Beiträge zur Theorie der Punktmengen. III.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Mit dem folgenden Beitrage gelangen meine Untersuchungen über die Theorie der ebenen Punktmengen zu einem gewissen Abschluß. Das Ziel, das ich mir gesteckt hatte, und das darauf ging, die geläufigen Sätze der Analysis situs über Kurven und Kurvenbogen, sowie über die durch sie bewirkten Gebietsteilungen mengentheoretisch zu klären und zu begründen, dürfte mit ihnen erreicht sein. Abgesehen hiervon aber haben diese Untersuchungen zu einem neuen und meines Erachtens prinzipiell wichtigen Ergebnis geführt, nämlich zu den *notwendigen und hinreichenden* Eigenschaften, die für eine Punktmenge erfüllt sein müssen, damit sie im Sinne der Analysis situs als *gleichwertig mit der Geraden oder der Strecke* betrachtet werden kann. Für diese Kriterien bildet die von mir eingeführte Unterscheidung der Punkte einer Menge in *erreichbare* und *nicht erreichbare* die Grundlage; in ihr darf ich denjenigen Begriff erblicken, der für eine abschließende Erörterung der vorliegenden Probleme eines der wesentlichsten Hilfsmittel bildet und den allgemeinsten mit der Geraden gleichwertigen Kurvenbegriff charakterisiert.

Als wichtig möchte ich noch den Umstand hervorheben, daß alle Begriffe, die ich für die Einteilung und Analyse der Mengen, sowie für die Kennzeichnung ihrer besonderen Art benutze, sich im Laufe der Untersuchung als solche erwiesen haben, die den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Ebene gegenüber *invariant* sind. Dies berechtigt dazu, diese Begriffe als die *natürlichen Grundbegriffe* jeder derartigen Analyse aufzufassen.

Was die teilweise Länge und Ausführlichkeit meiner Darstellung betrifft, so scheint sie mir unvermeidlich zu sein. Handelt es sich doch um ein Gebiet, bei dem man nur zu leicht zu Fehlern gelangt, wenn man die geläufigen Ergebnisse der Anschauung als die allgemeinsten gestaltlichen Möglichkeiten auffaßt. Demgegenüber habe ich stets die *logische Erschöpfung aller an sich möglichen Fälle* zum Ausgangspunkt gewählt.

Dies ist um so nötiger, als in vielen Fällen, insbesondere in der Funktionentheorie, ebene Mengen nur durch *analytische Definitionen* eingeführt werden, bei denen die Vorstellbarkeit schließlich ganz versagt. Ich füge hinzu, daß aus diesem Grunde auch der Beweis, den Herr C. Jordan für seinen bekannten Kurvensatz gegeben hat, einer Ergänzung bedarf. Dieser Beweis operiert mit einer Reihe von Polygonen, die einander einschließen, resp. ausschließen, und beruht auf der stillschweigenden, aber irrtümlichen *Annahme*, daß solche Reihen immer gegen eine geschlossene Kurve konvergieren, die die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt. *Dies ist aber keineswegs der Fall.* Vielmehr können die gestaltlichen Verhältnisse, die hier in Frage kommen, viel allgemeinere sein, und gerade das Auftreten der Kurve ist dasjenige, was des Beweises bedarf (vgl. § 1).

Im einzelnen ist zu bemerken, daß ich zunächst (§ 1ff) einige einfachere Hilfssätze über Gebiete und deren Zerlegung ableite, die hier als grundlegend zu betrachten sind, wobei auch die soeben genannte Frage ihre Erledigung findet. Alsdann folgen einige Paragraphen, die sich eingehend mit dem oben erwähnten Begriff der Erreichbarkeit beschäftigen und seine Bedeutung für die ganze Theorie ins Licht setzen (§ 5ff); es ist klar, daß in ihm das geometrische Äquivalent für die umkehrbare Stetigkeit des die Kurve darstellenden Funktionenpaares $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ zu erblicken ist. Dieser Begriff gestattet für diejenige Kurve, deren sämtliche Punkte beiderseits erreichbar sind und die ich als *einfache* Kurve bezeichne, dieselbe Anordnung ihrer Punkte vorzunehmen, wie für den Kreis, nämlich diejenige, die auf dem Zwischenbegriff beruht (§ 8). Es folgt (§ 10) ein neuer und wesentlich kürzerer Beweis des Satzes, daß jede derartige Kurve umkehrbar eindeutig und stetig auf den Kreis abgebildet werden kann*); alsdann folgt (§ 11) ein neuer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes über die Teilung der Ebene in ein Äußeres und Inneres, der überdies dahin zu vervollständigen ist, daß alle Punkte der bezüglichen Kurve aus beiderseits erreichbaren Punkten bestehen. Erst damit dürfte eine zufriedenstellende Antwort auf die Frage gewonnen sein, welches die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften einer Punktmenge sind, damit sie Bild des Kreises oder des Kreisbogens ist. Der Jordansche Satz erscheint auf diese Weise erst am Ende der Darstellung, wohin er bei der allgemeinen Erörterung der ebenen Mengen auch gehört; in der Tat reduziert sich so sein Beweis ausschließlich darauf, auf Grund der allgemeinen Resultate aus der Mannigfaltigkeit der verschiedenen ebenen Mengen diejenigen herauszusuchen, die ihrer Struktur

