Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen (Waringsches Problem).*)

Dem Andenken
an
Hermann Minkowski.
gewidmet.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Theorem. *Jede positive ganze Zahl läßt sich als Summe von n^{ten} Potenzen positiver ganzer Zahlen darstellen, so daß deren Anzahl unterhalb einer Schranke liegt, die nur durch den Exponenten n bedingt ist, dagegen nicht von der darzustellenden Zahl abhängt.*

Dieses Theorem ist allgemein von Waring**) vermutungsweise ausgesprochen worden; der Beweis für dasselbe gelang jedoch bisher nur in besonderen Fällen, nämlich für

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.$$

Die Mathematiker, denen wir diese Beweise und zugleich auch scharfsinnige Untersuchungen über die Reduktion der Anzahl der zur Darstellung zu verwendenden Potenzen verdanken, sind J. Liouville ($n=4$), Maillet***) ($n = 3$, $n = 5$, $n = 8$), Fleck†) ($n = 6$), Landau††) ($n = 3$, $n = 4$), I. Schur ($n = 10$), Hurwitz†††) ($n = 8$), Wieferich*†) ($n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 7$).

---

*) Mit einigen Veränderungen und Zusätzen abgedruckt aus den Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1909, Sitzung vom 6. Februar.

**) Meditationes algebricae, ed. III. Cambridge 1782. S. 349—350.

***) Congrès de Bordeaux 1895. — Journal de mathématiques, Ser. 5, Bd. 2, 1896. — Comptes rendus, Bd. 145, Paris 1904. — Bull. de la soc. math. de France, Bd. 36, 1908.

†) Sitzungsber. der Berl. math. Ges. 1906. — Math. Annalen Bd. 64, 1907.

††) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 23, 1907. — Math. Ann. Bd. 66, 1908.

†††) Math. Annalen Bd. 65, 1908.

*†) Math. Annalen Bd. 66, 67, 1908—09. (3 Abhandlungen)

Der allgemeine Beweis des Theorems, den ich im folgenden geben werde, gelingt mittels einer *neuartigen Anwendung der Analysis auf die Zahlentheorie.* Während man nämlich sonst in der analytischen Zahlentheorie von arithmetischen Formeln ausgehend durch Grenzübergang zu Integralrelationen für arithmetische Größen gelangt — ich erinnere an die Bestimmung der Klassenanzahlen — oder, wie in der Primzahltheorie, asymptotische Ausdrücke mittels transzendenter Funktionen sucht, so werde ich gegenwärtig umgekehrt von einer gewissen Integralformel ausgehen und aus ihr schließlich eine rein arithmetische Relation gewinnen.

Um diesen Gedanken deutlich hervortreten zu lassen, schicke ich dem Beweise des Theorems zunächst zwei Sätze voraus.

Satz I.*) *Es sei m eine beliebige positive ganze Zahl, dann gilt identisch in den 5 Variabeln $x_1, \cdots, x_5$ die Integralformel*

$$(1)\qquad (x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = C \int \cdots \int_{(S)} (t_1 x_1 + \cdots + t_5 x_5)^{2m}\, dt_1 \cdots dt_5;$$

dabei bedeutet C eine gewisse durch m bestimmte positive Konstante, nämlich

$$\frac{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{8\pi^2},$$

und das 5-fache Integral rechts ist über die Kugel S

$$(2)\qquad t_1^2 + \cdots + t_5^2 \leqq 1$$

zu erstrecken.

Zum Beweise verstehen wir unter $x_1, \cdots, x_5$ irgend welche reellen Größen und bestimmen dann eine orthogonale Substitution der 5 Variabeln $t_1, \cdots, t_5$ in $t_1', \cdots, t_5'$

$$(3)\qquad \begin{aligned} t_1' &= \alpha_{11} t_1 + \cdots + \alpha_{51} t_5, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ t_5' &= \alpha_{15} t_1 + \cdots + \alpha_{55} t_5, \end{aligned}$$

---

*) In meiner ursprünglichen Veröffentlichung (Nachr. der Ges. der Wiss. zu Göttingen 1909) habe ich mich hier eines gewissen 25-fachen Integrales bedient; daß man dasselbe für den vorliegenden Zweck durch das obige 5-fache Integral ersetzen kann, ist eine sehr dankenswerte, mir von verschiedenen Seiten (F. Hausdorff, J. Kürschák, u. A.) gemachte Bemerkung. Der dort von mir formulierte und bewiesene Satz I über das 25-fache Integral beansprucht jedoch deshalb ein selbständiges Interesse, weil er in engster Beziehung zu der schönen Theorie der orthogonalen Invarianten von A. Hurwitz steht (vgl. dessen Abhandlung „Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration", Nachr. der Ges. der Wiss. zu Göttingen 1894) und in einfachster Weise den Grundgedanken zum Ausdruck bringt, mittels dessen diesem Forscher der Nachweis für die Endlichkeit des vollen Systems orthogonaler Invarianten gelungen ist.

in welcher

$$(4) \qquad \alpha_{11} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}}, \cdots, \qquad \alpha_{51} = \frac{x_5}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}}$$

wird. Da die Kugel S bei Anwendung dieser Substitution (3) unverändert bleibt, so geht das Integral der Formel (1) nach Einführung der Integrationsvariabeln $t_1', \cdots, t_5'$ über in

$$(x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m \int \cdots \int_{(S)} t_1'^{2m}\, dt_1' \cdots dt_5';$$

hierin ist offenbar das 5-fache Integral eine von $x_1, \cdots, x_5$ unabhängige positive Zahl; setzen wir dieselbe gleich $\frac{1}{C}$, so folgt die Formel (1) des Satzes I.

Satz II. *Es sei wiederum m eine beliebige positive ganze Zahl, dann gilt identisch in den 5 Variabeln $x_1, \cdots, x_5$ eine Formel von der Gestalt*

$$(5) \qquad (x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \sum_{h=1, \cdots, M} r_h (a_{1h} x_1 + \cdots + a_{5h} x_5)^{2m};$$

dabei ist zur Abkürzung

$$M = \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

gesetzt, ferner bedeuten $r_1, \cdots, r_M$ gewisse positive rationale, durch m bestimmte Zahlen und $a_{1h}, \cdots, a_{5h}$ gewisse ganze, ebenfalls nur durch m bestimmte Zahlen.

Der Beweis gründet sich auf die in Satz I aufgestellte Integralformel; von der letzteren ausgehend werden wir durch eine Reihe von Schritten schließlich zu der in Satz II behaupteten arithmetischen Identität gelangen.

