$ das hier gewählte Zeichen nehmen; dies lehrt unter anderm folgende Betrachtung.

Stellen wir in rechtwinkligen Coordinaten die Ecken eines Fünfseits durch die Coordinaten $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots$, die Seiten mit einer leicht verständlichen Abkürzung durch

$$\begin{array}{ll} A = a\,.\,(x\,1\,2) & \\ B = b\,.\,(x\,2\,3) & (x\,i\,k) = \begin{vmatrix} x & x_i & x_k \\ y & y_i & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ C = c\,.\,(x\,3\,4) & \end{array}$$

dar, wo $a, b, c\,..$ noch zu bestimmende Constanten sind. Diese sind so zu wählen und weitere Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ so zu bestimmen, dass

$$A + B + C + D + E = 0$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E = 0.$$

Setzen wir in diesen Gleichungen für $x, y$ etwa $x_1, y_1$, so ergiebt sich:

$$b\,.\,(123) + \ c\,.\,(134) + \ d\,.\,(145) = 0$$
$$\beta b\,.\,(123) + \gamma c\,.\,(134) + \delta d\,.\,(145) = 0,$$

und man hat also, wenn $\varrho_1$ eine unbestimmte Grösse ist:

$$\varrho_1\,(123) = cd\,(\gamma - \delta)$$
$$\varrho_1\,(134) = db\,(\delta - \beta)$$
$$\varrho_1\,(145) = bc\,(\beta - \gamma).$$

Man erhält aus diesen Gleichungen andere, indem man sowohl die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 als die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ cyclisch vertauscht. Alsdann aber ergiebt sich sofort:

$$\frac{q}{p} = -\frac{(145)\,(251)\,(312)\,(423)\,(534)}{(134)\,(245)\,(351)\,(412)\,(523)}.$$

Ist nun das Fünfeck ein einfach geschlossenes und hat es keine einspringenden Winkel, oder ist es eine Projection eines solchen (vergl. Einleitung), so haben alle hier auftretenden Determinanten, als proportional mit den Flächeninhalten gewisser, aus den Ecken gebildeter Dreiecke entweder, indem deren Ecken in demselben Sinne aufeinander folgen, alle gleiches Vorzeichen, oder es ist doch eine gerade Anzahl derselben negativ. Der ganze Ausdruck ist also wesentlich negativ und man hat den Satz:

*Bei Fünfecken, welche einfach geschlossen sind und keine einspringenden Winkel enthalten oder Projectionen solcher Fünfecke, ist* $\frac{q}{p}$ *negativ.*

Wenden wir dies auf das regelmässige Fünfeck an, so ergiebt sich sofort die oben gewählte Bestimmung des Vorzeichens von $\sqrt{5}$.

## § 4.

## Die Collineation und ihr Fundamentaldreieck.

Nachdem ich die zur Behandlung des Fünfecks anzuwendende Methode entwickelt habe, kehre ich nun zu der Aufgabe zurück, die beim Fünfeck stattfindende Collineation (§ 1.) darzustellen. Bezeichnen wir die Seiten des zweiten Fünfecks durch

$$A' = 0, \quad B' = 0 \ldots$$

Die Seiten sind dadurch gegeben, dass $A'$ durch die Schnittpunkte von $B$ mit $C$ und von $D$ mit $E$, $B'$ durch die Schnittpunkte von $C$ mit $D$ und von $E$ mit $A$ geht u. s. w. Wegen der Identitäten kann man also die Ausdrücke $A'$, $B'$ ... durch $A$, $B$ ... in folgender doppelter Weise darstellen:

$$(1)\quad \begin{aligned} A' &= B\,.\,\beta-\alpha + C\,.\,\gamma-\alpha = D\,.\,\alpha-\delta + E\,.\,\alpha-\varepsilon \\ B' &= C\,.\,\gamma-\beta + D\,.\,\delta-\beta = E\,.\,\beta-\varepsilon + A\,.\,\beta-\alpha \\ C' &= D\,.\,\delta-\gamma + E\,.\,\varepsilon-\gamma = A\,.\,\gamma-\alpha + B\,.\,\gamma-\beta \\ D' &= E\,.\,\varepsilon-\delta + A\,.\,\alpha-\delta = B\,.\,\delta-\beta + C\,.\,\delta-\gamma \\ E' &= A\,.\,\alpha-\varepsilon + B\,.\,\beta-\varepsilon = C\,.\,\varepsilon-\gamma + D\,.\,\varepsilon-\delta. \end{aligned}$$