---

*) Einen Beweis dieses Satzes, und zwar mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes, gab inzwischen auch Herr F. Riesz, diese Ann. Bd. 59, S. 409.

nach Bild des Kreises sein können, wozu es nur der einfachsten Überlegungen bedarf.

Der Begriff der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung kann sich sowohl auf eine einzelne Menge wie auf die ganze Ebene beziehen. Der erste Begriff kann aber immer zu dem zweiten erweitert werden. Der Nachweis dieser Tatsache (§ 12) ist nötig, um die Sätze über Gebietsteilungen, die zunächst nur für polygonale Wege abgeleitet wurden, auf beliebige, einfache Kurvenwege zu übertragen. Den Schluß bildet (§ 13) eine Zusammenstellung der wichtigsten Invarianten der Analysis situs.

Ich schließe mit dem Hinweis, daß für diese Beiträge keine anderen Voraussetzungen zugrunde gelegt werden, als die *Analysis situs der gewöhnlichen Polygone* und der mit ihnen aufgebauten Gebilde, die allgemeinen Grundlagen der *Theorie der ebenen Mengen*, sowie endlich der Begriff der *eineindeutigen und stetigen Abbildung.* Auf dieser Grundlage gelingt es, dem eben genannten Teil der Analysis situs die allgemeinste Erweiterung zu geben, deren er fähig zu sein scheint.

§ 1.

Folgen einschließender und ausschließender Polygone.

Eine Folge von einfachen Polygonen

$$\{P_\nu\} = P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots$$

von der Art, daß kein Punkt von P_ν außerhalb von $P_{\nu+1}$ liegt*), soll als Folge *ausschließender* Polygone bezeichnet werden. Gemäß Beitrag II, § 3 konvergiert sie gegen eine *zusammenhängende* Menge $\mathfrak{T}$.**) Definiert man ein Gebiet $\mathfrak{J}$ so, daß ihm das *Innere* $\mathfrak{J}(P_\nu)$ eines jeden Polygons P_ν angehört, so ist auch $\mathfrak{J}$ *zusammenhängend.* Sind nämlich i_1 und i_2 zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, so gibt es der Definition gemäß ein erstes Polygon, zu dessen Innerem sie gehören; sie sind also durch einen zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Weg***) verbindbar.

Ein ähnlicher Satz besteht für eine Folge einander *einschließender* Polygone; darunter verstehe ich Polygone Q_ν von der Art, daß kein Punkt von Q_ν innerhalb von $Q_{\nu+1}$ liegt. Auch sie konvergieren gegen eine *zusammenhängende* Menge $\mathfrak{T}$, und man kann ein *zusammenhängendes* Gebiet $\mathfrak{A}$ definieren, dem das *Äußere* $\mathfrak{A}(Q_\nu)$ eines jeden Polygons Q_ν angehört.

Die Menge $\mathfrak{T}$ braucht weder in dem einen noch in dem anderen

*) Daß P_ν und $P_{\nu+1}$ Punkte gemein haben, ist zulässig.

**) Diese Ann. Bd. 59, S. 139. Dort ist der Satz unter der Voraussetzung isolierter Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ bewiesen; er gilt ebenso für die Polygone P_ν.