Der *erste* Schritt besteht in der Approximation des 5-fachen Integrales

$$C \int \cdots \int_{(S)} (t_1 x_1 + \cdots + t_5 x_5)^{2m}\, dt_1 \cdots dt_5$$

durch eine endliche Summe. Wir denken uns zu dem Zwecke den 5-dimensionalen Raum der Variabeln t_h in 5-dimensionale Würfel von der Kantenlänge ε zerlegt. Da der Bereich S ganz im Endlichen gelegen ist, so fällt nur eine endliche Anzahl $H^{(\varepsilon)}$ dieser Würfel ins Innere von S. Bilden wir sodann für den Mittelpunkt eines jeden dieser Würfel den linearen Ausdruck

$$t_1 x_1 + \cdots + t_5 x_5,$$

multiplizieren denselben mit dem Inhalt ε^5 des Würfels sowie mit dem positiven Werte von $\sqrt[m]{C}$, so entsteht aus dem Integral eine Summe von der Gestalt

$$(6) \qquad \sum_{h=1,\cdots,H^{(\varepsilon)}} \{P_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m},$$

wo die $P_h^{(\varepsilon)}$ gewisse $H^{(\varepsilon)}$ lineare Funktionen von $x_1, \cdots, x_5$ bedeuten, deren Koeffizienten noch von ε abhängen; zugleich gilt die Limesgleichung

$$C\int_{(S)}\cdots\int (t_1 x_1 + \cdots + t_5 x_5)^{2m} dt_1\, dt_2 \cdots dt_5 = \mathop{\mathrm{L}}_{\varepsilon=0} \sum_{h=1,\cdots,H^{(\varepsilon)}} \{P_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m}.$$

Nach der Integralformel des Satzes I ist mithin auch

$$(7) \qquad (x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \mathop{\mathrm{L}}_{\varepsilon=0} \sum_{h=1,\cdots,H^{(\varepsilon)}} \{P_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m}.$$

Der *zweite* wesentliche Schritt beruht darauf, daß wir hier in der Summe rechts die Anzahl $H^{(\varepsilon)}$, die ja mit verschwindendem ε notwendig über alle Grenzen wächst, auf eine feste, von ε unabhängige Zahl reduzieren. Dies gelingt in folgender Weise. Wir bedenken, daß es nur M linear unabhängige Formen $2m^{\text{ten}}$ Grades von 5 Variabeln gibt und daß daher gewiß zwischen den ersten $M+1$ Formen $2m^{\text{ten}}$ Grades

$$\{P_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m}, \qquad (h = 1, \cdots, M+1)$$

eine lineare Identität von der Gestalt

$$c_1 P_1^{(\varepsilon)\,2m} + c_2 P_2^{(\varepsilon)\,2m} + \cdots + c_{M+1} P_{M+1}^{(\varepsilon)\,2m} = 0$$

bestehen muß, wo die $c_1, \cdots, c_{M+1}$ reelle Konstante bedeuten, von denen einige positiv und einige negativ ausfallen müssen. Indem wir diese Identität durch den größten unter den positiven Koeffizienten dividieren, entsteht eine Identität von der Gestalt

$$c_1' P_2^{(\varepsilon)\,2m} + c_2' P_2^{(\varepsilon)\,2m} + \cdots + c_{M+1}' P_{M+1}^{(\varepsilon)\,2m} = 0,$$

wo gewiß einer unter den Koeffizienten $c_1', \cdots, c_{M+1}'$ den Wert $+1$ besitzt und zugleich alle übrigen Koeffizienten $\leqq 1$ ausfallen. Subtrahieren wir diese Identität von der Summe (6), so hebt sich offenbar eine der $2m^{\text{ten}}$ Potenzen fort, und wir erhalten eine Summe über nur $H^{(\varepsilon)} - 1$ Summanden, von denen keiner negativ wird, da ja die zu den $P_h^{(\varepsilon)\,2m}$ hinzutretenden konstanten Faktoren sämtlich positiv ausfallen, wenn sie nicht insbesondere verschwinden. Indem wir diese konstanten Faktoren in die $2m^{\text{te}}$ Potenz hineinziehen, gelangen wir zu einer Formel von der Gestalt

$$\sum_{h=1,\cdots,H^{(\varepsilon)}} \{P_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m} = \sum_{h=1,\cdots,H^{(\varepsilon)}-1} \{P_h'^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m},$$

worin die $P_h'^{(\varepsilon)}$ wieder Linearformen der Variabeln $x_1, \cdots, x_5$ bedeuten und die Anzahl der Summanden rechts gegenüber der ursprünglichen Summe links gewiß um 1 vermindert ist.

Das dadurch eingeleitete Reduktionsverfahren können wir fortsetzen, bis schließlich die Zahl der Summanden auf M herabkommt; alsdann erhalten wir eine Formel von der Gestalt:

$$\sum_{h=1,\cdots,H^{(\varepsilon)}} \{P_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m} = \sum_{h=1,\cdots,M} \{Q_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m}, \tag{8}$$

wo wiederum die

$$Q_h^{(\varepsilon)}(x) = q_{h1}^{(\varepsilon)} x_1 + \cdots + q_{h5}^{(\varepsilon)} x_5, \qquad (h=1,\cdots,M)$$

Linearformen der Variabeln $x_1, \cdots, x_5$ bedeuten, deren Koeffizienten $q_{hk}^{(\varepsilon)}$ wesentlich noch von ε abhängen.

Der *nächste* Schritt besteht in der Ausführung des Grenzüberganges zu $\varepsilon = 0$; dieser erfolgt leicht in der aus (7) und (8) entstehenden Formel

$$(x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \mathop{\mathrm{L}}_{\varepsilon=0} \sum_{h=1,\cdots,M} \{Q_h^{(\varepsilon)}(x)\}^{2m}. \tag{9}$$