Da nun $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ ein zu $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ projectivisches Fünfeck bilden, so muss man solche Factoren $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ bestimmen können, dass wieder identisch:

$$(2)\quad \begin{aligned} aA' + bB' + cC' + dD' + eE' &= 0 \\ \alpha aA' + \beta bB' + \gamma cC' + \delta dD' + \varepsilon eE' &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man etwa, um $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ zu finden, in den Gleichungen (1) zwei der $A$, $B$ ... gleich Null und führt die daraus entstehenden Werthe der $A'$, $B'$ ... in (2) ein, so erhält man die Verhältnisse der $a$, $b$ .. durch die $\alpha$, $\beta$ .. ausgedrückt, und zwar ist:

$$(3)\qquad a = \frac{\gamma-\delta}{\alpha-\gamma\,.\,\alpha-\delta},\quad b = \frac{\delta-\varepsilon}{\beta-\delta\,.\,\beta-\varepsilon},\quad c = \frac{\varepsilon-\alpha}{\gamma-\varepsilon\,.\,\gamma-\alpha},$$
$$d = \frac{\alpha-\beta}{\delta-\alpha\,.\,\delta-\beta},\quad e = \frac{\beta-\gamma}{\varepsilon-\beta\,.\,\varepsilon-\gamma}.$$

Die Gleichungen der Collineation aber werden dann durch irgend 3 unter den folgenden 5 Gleichungen ausgedrückt (§ 2.):

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sigma A &= aA' \\ \sigma B &= bB' \\ \sigma C &= cC' \\ \sigma D &= dD' \\ \sigma E &= eE', \end{aligned}$$

wobei nur links andere Veränderliche als rechts zu schreiben sind und in welchen $\sigma$ einen unbestimmten Factor bedeutet.

Die Fundamentalpunkte der Collineation ergeben sich, wenn man die Veränderlichen rechts und links in der Gleichung (4) als dieselben betrachtet. Eliminirt man dann dieselben aus irgend dreien der Gleichungen (4), so erhält man die cubische Gleichung in $\sigma$, von welcher die Fundamentalpunkte der Collineation abhängen. Je nach der Wahl solcher 3 Gleichungen enthält die resultirende Determinante als überflüssige Factoren einige der Differenzen $\alpha-\beta$ etc. Mit Uebergehung derselben findet man leicht die cubische Gleichung in der Form:

$$(5)\qquad q\,\sigma^2(\sigma-1)-p\,(\sigma+1)=0,$$

wo $p$, $q$ die in § 3. so bezeichneten Differenzenprodukte bedeuten.

Eine Wurzel dieser Gleichung ist es also, auf welche die im Eingange erwähnte Construction sich bezieht, sobald das Fünfeck ein einfach geschlossenes ist und seine einspringenden Winkel enthält, oder in ein solches projicirbar ist.

Die Gleichung (5) ist im Allgemeinen irreducibel. *Sie wird aber reducibel, wenn das Fünfeck im Sinne des § 3. ein symmetrisches ist.* Dann hat man:

$$\frac{q}{p} = -\frac{\gamma(\beta+\gamma)^2}{\beta(\beta-\gamma)^2};$$

die cubische Gleichung:

$$\frac{\sigma^2(\sigma-1)}{\sigma+1} = -\frac{\beta(\beta-\gamma)^2}{\gamma(\beta+\gamma)^2}$$

hat also die rationale Wurzel:

$$\sigma = \frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}.$$

Es entspricht dies dem Umstande, dass der eine Fundamentalpunkt hier nothwenig auf der Symmetrieaxe liegt.

## § 5.

## Die cubische Gleichung der Collineation.

Schreibt man die cubische Gleichung in der Form:

$$a\sigma^3 + 3b\sigma^2 + 3c\sigma + d = 0,$$

so ist:

$$a = 3q, \quad b = -q, \quad c = -p, \quad d = -3p.$$

Daher ist die Discriminante der Gleichung:

$$\Delta = -24pq\{q^2 + 11pq - p^2\}.$$

Diese verschwindet und 2 Ecken des Fundamentaldreiecks erscheinen unendlich nahe gerückt:

1. Wenn $pq = 0$, also wenn 2 der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ einander gleich werden. In solchem Falle kann man aus den beiden Identitäten eine Combination bilden, welche nur *drei* der Ausdrücke $A, B, C, D, E$ enthält. Dies tritt also nur (und immer) ein, *wenn 3 Seiten des Fünfecks durch einen Punkt gehen.* Für den Fall des einfach geschlossenen Fünfecks ohne einspringende Winkel und Projectionen von solchen kann dies nicht eintreten.