***) D. h. einen Streckenzug endlicher Streckenzahl; vgl. Beitrag II a. a. O. S. 131.

Falle eine geschlossene Kurve zu sein, sie kann vielmehr weit allgemeineren Charakter haben. Ziehen wir insbesondere die Polygone P_ν resp. die durch sie bestimmte Menge $\mathfrak{T}$ in Betracht, so gilt für die Gebietsteilung, die durch sie bewirkt wird, das Folgende. Setzt man

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{E}$ die ganze Ebene bedeutet, so braucht $\mathfrak{M}$ keineswegs zusammenhängend zu sein; vielmehr kann $\mathfrak{M}$ in beliebig viele Teilgebiete zerfallen, wofür unten ein einfaches Beispiel folgt. Benutzt man ferner für $\mathfrak{T}$ die allgemeine Zerlegung*)

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_m + \mathfrak{T}_{mi},$$

wo die Punkte von $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{T}_m$ Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ resp. nur von $\mathfrak{M}$ sind und die Punkte von $\mathfrak{T}_{mi}$ gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$, so folgert man leicht, daß $\mathfrak{T}_m = 0$ ist. Da nämlich jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ Grenzpunkt von Punkten der Polygone P_ν ist, so liegen in jeder Nähe von ihm auch solche Punkte, die zum *Inneren* gewisser Polygone P_ν, also auch zu $\mathfrak{J}$ gehören; es kann daher keinen Punkt t_m geben, in dessen Umgebung nur Punkte von $\mathfrak{M}$ liegen. Dagegen braucht $\mathfrak{T}_i$ nicht Null zu sein. Andererseits ist $\mathfrak{T}_{mi}$ die volle Grenze zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{M}$, und ist in dem Falle, daß $\mathfrak{M}$ selbst ein zusammenhängendes Gebiet ist, gemäß Beitrag II, § 5 ebenfalls eine zusammenhängende Menge, und zwar eine *geschlossene Kurve*. Ähnliche Verhältnisse gelten für den Fall, daß $\mathfrak{T}$ Grenzmenge der Polygone Q_ν ist.

Fügt man z. B. (Fig. 1) einem Quadrat von außen ein Dreieck so an, daß beide nur eine Ecke gemein haben, und betrachtet die Polygone, die gegen diese Figur von außen approximieren, so bilden sie eine Folge $\{Q_\nu\}$, so daß $\mathfrak{M}$ in zwei getrennte Gebiete zerfällt. Ähnliches gilt, wenn man das Dreieck von innen anfügt, für die von innen approximierenden Polygone P_ν. Errichtet man andererseits auf dem Quadrat nach außen ein Lot, und betrachtet wieder die von außen approximierenden Polygone, so bilden sie eine Folge, für die $\mathfrak{M}$ ein einziges Gebiet ist, während $\mathfrak{T}$ aus dem Quadrat und dem Lot besteht, also sich nicht auf die Grenze zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ beschränkt. Derartige Beispiele lassen sich in mannigfachster Form und zwar mit vorgegebenen Teilmengen $\mathfrak{T}_i$ resp. $\mathfrak{T}_a$ und mit vorgegebener Gebietsteilung leicht herstellen.

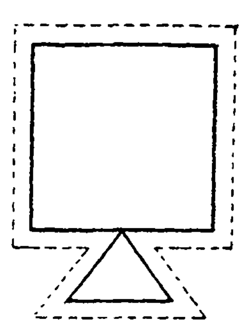

Fig. 1.

Nur wenn man von vornherein weiß, daß eine einschließende und eine ausschließende Polygonfolge gegen *dieselbe* Menge $\mathfrak{T}$ konvergiert, kann

---

*) Jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gehört einer und nur einer der drei Teilmengen an.

man gemäß dem Obigen folgern, daß die Ebene in nur zwei Gebiete zerfällt, und daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ deren gemeinsamer Grenzpunkt ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, wie ich bereits in der Einleitung bemerkte, daß der Beweis, den Herr C. Jordan für seinen bekannten Kurvensatz gegeben hat, einer Ergänzung bedarf. Herr Jordan operiert ebenfalls mit zwei Reihen von einfachen Polygonen P_ν resp. Q_ν, die gegen die gegebene Punktmenge $\mathfrak{T}$ konvergieren, und zwar bildet die eine Reihe eine einschließende, die andre eine ausschließende Folge. Er beweist, daß jeder Punkt des Ringgebietes, das zwischen je einem Polygon P_ν und Q_ν liegt, einen Abstand von $\mathfrak{T}$ besitzt, der mit wachsendem ν unendlich klein wird.*) Er definiert dann ebenfalls zwei zusammenhängende Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, wie es vorstehend geschehen ist, und behauptet, daß damit der Satz bewiesen sei. Dies ist jedoch nicht der Fall, wofür ich am einfachsten auf die obigen Beispiele verweisen kann. Um diesen Schluß ziehen zu können, muß man vielmehr noch nachweisen, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß auch der Abstand *jedes* Punktes von $\mathfrak{T}$ von den Polygonen P_ν und Q_ν unendlich klein wird.**) Dies kann innerhalb des Jordanschen Beweisganges gewiß gezeigt werden, ist aber andererseits für den Nachweis des Satzes unerläßlich und bildet einen wesentlichen Teil seines Inhalts. Überhaupt scheint mir der Hinweis auf die Mannigfaltigkeit der Figuren, die sich als Grenzen zweier derartiger Reihen von Polygonen einstellen können, für den bindenden Beweis des Satzes und die volle Erfassung seines Inhaltes geboten zu sein; gerade diese Unterlassung — wie ich auch in der Einleitung hervorhob — dürfte die Lücke des Beweises verschuldet haben.