Zunächst ist nämlich klar, daß sämtliche Koeffizienten der Formen $Q_h^{(\varepsilon)}$ unterhalb endlicher von ε unabhängiger Grenzen bleiben, sobald ε gegen 0 konvergiert; dies folgt aus den Limesgleichungen

$$1 = \mathop{\mathrm{L}}_{\varepsilon=0} (q_{1k}^{(\varepsilon)2m} + q_{2k}^{(\varepsilon)2m} + \cdots + q_{Mk}^{(\varepsilon)2m}),$$

wie sie durch Vergleichung der Koeffizienten von x_k^{2m} in (9) entstehen. Wegen des Umstandes, daß hiernach insbesondere $q_{11}^{(\varepsilon)}$ für alle ε unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, können wir für ε eine gegen 0 konvergierende Folge von positiven Werten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ finden, derart, daß der Limes

$$\mathop{\mathrm{L}}_{r=\infty} q_{11}^{(\varepsilon_r)} = q_{11}$$

existiert. Da ferner, wie gezeigt, auch $q_{21}^{(\varepsilon)}$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, so läßt sich wiederum aus jener Folge von Werten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ eine Folge $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots$ herausgreifen, so daß auch der Limes

$$\mathop{\mathrm{L}}_{r=\infty} q_{21}^{(\varepsilon_r')} = q_{21}$$

existiert. So fortfahrend erhalten wir schließlich nach $5M$-maliger Anwendung dieses Verfahrens eine gegen 0 konvergierende Folge $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \cdots$ derart, daß zugleich die sämtlichen Limesgleichungen

$$\mathop{\mathrm{L}}_{r=\infty} q_{hk}^{(\bar{\varepsilon}_r)} = q_{hk}, \qquad (h=1,\cdots,M,\ k=1,\cdots,5)$$

statthaben. Setzen wir sodann

$$Q_h(x) = q_{h1} x_1 + \cdots + q_{h5} x_5, \qquad (h=1,\cdots,M)$$

so gilt wegen (9) identisch in den Variabeln $x_1, \cdots, x_5$ die Formel

$$(x_1^2 \cdots + x_5^2)^m = \sum_{h=1,\cdots,M} Q_h^{2m}(x). \tag{10}$$

Diese Formel unterscheidet sich von der in Satz II behaupteten noch wesentlich dadurch, daß die Koeffizienten der Linearformen Q_h keineswegs rationale Zahlen sind.

Der *letzte* entscheidende Schritt meiner Beweisführung wird darin bestehen, von der Formel (10) den Übergang zu einer Formel zu ermöglichen, in welcher alle auftretenden Zahlenkoeffizienten rational sind. Zu dem Zwecke verschaffen wir uns zunächst M Linearformen

$$G_h(x) = a_{h1}x_1 + \cdots + a_{h5}x_5 \qquad (h = 1, \cdots, M)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_{hk}, derart, daß zwischen ihren $2m^{\text{ten}}$ Potenzen keine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten stattfindet. Dies ist gewiß möglich, da die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}^{2m} & a_{21}^{2m} & \cdots & a_{M1}^{2m} \\ a_{11}^{2m-1}a_{12} & a_{21}^{2m-1}a_{22} & \cdots & a_{M1}^{2m-1}a_{M2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{15}^{2m} & a_{25}^{2m} & \cdots & a_{M5}^{2m} \end{vmatrix}$$

offenbar nicht identisch in allen Argumenten a_{hk} Null ist und zur Erfüllung unserer Forderung nur nötig wird, die a_{hk} als ganze rationale Zahlen so zu bestimmen, daß A von Null verschieden ausfällt.

Nun sei in Formel (10) etwa Q_1 eine Linearform, deren Koeffizienten jedenfalls nicht sämtlich verschwinden, so daß

$$q_{11}^2 + \cdots + q_{15}^2$$

eine positive von Null verschiedene Zahl wird. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\alpha_h = \sqrt{\frac{q_{11}^2 + \cdots + q_{15}^2}{a_{h1}^2 + \cdots + a_{h5}^2}} \qquad (h = 1, \cdots, M),$$

so haben die M Linearformen

$$\alpha_1 G_1, \cdots, \alpha_M G_M$$

sämtlich die nämliche Quadratsumme ihrer Koeffizienten wie Q_1; es gibt daher gewiß eine orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, \cdots, x_5$, welche Q_1 in $\alpha_1 G_1$, ferner je eine solche orthogonale Transformation, die Q_1 in $\alpha_2 G_2, \cdots$, bez. in $\alpha_M G_M$ überführt. Wenden wir diese M orthogonalen Transformationen sämtlich der Reihe nach auf die Formel (10) an, addieren die so entstehenden M Formeln und dividieren durch M, so wird, wenn wir noch

$$\varrho_1 = \frac{\alpha_1^{2m}}{M}, \cdots, \quad \varrho_M = \frac{\alpha_M^{2m}}{M}$$

setzen:

$$(11) \qquad (x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \sum_{h=1,\cdots,M} \varrho_h G_h^{2m}(x) + \sum_{h=1,\cdots,M(M-1)} S_h^{2m}(x),$$

wo die S_h gewisse $M(M-1)$ Linearformen der $x_1, \cdots, x_5$ sind, wie sie aus den $Q_2, \cdots, Q_M$ durch jene orthogonalen Transformationen nach Hineinziehung des Faktors $\frac{1}{\sqrt[2m]{M}}$ entstehen. Wir betrachten nun dasjenige System von M linearen Gleichungen für die M Unbekannten $u_1, \cdots, u_M$, welches aus der Identität

$$\sum_{h=1,\cdots,M} u_h G_h^{2m}(x) = (x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m - \sum_{h=1,\cdots,M(M-1)} S_h^{2m}(x)$$

entspringt, wenn man die nämlichen Potenzen und Produkte von Potenzen der Variabeln $x_1, \cdots, x_5$ auf beiden Seiten gleich setzt. Da die Determinante dieses Gleichungssystems bis auf einen Zahlenfaktor die von Null verschiedene Zahl A ist, so sind dessen Lösungen eindeutig bestimmt; sie lauten wegen (11):

$$u_1 = \varrho_1, \cdots, u_M = \varrho_M$$

und sind folglich sämtlich *positive* Größen. Da nun die Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit einer von Null verschiedenen Determinante stetige Funktionen der rechten Seiten der Gleichungen sind, so folgt, daß, wenn wir die Koeffizienten der Linearformen S_h innerhalb eines gewissen genügend kleinen Spielraumes irgendwie abändern, die Lösungen $u_1, \cdots, u_M$ des abgeänderten Gleichungssystemes ebenfalls noch sämtlich *positive* Zahlen bleiben. Wählen wir dabei die Koeffizienten innerhalb jenes Spielraums als rationale Zahlen, so müssen überdies die Lösungen $u_1, \cdots, u_M$, da ja die Koeffizienten von G_h sämtlich ganze rationale Zahlen sind, ebenfalls rational ausfallen. Bezeichnen S_h' die an Stelle der S_h tretenden Formen mit rationalen Koeffizienten und seien die betreffenden positiven rationalen Lösungen

$$u_1 = r_1, \cdots, u_M = r_M,$$

so gewinnen wir die Identität

$$(x_1^2 + \cdots + x_5^2) = \sum_{h=1,\cdots,M} r_h G_h^{2m}(x) + \sum_{h=1,\cdots,M(M-1)} S_h'^{2m}(x)$$

oder, indem wir noch die in den Koeffizienten von S_h' auftretenden Nenner herausziehen und die neu entstehenden Formen mit $G_{M+1}, \cdots, G_{M^2}$ bezeichnen,

(12)
$$(x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \sum_{h=1,\cdots,M^2} r_h G_h^{2m}(x),$$

wo $r_1, \cdots, r_{M^2}$ nun positive rationale Zahlen und die Koeffizienten der G_h sämtlich ganze Zahlen sind.