2. Wenn $q^2 + 11pq - p^2 = 0$, $\frac{q}{p} = \frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}$. Dies tritt nach § 3. z. B. beim regelmässigen Fünfeck ein, und es entspricht insbesondere das untere Zeichen dem einfach geschlossenen regelmässigen Fünfeck. In diesem Falle ist es auch leicht, die Wurzeln der cubischen Gleichung numerisch anzugeben. Es wird nämlich die Doppelwurzel:

$$\sigma = -\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

die einfache:

$$\sigma = 2 - \sqrt{5}.$$

Die allgemeine Untersuchung der Fünfecke, welche der Gleichung $q^2 + 11pq - p^2 = 0$ genügen, werde ich im folgenden §. geben. Ich werde hier zunächst zeigen, wie man in dem Falle, wo die convergente geometrische Construction ausführbar ist, angeben kann, welcher Wurzel der cubischen Gleichung der unendliche Prozess entspricht.

Die cubische Gleichung

$$(1) \qquad q\sigma^2(\sigma - 1) - p(\sigma + 1) = 0$$

hat bekanntlich 3 reelle Wurzeln, wenn die Discriminante positiv ist, nur eine, wenn sie einen negativen Werth hat. Im letzten Falle ist keine weitere Untersuchung nöthig; der convergente Prozess entspricht der einzigen reellen Wurzel. Wenn dagegen $\Delta$ positiv ist, so handelt es sich darum, zu bestimmen, welche Wurzel man durch die Construction erhält.

Nun ist immer $\frac{q}{p}$ negativ, sobald der geometrische Prozess überhaupt ein Resultat liefert (§ 3.). Damit also $\Delta$ positiv sei, muss $q^2 + 11pq - p^2 > 0$ sein, oder

$$\left(\frac{q}{p} + \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{q}{p} + \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$

Von den beiden Factoren links ist der zweite negativ; daher muss der erste ebenfalls negativ sein, oder

$$-\frac{q}{p} > \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}.$$

Bezeichnen wir nun die linke Seite der Gleichung (1), dividirt durch $p$, mit $\varphi(\sigma)$, so haben wir:

$$\begin{aligned} &\varphi(-1) = -2\frac{q}{p}, \quad \text{also positiv,} \\ &\varphi(0) = -1, \qquad \text{also negativ,} \end{aligned} \tag{2}$$

Die cubische Gleichung hat also eine Wurzel zwischen $\sigma = 0$ und $\sigma = -1$. Beim regelmässigen Fünfeck fällt dies Intervall in die ungleiche Wurzel $2 - \sqrt{5}$. Kann man also zeigen, dass die anderen Wurzeln der Gleichung (1) stets ausserhalb dieses Intervalls liegen, so folgt daraus durch blosse Betrachtung der Stetigkeit, dass die Construction, welche im Falle des regelmässigen Fünfecks auf die Wurzel $2 - \sqrt{5}$ führt, in den anderen Fällen von 3 reellen Wurzeln auf die in dem Intervall 0, $-1$ liegende Wurzel führen muss. Nun hat aber die cubische Gleichung 2 Zeichenwechsel und nur *eine* Zeichenfolge. Daher muss sie 2 positive Wurzeln haben Und zwar ist eine derselben gleich Null nur, wenn $p = 0$.

Denken wir uns also $-\frac{q}{p}$ von dem Werthe $\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$ ausgehend und gegen $+\infty$ sich bewegend, so bleiben die Intervalle der positiven Wurzeln und der einen negativen stets getrennt; und erst bei dem Grenzwerthe $\frac{q}{p} = -\infty$ tritt für $\sigma = 0$ eine Berührung der Intervalle ein. Und so haben wir den Satz:

*Der convergente geometrische Prozess entspricht, wenn die cubische Gleichung* 3 *reelle Wurzeln hat, derjenigen, welche allein zwischen* 0 *und* $-1$ *liegt.*

In demselben Intervalle liegt übrigens auch für den Fall zweier imaginärer Wurzeln die reelle Wurzel der Gleichung, so lange eben nur $\frac{q}{p} < 0$ ist; was denn in allen Fällen eintritt, in welchen wir von der Anwendbarkeit des geometrischen Prozesses gesprochen haben.