Schließlich können wir noch auf diese Formel (12) ein analoges Reduktionsverfahren anwenden wie dasjenige, welches uns oben zu der Formel (8) führte. Wir bedenken, daß zwischen den Linearformen $G_1, \cdots, G_{M+1}$ eine Identität von der Gestalt

(13)
$$c_1 G_1^{2m}(x) + \cdots + c_{M+1} G_{M+1}^{2m}(x) = 0$$

bestehen muß, wo $c_1, \cdots, c_{M+1}$ jetzt rationale Zahlen sind, bestimmen alsdann eine rationale Zahl c derart, daß unter den Zahlen

$$\frac{cc_1}{r_1}, \cdots, \frac{cc_{M+1}}{r_{M+1}}$$

eine gleich 1 und die übrigen $\leqq 1$ werden. Subtrahieren wir nun die mit c multiplizierte Identität (13) von der rechten Seite der Formel (12), so wird in der rechts entstehenden Summe einer der Koeffizienten Null, ohne daß einer der übrigen negativ ausfällt, so daß die neu entstandene Formel rechts gewiß einen Summanden weniger aufweist. Fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir schließlich zu einer Formel, die alle in Satz II verlangten Eigenschaften besitzt. Damit ist der Beweis des Satzes II vollendet.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn wir in der vorstehenden Überlegung an Stelle von Q_1 nicht eine beliebige der M Linearformen $Q_1, \cdots, Q_M$, sondern eine solche unter diesen M Formen nehmen, für die die Quadratsumme der Koeffizienten am größten ausfällt, es leicht wegen der Identität (10) gelingt, für die betreffende Quadratsumme

$$q_{11}^2 + \cdots + q_{15}^2$$

eine untere nur durch m bedingte Schranke zu bestimmen, und daß aus dieser unteren Schranke wiederum ohne wesentliche Schwierigkeit eine obere Schranke σ für denjenigen Spielraum abzuleiten ist, innerhalb dessen die Koeffizienten der Formen S_h abgeändert werden dürfen, ohne daß die betreffenden Lösungen $u_1, \cdots, u_M$ negativ werden. Durch die Kenntnis von σ aber ist es schließlich auch möglich, für die absoluten Werte der Zähler und Nenner der in der Formel des Satzes II auftretenden rationalen Zahlen r_h und für die absoluten Werte der ganzen Zahlen a_{kh} eine obere Schranke aufzufinden, die nur durch m bedingt ist.

Die Formel des Satzes II bildet den Kernpunkt für den Beweis unseres Theorems. Sie läßt nämlich sofort aus der Gültigkeit des Waringschen Theorems für die m^{ten} Potenzen auf seine Gültigkeit für die $2m^{\text{ten}}$ Potenzen schließen.*) Denn bezeichnen wir etwa den nur von m abhängigen Generalnenner der in Formel (5) rechts auftretenden rationalen Zahlen r_h mit E, nehmen $x_5 = 0$ und beachten, daß jede Zahl sich als Summe von 4 Quadraten darstellen läßt, so lehrt Formel (5) sofort, daß jede durch E teilbare positive ganze Zahl sich als Summe einer Anzahl von $2m^{\text{ten}}$ Potenzen darstellen läßt, die unterhalb einer nur von m abhängigen Schranke liegt, vorausgesetzt, daß der Waringsche Satz für die m^{ten} Potenzen gilt. Da jede positive ganze Zahl sich in der Form $H \cdot E + K$ darstellen läßt, wo H und K positiv ganz sind und $K < E$ ist, so folgt hieraus, da ja die Zahl K eine Summe von höchstens $E - 1$ Zahlen 1^{2m} ist, das Waringsche Theorem für die $2m^{\text{ten}}$ Potenzen.

Wir sehen somit, daß durch das Vorangehende das Waringsche Theorem gewiß für alle unendlich vielen Exponenten der Form $m = 2^{\nu}$ bewiesen ist, da es für $m = 2$ gilt. Um es allgemein für beliebige Exponenten zu beweisen, müssen wir der Reihe nach folgende 5 Hilfssätze entwickeln.

Hilfssatz 1. *Zu jedem Exponenten m gehören eine gewisse Anzahl N positiver rationaler Zahlen*

$$r_1, r_2, \cdots, r_N,$$

sowie zwei positive ganze Zahlen a, A von folgender Eigenschaft:

es seien x und G beliebige positive ganze Zahlen und Γ eine beliebige reelle positive Zahl, es sei ferner X eine positive ganze Zahl, die der Ungleichung

$$X < \Gamma^2 x^2 \tag{14}$$

genügt; dann können zu diesen Größen x, G, Γ, X stets N ganze Zahlen $(\gtreqless 0)$

$$X_1, X_2, \cdots, X_N,$$

deren absolute Beträge den Ungleichungen

$$|X_h| < A\Gamma x \qquad (h = 1, \cdots, N)$$

genügen, derart gefunden werden, daß die Gleichung

$$(G^2 x^2 + X)^m = \sum_{h=1,\cdots,N} r_h (aGx + X_h)^{2m}$$

statthat.

Zum Beweise gestalten wir die Formel des Satzes II in folgender Weise um. Zunächst bedenken wir, daß auf der rechten Seite dieser Formel möglicherweise eine oder mehrere der zur $2m^{\text{ten}}$ Potenz erhobenen

*) Vgl. A. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 65, S. 424.

Linearformen lauter verschwindende Koeffizienten haben könnten. Lassen wir diese Potenzen weg, so mögen etwa $N \leqq M$ Summanden rechts übrig bleiben, so daß unsere Formel wie folgt lautet

$$(15) \qquad (x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m = \sum_{h=1,\cdots,N} r_h(a_{1h}x_1 + \cdots + a_{5h}x_5)^{2m}.$$

Hierin dürfen wir annehmen, daß jede der mit x_1 multiplizierten Zahlen a_{1h} von Null verschieden ist, da andernfalls die Anwendung einer geeigneten orthogonalen Transformation mit rationalen Koeffizienten unsere Formel in eine solche umwandeln würde, in der die jenen Koeffizienten entsprechenden Koeffizienten sämtlich von Null verschieden sind. Endlich setzen wir in unserer Formel (15) für $x_1, x_2, \cdots, x_5$ bez. die Größen $Gx, x_1, \cdots, x_4$ ein, ferner sei

$$a = |a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1N}|$$

$$\frac{a\, a_{2h}}{a_{1h}} = a'_{1h}, \quad \frac{a\, a_{3h}}{a_{1h}} = a'_{2h}, \cdots, \frac{a\, a_{5h}}{a_{1h}} = a'_{4h},$$

sodaß $a'_{1h}, \cdots, a'_{4h}$ wiederum ganze Zahlen werden. Wir erhalten so die Formel

$$(16) \quad (G^2x^2 + x_1^2 + \cdots + x_4^2)^m = \sum_{h=1,\cdots,N} r_h(a\,Gx + a'_{1h}x_1 + \cdots + a'_{4h}x_4)^{2m},$$

wo die r_h, wie leicht ersichtlich, eine nicht wesentlich veränderte Bedeutung haben.

Bezeichnen wir nun mit A den größten Wert, den eine der N Zahlen

$$|a'_{1h}| + \cdots + |a'_{4h}| \qquad (h = 1, \cdots, N)$$

annimmt, so folgt Hilfssatz 1 unmittelbar durch folgende Überlegung. Stellen wir die ganze Zahl X als Summe von 4 Quadratzahlen dar und setzen

$$X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

so folgt aus (14)

$$|x_h| < \Gamma x \qquad (h = 1, \cdots, 4).$$

Nehmen wir daher

$$X_h = a'_{1h}x_1 + \cdots + a'_{4h}x_4,$$

so wird

$$\begin{aligned} |X_h| &\leqq (|a'_{1h}| + \cdots + |a'_{4h}|)\, \Gamma x \\ &< A\Gamma x. \end{aligned}$$

Hilfssatz 2. *Zu jedem Exponenten m gehören wie in Hilfssatz 1 eine gewisse Anzahl N positiver rationaler Zahlen*

$$r_1, r_2, \cdots, r_N,$$

sowie zwei positive ganze Zahlen a, A von folgender Eigenschaft:

es seien x, G, Γ Zahlen wie in Hilfssatz 1, es sei ferner X eine potive ganze Zahl, die der Ungleichung

$$X < \Gamma^2 x^2 \tag{17}$$

genügt, dann können zu diesen Größen x, G, Γ, X stets N ganze Zahlen $\left(\gtreqless 0\right)$

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_N,$$

deren absolute Beträge den Ungleichungen

$$|X_h| < A\Gamma x \qquad (h = 1, \cdots, N)$$

genügen, derart gefunden werden, daß die Gleichung

$$x(G^2x^2 + X)^m = \frac{1}{G} \sum_{h=1,\cdots,N} r_h(aGx + X_h)^{2m+1}$$

statthat.

Durch Differentiation von (16) nach x entsteht eine Formel von der Gestalt

$$x(G^2x^2 + x_1^2 + \cdots + x_4^2)^{m-1} = \frac{1}{G} \sum_{h=1,\cdots,N} r_h(aGx + a'_{1h}x_1 + \cdots + a'_{4h}x_4)^{2m-1},$$

wo die r_h eine nicht wesentlich veränderte Bedeutung haben. Ersetzen wir hierin m durch $m+1$ und wenden dann die vorige Überlegung auf *diese* Formel statt auf (16) an, so ergibt sich der Beweis des Hilfssatzes 2.

Aus den eben bewiesenen Hilfssätzen 1 und 2 leiten wir jetzt zwei weitere Hilfssätze 3 und 4 ab, in denen gewisse Gleichungen behauptet werden, die sich von den am Schlusse der Hilfssätze 1 und 2 aufgestellten hauptsächlich dadurch unterscheiden, daß auf ihrer linken Seite an Stelle der positiven Zahlen X gewisse Zahlen Y treten, für die auch negative Werte zulässig sind.

Hilfssatz 3. *Zu jedem Exponenten m gehören eine gewisse Anzahl N positiver rationaler Zahlen*

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_N,$$

ferner eine reelle, stets positive Funktion $\varphi(\varkappa)$ der reellen Variabeln $\varkappa$ und endlich eine Funktion $F(K, \varkappa)$ der ganzzahligen Variabeln K und der reellen Variabeln $\varkappa$, die durchweg positive ganzzahlige Werte hat und bei festgehaltenem $\varkappa$ mit unendlich wachsendem K selbst, ohne je abzunehmen, über alle Grenzen wächst; diese zu m zugehörigen Größen r_h, φ, F sind von folgender Beschaffenheit:

es sei x eine beliebige positive ganze Zahl und K eine beliebige positive ganze Zahl > 16, ferner $\varkappa$ eine reelle, der Ungleichung

(18) $$1 \leqq \varkappa < \frac{1}{2}\sqrt{K} - 1$$

genügende Größe; es werde endlich

(19) $$\varkappa' = \varphi(\varkappa), \quad K' = F(K, \varkappa)$$

gesetzt; wenn dann Y *eine beliebige ganze Zahl* $\left(\lesseqgtr 0\right)$ *ist, deren absoluter Betrag der Ungleichung*

(20) $$|Y| < \varkappa \sqrt{K} x^2$$

genügt, so können zu diesen Größen x, K, $\varkappa$, Y *stets* N *ganze Zahlen* $Y_1', \cdots, Y_N'$ $\left(\gtreqless 0\right)$, *deren absolute Beträge die Ungleichungen*

(21) $$|Y_h'| < \varkappa' \sqrt{K'}\, x$$

befriedigen, derart gefunden werden, daß die Gleichung

$$(Kx^2 + Y)^m = \sum_{h=1,\cdots,N} r_h (K'x + Y_h')^{2m}$$

stattfindet.

Zum Beweise bestimmen wir zunächst eine positive ganze Zahl G durch die Ungleichungen

(22) $$(G + \varkappa)^2 < K \leqq (G + \varkappa + 1)^2;$$

dann wird

$$K - G^2 > \varkappa(2G + \varkappa) \geqq 2\varkappa\sqrt{K} - \varkappa(\varkappa + 2),$$

und da wegen (18)

$$\sqrt{K} > \varkappa + 2$$

ist, so haben wir demnach auch

(23) $$K - G^2 > \varkappa\sqrt{K}.$$

Andererseits ist mit Rücksicht auf (22)

$$K - G^2 \leqq (\varkappa + 1)(2G + \varkappa + 1) < 2(\varkappa + 1)\sqrt{K} \leqq 4\varkappa\sqrt{K}$$

d. h.