## § 6.

## Eine besondere Classe von Fünfecken.

Den aus der Gleichung $q^2 + 11\,qp - p^2 = 0$ folgenden Werthen von $\frac{q}{p}$ entsprechen 2 Classen von Fünfecken, bei welchen 2 Ecken des Fundamentaldreiecks der Collineation einander unendlich nahe liegen. Nur die eine dieser Classen kann einfach geschlossene Fünfecke ohne einspringende Winkel oder deren Projectionen enthalten; in dieser Classe treten die regelmässigen auf.

Denken wir uns, um diese Fünfecke zu charakterisiren, 4 Ecken eines Fünfecks gegeben, sowie die 3 Seiten, welche sie verbinden. Damit das Fünfeck dann der Bedingung $\frac{q}{p} = \frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}$ genüge, muss die Spitze desselben eine von 2 gewissen Curven beschreiben, je nachdem das obere oder untere Zeichen von $\sqrt{5}$ gewählt wird. Man erhält diese Curven, wenn man in der am Ende von § 3. gebrauchten Bezeichnung die Ecken 1, 2, 3, 4 als gegeben betrachtet, 5 dagegen durch das Zeichen $x$ ersetzt. Die Gleichungen dieser Curven sind also:

$$\frac{(x\,14)\,(x\,12)\,(x\,34)}{(x\,24)\,(x\,13)\,(x\,23)} = \frac{(134)\,(412)}{(312)\,(423)} \cdot \frac{11 \mp 5\sqrt{5}}{2}\,.$$

Sie sind von der 3ten Ordnung und gehen durch die Punkte 1, 2, 3, 4 so, dass sie in 1 die Diagonale 13, in 2 die Seite 12, in 3 die Seite 34, in 4 die Diagonale 24 berühren. Sie sind hierdurch bis auf einen linearen Parameter bestimmt. Sind insbesondere die 4 Punkte und ihre Folge so gewählt, dass ein 5ter Punkt hinzugefügt werden kann, welcher mit ihnen ein einfach geschlossenes Fünfeck ohne einspringende Winkel bildet, so ist die dem unteren Vorzeichen von $\sqrt{5}$ entsprechende Curve dadurch völlig gegeben, dass auf ihr noch die 5te Ecke des einzigen leicht construirbaren Fünfecks liegt, welches in ein regelmässiges projicirt werden kann, oder nach der Bezeichnung des § 3. ein regelmässiges ist.

Die beiden in Rede stehenden Curven theilen zugleich zusammen mit den Verbindungslinien der 4 Punkte die Ebene in solche Gebiete, innerhalb deren entweder alle Ecken des Fundamentaldreiecks reell oder 2 imaginär sind.

In Folge der analytischen Bedingung:

$$(1) \qquad \frac{\alpha-\gamma\,.\,\gamma-\varepsilon\,.\,\varepsilon-\beta\,.\,\beta-\delta\,.\,\delta-\alpha}{\alpha-\beta\,.\,\beta-\gamma\,.\,\gamma-\delta\,.\,\delta-\varepsilon\,.\,\varepsilon-\alpha} = \frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}\,,$$

welche für diese Classe von Fünfecken erfüllt sein muss, kann man leicht die allgemeinen Ausdrücke der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ angeben, welche bei ihnen auftreten. Setzt man nämlich:

$$(2)\qquad \alpha = \frac{\mu + \nu(1+\lambda)}{\varrho + \sigma(1+\lambda)},\quad \beta = \frac{\mu + \nu(\omega + \lambda\omega^4)}{\varrho + \sigma(\omega + \lambda\omega^4)},\quad \gamma = \frac{\mu + \nu(\omega^2 + \lambda\omega^3)}{\varrho + \sigma(\omega^2 + \lambda\omega^3)},$$
$$\delta = \frac{\mu + \nu(\omega^3 + \lambda\omega^2)}{\varrho + \sigma(\omega^3 + \lambda\omega^2)},\quad \varepsilon = \frac{\mu + \nu(\omega^4 + \lambda\omega)}{\varrho + \sigma(\omega^4 + \lambda\omega)},$$