(24) $$K - G^2 < 4\varkappa\sqrt{K}.$$

Setzen wir nun

(25) $$X = (K - G^2)x^2 + Y,$$

so gilt wegen (23), (24) infolge der Voraussetzung (20) unseres zu beweisenden Hilfssatzes

$$0 < X < 5\varkappa\sqrt{K}x^2.$$

Wir wenden jetzt den Hilfssatz 1 auf die Zahlen x, G, X an; setzen wir noch darin

$$\Gamma = \sqrt{5\varkappa}\,\sqrt[4]{K},$$

so wird zugleich auch der Bedingung (14) dieses Hilfssatzes 1 genügt, und derselbe lehrt das Bestehen einer Gleichung von der Gestalt

$$(26)\qquad (G^2x^2+X)^m = \sum_{h=1,\cdots,N} r_h(aGx+Y_h')^{2m},$$

wo Y_h' (d. h. die X_h in Hilfssatz 1) ganze den Ungleichungen

$$(27)\qquad |Y_h'| < A\sqrt{5\varkappa}\sqrt[4]{K}x$$

genügende Zahlen sind. Setzen wir

$$\varphi(\varkappa) = \frac{A}{\sqrt{a}}\sqrt{10\varkappa}, \quad F(K,\varkappa) = aG,$$

so erfüllen diese Funktionen alle Bedingungen des zu beweisenden Hilfssatzes. Denn wegen (19) wird dann notwendig

$$\varkappa' = \frac{A}{\sqrt{a}}\sqrt{10\varkappa}, \quad K' = aG,$$

und es geht (26) wegen (25) in die zum Schluß des Hilfssatzes 3 behauptete Gleichung über. Endlich ist wegen (18), (22)

$$(2\varkappa+2)^2 < K \leqq (G+\varkappa+1)^2,$$

folglich

$$\varkappa+1 < G,$$

und demnach

$$A\sqrt{5\varkappa}\sqrt[4]{K} \leqq A\sqrt{5\varkappa}\sqrt{G+\varkappa+1} < A\sqrt{10\varkappa}\sqrt{G}$$

d. h.

$$A\sqrt{5\varkappa}\sqrt[4]{K} < \varkappa'\sqrt{K'}.$$

Wegen dieser Ungleichung geht aus (27) die Ungleichung (21) des Hilfssatzes 3 hervor; dieser Hilfssatz 3 ist mithin vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4. *Zu jedem Exponenten m gehören wie in Hilfssatz 3 eine gewisse Anzahl N positiver rationaler Zahlen*

$$r_1, r_2, \cdots, r_N,$$

ferner eine reelle, stets positive Funktion $\varphi(\varkappa)$ der reellen Voriabeln $\varkappa$ und endlich eine Funktion $F(K,\varkappa)$ der ganzzahligen Variabeln K und der reellen Variabeln $\varkappa$, die durchweg positive ganzzahlige Werte hat und bei festgehaltenem $\varkappa$ mit unendlich wachsendem K selbst, ohne je abzunehmen, über alle Grenzen wächst; diese zu m zugehörigen Größen r_h, φ, F sind von folgender Beschaffenheit:

es seien x, K, $\varkappa$ Zahlen, die denselben Bedingungen wie in Hilfssatz 3 genügen; es werde endlich, wie dort

$$\varkappa' = \varphi(\varkappa), \quad K' = F(K,\varkappa)$$

gesetzt; wenn dann Y eine beliebige ganze Zahl $\left(\gtreqless 0\right)$ *ist, deren absoluter Betrag der Ungleichung*

$$|Y| < \varkappa \sqrt{K} x^2$$

genügt, so können zu diesen Größen x, K, $\varkappa$, Y stets N ganze Zahlen $Y_1', \cdots, Y_N'$ $\left(\gtreqless 0\right)$, *deren absolute Beträge die Ungleichungen*

$$|Y_h'| < \varkappa' \sqrt{K'} x$$

befriedigen, derart gefunden werden, daß die Gleichung

$$x(Kx^2 + Y)^m = \frac{1}{K'} \sum_{h=1,\cdots,N} r_h (K'x + Y_h')^{2m+1}$$

stattfindet.

Der Beweis folgt, indem wir die zum Beweis des Hilfssatzes 3 vorhin angewandten Schlußfolgerungen, statt auf Hilfssatz 1, nunmehr auf Hilfssatz 2 beziehen.

Hilfssatz 5. *Zu jedem Exponenten n gehören zwei ganze Zahlen p, q, so daß*

(28) $$n = p + q$$

und

(29) $$0 \leqq p < q$$

ist, ferner eine positive ganze Zahl K und eine gewisse Anzahl N^* positiver rationaler Zahlen

$$k_1, k_2, \cdots, k_{N^*}$$

von folgender Beschaffenheit:

ist x eine beliebige positive ganze Zahl, Y irgend eine ganze Zahl $\left(\lesseqgtr 0\right)$, *deren absoluter Betrag der Ungleichung*

$$|Y| < \sqrt{K} x^q$$

genügt, so gibt es zu diesen Zahlen x, Y stets gewisse N^* positive ganze Zahlen

$$P_1, P_2, \cdots, P_{N^*}$$

derart, daß die Gleichung

$$x^p (Kx^q + Y) = \sum_{h=1,2,\cdots,N^*} k_h P_h^n$$

statthat.

Zum Beweise entwickeln wir den Exponenten n im dyadischen Zahlsystem wie folgt

$$\begin{aligned} n &= 2^g + e_1 2^{g-1} + e_2 2^{g-2} + \cdots + e_{g-1} 2 + e_g \\ &= 1 e_1 e_2 \cdots e_{g-1} e_g, \end{aligned}$$

so daß g ein ganzer Exponent ist und $e_1, e_2, \cdots, e_g$ gewisse Werte Null oder Eins werden. Nun definieren wir $g+1$ Zahlen $n_0, n_1, n_2, \cdots, n_g$ durch folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
n_0 &= 1, \\
n_1 &= 2 + e_1 \\
&= 1e_1, \\
n_2 &= 2^2 + e_1 2 + e_2 \\
&= 1e_1 e_2, \\
n_3 &= 2^3 + e_1 2^2 + e_2 2 + e_3 \\
&= 1e_1 e_2 e_3, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
n_g &= 2^g + e_1 2^{g-1} + \cdots + e_{g-1} 2 + e_g \\
&= 1e_1 e_2 \cdots e_{g-1} e_g = n,
\end{aligned}$$

so daß allgemein

$$n_{h+1} = 2n_h + e_{h+1}$$

wird. Ferner setzen wir

$$\begin{aligned}
p_0 &= e_1 2^{g-1} + e_2 2^{g+2} + \cdots + e_g \\
&= e_1 e_2 \cdots e_g, \\
p_1 &= e_2 2^{g-2} + e_3 2^{g-3} + \cdots + e_g \\
&= e_2 e_3 \cdots e_g, \\
p_2 &= e_3 2^{g-3} + \cdots + e_g \\
&= e_3 \cdots e_g, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
p_{g-1} &= e_g, \\
p_g &= 0,
\end{aligned}$$

so daß allgemein

$$p_{h-1} - p_h = e_h 2^{g-h}$$

wird. Endlich sei noch

$$\begin{aligned}
p &= n - 2^g = e_1 2^{g-1} + e_2 2^{g-2} + \cdots + e_g = p_0, \\
q &= 2^g,
\end{aligned}$$

so daß die Bedingungen (28), (29) erfüllt sind.

Nunmehr wenden wir die Hilfssätze 3 bez. 4 im ganzen g-Mal an und gelangen so zu den Gleichungen

$$(30)\begin{cases} x^{p_0}(Kx^{2^g}+Y)=\dfrac{1}{K'^{e_1}}\displaystyle\sum_{h=1,\cdots,N_1} r_h^{(1)}x^{p_1}(K'x^{2^{g-1}}+Y_h'^{(1)})^{n_1}, \\ x^{p_1}(K_1x^{2^{g-1}}+Y_1)^{n_1}=\dfrac{1}{K_1'^{e_2}}\displaystyle\sum_{h=1,\cdots,N_2} r_h^{(2)}x^{p_2}(K_1'x^{2^{g-2}}+Y_h'^{(2)})^{n_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{p_{g-2}}(K_{g-2}x^{2^2}+Y_{g-2})^{n_{g-2}}=\dfrac{1}{K'^{e_{g-1}}_{g-2}}\displaystyle\sum_{h=1,\cdots,N_{g-1}} r_h^{(g-1)}x^{p_{g-1}}(K'_{g-2}x^2+Y_h'^{(g-1)})^{n_{g-1}}, \\ x^{p_{g-1}}(K_{g-1}x^2+Y_{g-1})^{n_{g-1}}=\dfrac{1}{K'^{e_g}_{g-1}}\displaystyle\sum_{h=1,\cdots,N_g} r_h^{(g)}(K'_{g-1}x+Y_h'^{(g)})^{n}. \end{cases}$$

Dabei ist jede dieser Gleichungen so zu verstehen, daß ihre linke Seite, sobald dort Y_s eine ganze, der Bedingung

$$|Y_s|<\varkappa_s\sqrt{K_s}\,x^{2^{g-s}}$$

genügende Zahl ist, sich in Gestalt der rechts stehenden Summe darstellen läßt, so daß die $Y_h'^{(s+1)}$ passend gewählte, den Ungleichungen

$$(31)\qquad |Y_h'^{(s+1)}|<\varkappa_s'\sqrt{K_s'}\,x^{2^{g-s-1}}$$

genügende ganze Zahlen bedeuten. Die Größen $r_h^{(s)}$, $\varkappa_s$, $\varkappa_s'$, K_s, K_s' haben hierbei die in Hilfssatz 3 und 4 angegebene Bedeutung; es ist demnach (der untere Index 0 ist stets zu unterdrücken)

$$(32)\qquad \begin{cases} \varkappa_s'=\varphi_s(\varkappa_s), \\ K_s'=F_s(K_s,\varkappa_s), \end{cases} \qquad (s=0,1,\cdots,g-1)$$

wo φ, F die in den Hilfssätzen 3 und 4 auftretenden Funktionen sind. Überdies ist zu beachten, daß allgemein $\varkappa_s$ den Ungleichungen

$$(33)\qquad 1\leqq\varkappa_s<\frac{1}{2}\sqrt{K_s}-1$$

genügen muß, wodurch auch zugleich $K_s>16$ wird.

Um nun zum Beweise des Hilfssatzes 5 zu gelangen, muß es möglich sein, die auf den rechten Seiten einer jeden der Formeln (30) stehenden Summanden als linke Seiten der nächstfolgenden Formel zu nehmen, damit sich schließlich die linke Seite der ersten Formel als Summe von Größen ergibt, die die Gestalt der rechten Seite der letzten Formel haben. Um diese Möglichkeit darzutun, setzen wir allgemein

$$(34)\qquad K_s=K'_{s-1}\qquad (s=1,\cdots,g-1)$$

und brauchen dann nur noch zu bewirken, daß die Bedingungen

$$(35)\qquad \varkappa'<\varkappa_1,\quad \varkappa_1'<\varkappa_2,\ \cdots,\ \varkappa'_{g-2}<\varkappa_{g-1}$$

erfüllt sind.

Wählen wir nun bei der erstmaligen Anwendung des Hilfssatzes 3 bez. 4 $\varkappa = 1$, so ist dadurch wegen (32)

$$\varkappa' = \varphi(1)$$

bestimmt, während uns die Wahl von K noch freisteht. Da die in den Hilfssätzen auftretende Funktion $F(K, \varkappa)$ bei festem $\varkappa$ mit K zugleich, ohne je abzunehmen, über alle Grenzen wächst und wegen (32), (34)

$$K_1 = F(K, \varkappa) = F(K, 1)$$

ist, so können wir K so groß wählen, daß

$$\frac{1}{2}\sqrt{K_1} - 1 > \varkappa' + 1$$

wird, und dann bleibt diese Ungleichung auch erfüllt, wenn wir K noch vergrößern. Nun setzen wir

$$\varkappa_1 = \varkappa' + 1$$

und genügen damit der ersten der Bedingungen (35) und der Bedingung (33) für $s = 1$. Nach dieser Verfügung über $\varkappa_1$ bestimmt sich $\varkappa_1'$ wegen (32) aus der Gleichung

$$\varkappa_1' = \varphi_1(\varkappa_1).$$

Da nun wiederum die Funktion $F_1(K_1, \varkappa_1)$ bei festem $\varkappa_1$ mit K_1 zugleich, ohne je abzunehmen, über alle Grenzen wächst und wegen (32), (34)

$$K_2 = F_1(K_1, \varkappa_1)$$

ist, so können wir K weiter so groß wählen, daß

$$\frac{1}{2}\sqrt{K_2} - 1 > \varkappa_1' + 1$$

wird, und dann bleibt diese Ungleichung auch erfüllt, wenn wir K noch vergrößern. Nun setzen wir

$$\varkappa_2 = \varkappa_1' + 1$$

und genügen damit der zweiten der Bedingungen (35) und der Bedingung (33) für $s = 2$. In derselben Weise fahren wir fort, bis wir zu der Gleichung

$$\varkappa_{g-1} = \varkappa_{g-2}' + 1$$

gelangen.