so enthalten diese Ausdrücke 4 Parameter, nämlich $\lambda$ und die Verhältnisse der $\mu$, $\nu$, $\varrho$, $\sigma$. Daher findet zwischen ihnen nur *eine* Relation statt. Indem man die linke Seite des Ausdrucks (1) bildet, zeigt sich, dass diese in $(1+\omega)^5$ übergeht. Die Ausdrücke (2) erfüllen daher die Gleichung (1), und zwar je nach Wahl von $\omega$ für das untere oder für das obere Vorzeichen von $\sqrt{5}$. Dass aber dieses auch die allgemeinste Weise ist, die Gleichung (1) zu befriedigen, sieht man folgendermassen ein. Da die Ausdrücke (2) vier Parameter enthalten, so kann man $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ beliebig wählen, und zwar erhält man bei bestimmter Wahl von $\omega$ dann für $\lambda$ die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \beta\,, & \beta(\omega + \lambda\omega^4) & \omega + \lambda\omega^4 \\ \gamma\,, & \gamma(\omega^2 + \lambda\omega^3) & \omega^2 + \lambda\omega^3 \\ \delta\,, & \delta(\omega^3 + \lambda\omega^2) & \omega^3 + \lambda\omega^2 \\ \varepsilon\,, & \varepsilon(\omega^4 + \lambda\omega) & \omega^4 + \lambda\omega \end{vmatrix} = 0$$

Zu einem gegebenen Systeme $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ gehören also 2 Werthsysteme $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$, $\sigma$, also auch zwei $\alpha$. Ebenso viele Werthe von $\alpha$ ergeben sich aber auch aus (1), wenn man das Vorzeichen von $\sqrt{5}$ und $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ als gegeben annimmt. Die Formeln (2) liefern also wirklich alle Systeme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, welche der Gleichung (1) genügen.

Für die fragliche Classe von Fünfecken haben also die Identitäten die Form:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &A + B + C + D + E = 0 \\ &(1+\lambda)A + (\omega + \lambda\omega^4)B + (\omega^2 + \lambda\omega^3)C \\ &\qquad + (\omega^3 + \lambda\omega^2)D + (\omega^4 + \lambda\omega)E = 0. \end{aligned}$$

Bei dem hier behandelten Verschwinden der Discriminante $\Delta$ fallen 2 Ecken des Fundamentaldreiecks zusammen. Der besondere Fall, in welchem sie zugleich unbestimmt werden und also die perspectivische Lage eintritt, kommt nur beim regelmässigen Fünfeck vor, bez. bei den Projectionen desselben. Nimmt man nämlich an, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken des 1ten und 2ten Fünfecks sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, dem Centrum der Collineation, so übersieht man sofort aus der geometrischen Configuration, dass jede dieser Verbindungslinien auch Symmetrieaxe wird; durch die 4 Ecken, welche nicht auf dieser Verbindungslinie liegen, gehen 2 Verbindungslinien, welche jene und die Collineationsaxe harmonisch schneiden. Das Fünfeck ist also ein fünffach symmetrisches, und die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ müssen also die Eigenschaft haben, die Bedingung der Symmetrie noch zu erfüllen, wenn man sie auf alle Weise cyclisch vertauscht. Nun ist jene Bedingung ausgedrückt durch das Verschwinden eines der 15 Factoren, in welche $R$ nach Hermite zerfällt (vergl. Borchardt's Journal Bd. 69, p. 304). Im gegenwärtigen Falle muss also ausser diesem noch jeder Factor von $R$ verschwinden, welcher aus ihm durch cyclische Vertauschung entsteht. Man folgert daraus leicht, dass die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ durch eine lineare Function bez. von 1, $\omega$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$ dargestellt werden, sodass das Fünfeck ein regelmässiges ist. Noch kürzer sieht man es dadurch ein, dass man die Form der Coefficienten $\alpha, \beta \ldots$ aus (3) entnimmt, welche ja hier, bei verschwindender Discriminante, anwendbar ist. Die Bedingung der Symmetrie, etwa:

$$(4) \qquad (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)=0,$$

liefert eine quadratische Gleichung in $\lambda$; aber für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ geben die Formeln (3) ein regelmässiges Fünfeck und (4) ist also erfüllt; daher kann es keine weitere Lösung geben.

Dass die perspectivische Lage für das Verschwinden des anderen Factors $pq$ der Discriminante, also beim Gleichwerden zweier der Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ im Allgemeinen nicht eintritt, lehrt die Gleichung (4) ohne Weiteres.

Göttingen, den 14. Juli 1871.