Schließlich machen wir K noch so groß, daß

$$\sqrt{K_{g-1}'} > \varkappa_{g-1}'$$

wird; da wegen (31) für $s = g - 1$

$$|Y_h'^{(g)}| < \varkappa_{g-1}' \sqrt{K_{g-1}'}\, x,$$

und folglich jetzt

$$|Y_h'^{(g)}| < K_{g-1}' x$$

ist, so werden die auf der rechten Seite der letzten Formel in (30) zur n^{ten} Potenz erhobenen ganzen Zahlen positiv.

Führen wir nun die Substitutionen der linken Seiten der Formeln (30) in die rechten Seiten der jedesmal vorangehenden Formel aus, so entsteht eine Formel von der Gestalt

$$x^p(Kx^q+Y)=\sum_{h=1,\cdots,N^*} k_h(K'_{g-1}x+Y_h'^{(g)})^n,$$

wobei rechts

$$N^*=N_1N_2\cdots N_g$$

Summanden stehen und die k_h positive rationale Zahlen sind. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Aus Hilfssatz 5 vermögen wir nun das anfangs aufgestellte Theorem über die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch n^{te} Potenzen folgendermaßen abzuleiten.

Wir verstehen unter x eine beliebige positive ganze Zahl $\geqq 2^n$, ferner unter Y_1, Y_2 irgend zwei ganze, den Ungleichungen

$$(36)\qquad \begin{cases} 0\leqq Y_1<\sqrt{K}x^q, \\ 0\leqq Y_2<\sqrt{K}(x+1)^q \end{cases}$$

genügende Zahlen. Dann gelten nach Hilfssatz 5 die Gleichungen

$$x^p[Kx^q-Y_1]=\sum_{h=1,\cdots,N^*} k_hP_h^n,$$

$$(x+1)^p[K(x+1)^q+Y_2]=\sum_{h=1,2,\cdots,N^*} k_hQ_h^n$$

und nach Addition

$$(37)\qquad x^p[Kx^q-Y_1]+(x+1)^p[K(x+1)^q+Y_2]=\sum_{h=1,\cdots,N^*} k_h(P_h^n+Q_h^n),$$

wo die P_h und Q_h gewisse $2N^*$ ganze positive Zahlen sind. Die linke Seite der Formel (37) hat die Gestalt

$$K[x^n+(x+1)^n]+Z,$$

wenn

$$Z=(x+1)^pY_2-x^pY_1$$

gesetzt wird.

Wir überzeugen uns nun davon, daß der Ausdruck

$$(x+1)^pY_2-x^pY_1$$

bei geeigneter, den Ungleichungen (36) entsprechender Wahl von Y_1, Y_2 jede ganze Zahl Z darzustellen vermag, die den Ungleichungen

$$0\leqq Z\leqq x^n$$

genügt. In der Tat, da die Zahlen $(x+1)^p$ und x^p relativ prim sind, so besitzt erstlich für jedes ganzzahlige Z die diophantische Gleichung

$$Z=(x+1)^pY_2-x^pY_1$$

ganzzahlige Lösungen Y_1, Y_2; nun ist aber zugleich mit Y_1, Y_2 auch

$$Y_1 - T(x+1)^p,$$
$$Y_2 - Tx^p$$

für jedes ganzzahlige T eine Lösung, und daraus wird ersichtlich, daß wir Y_1 der Ungleichung

$$0 \leqq Y_1 < (x+1)^p$$

entsprechend annehmen dürfen. Da $p < q$ ist, so wird $(x+1)^p < x^q$, sobald nur x hinreichend groß, etwa $\geqq 2^n$, gewählt wird; wir haben dann

$$0 \leqq Y_1 < x^q.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichung $Y_1 < (x+1)^p$ folgt ferner

$$Y_2 = \frac{x^p Y_1 + Z}{(x+1)^p} < x^p + \frac{x^n}{(x+1)^p} < x^p + x^q,$$

wenn

$$0 \leqq Z \leqq x^n$$

vorausgesetzt wird, und demnach haben wir mit Rücksicht auf $q > p$, und da Y_2 nicht negativ werden kann,

$$0 \leqq Y_2 < (x+1)^q.$$

Den Ungleichungen (36) ist damit genügt, da ja $K > 16$ ist.

Durch Zusammenfassung des Bisherigen erkennen wir, daß jede in dem durch die Ungleichungen

$$K[x^n + (x+1)^n] \leqq U \leqq K[x^n + (x+1)^n] + x^n$$

bestimmten Intervalle J_x gelegene ganze Zahl U sich in der Gestalt

$$\sum_{h=1,\cdots,N^*} k_h(P_h^n + Q_h^n)$$

darstellen läßt. Von einem hinreichend großen x an greifen nun diese Intervalle J_x übereinander derart, daß die größte Zahl von J_x größer als die kleinste von J_{x+1} ist; in der Tat haben wir gewiß

$$K[x^n + (x+1)^n] + x^n > K[(x+1)^n + (x+2)^n],$$

sobald

$$x > \frac{2\sqrt[n]{K}}{\sqrt[n]{K+1} - \sqrt[n]{K}}$$

genommen wird.

Es lassen sich also alle ganzen Zahlen U, die eine gewisse Größe S überschreiten, in der Gestalt

$$\sum_{h=1,\cdots,N^*} k_h(P_h^n + Q_h^n)$$

darstellen, wo P_h, Q_h gewisse $2N^*$ positive ganze Zahlen bedeuten.

Bezeichnen wir den Generalnenner der rationalen Zahlen k_h mit E, so folgt aus dieser Darstellung nach Multiplikation mit E, daß gewiß jede oberhalb der Größe ES gelegene und durch E teilbare ganze Zahl sich als Summe von n^{ten} Potenzen positiver ganzer Zahlen darstellen läßt, so daß deren Anzahl unterhalb einer Schranke liegt, die nur von n abhängt. Folglich gilt dies auch für *jede* durch E teilbare und daher auch für jede nicht durch E teilbare ganze Zahl, auf Grund der nämlichen Betrachtung, die oben nach Schluß des Beweises zu Satz II angestellt worden ist. Damit ist das anfangs aufgestellte Theorem, wie es von Waring vermutet worden ist, vollständig bewiesen.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man durch das vorstehende Beweisverfahren auch zugleich eine obere Schranke für die Anzahl der zur Darstellung einer beliebigen Zahl nötigen n^{ten} Potenzen wirklich finden kann; dazu ist erforderlich, die am Schluß des Beweises von Satz II gemachte Bemerkung zu berücksichtigen und die in dem soeben vollendeten Beweisverfahren auftretenden Größen so weit abzuschätzen, daß die fragliche Schranke schließlich durch n ausdrückbar ist.