§ 2.

Ein Satz über ausschließende Polygonfolgen.

Wir gehen von der in § 1 für die Polygone P_ν aufgestellten Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{M}$$

aus. Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ ist äußerer Punkt eines *jeden* Polygons P_ν. Diese Punkte teilen wir in zwei Klassen, je nachdem sie mit dem unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{E}$ durch einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbindbar sind oder nicht; die ersteren bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}$, die übrigen durch $\mathfrak{A}'$, und zwar ist $\mathfrak{A}$ der Definition gemäß ein zusammenhängendes Gebiet. Wir haben dann

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'.$$

*) Cours d'analyse, 2. Aufl. § 102. „Il est donc établi" usw. S. 98.

**) a. a. O. wird immer nur hervorgehoben, daß jeder Punkt von P_ν und Q_ν von $\mathfrak{T}$ unendlich kleinen Abstand hat, was eben nicht das gleiche ist.

Eine ähnliche Teilung können wir mit $\mathfrak{T}$ vornehmen. Sei $\mathfrak{T}_a$ die *volle Grenze* von $\mathfrak{A}$, also eine abgeschlossene Menge, so bleiben von $\mathfrak{T}$ nur solche Punkte übrig, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ oder nur von $\mathfrak{A}'$ oder von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$ sind; wir setzen demgemäß

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_a' + \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_{ai}'.$$

Setzen wir nun noch

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{J} + \mathfrak{T}_a' + \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_{ai}' = \mathfrak{N},$$

so wird

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{A} + \mathfrak{N},$$

und es läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{T}_a$ eine geschlossene Kurve ist, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ trennt.

Da nämlich gemäß § 1 in $\mathfrak{T}$ kein Punkt existiert, der Grenzpunkt nur von $\mathfrak{M}$ ist, so folgt zunächst, daß $\mathfrak{T}_a' = 0$ ist, und daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}_a$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ ist. Daraus allein kann aber die Behauptung nicht gefolgert werden*). Sie ergibt sich daraus, daß in unserm Fall $\mathfrak{T}_{ai}'$ nur Grenzpunkte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$, aber keine von $\mathfrak{A}$ enthält. Fügt man nämlich der Menge $\mathfrak{J}$ die Punkte von $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{T}_{ai}'$ hinzu, so entsteht eine ebenfalls zusammenhängende Menge $\mathfrak{J}'$, und man erhält

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{J}' + \mathfrak{A}'.$$

Ist nun t_{ai}' irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}_{ai}'$, ist ϱ' sein Abstand von der Menge $\mathfrak{T}_a$, und schlägt man um ihn einen Kreis mit dem Radius $\delta < \varrho'$, so können in diesem Kreis nur Punkte von $\mathfrak{N}$ liegen, und zwar sind darunter sowohl Punkte von $\mathfrak{J}$ wie von $\mathfrak{A}'$. Daraus folgt zunächst, daß *jeder* Punkt von $\mathfrak{A}'$ mit gewissen Punkten von $\mathfrak{J}$ durch einen zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Weg verbindbar ist. Da aber $\mathfrak{J}$ eine zusammenhängende Menge ist, so folgt nunmehr weiter, daß jeder Punkt von $\mathfrak{A}'$ mit *demselben* Punkt von $\mathfrak{J}$ durch einen solchen Weg verbindbar ist; d. h. $\mathfrak{N}$ ist eine zusammenhängende Menge. Hieraus folgt alsdann nach Beitrag II, § 5, daß $\mathfrak{T}_a$ eine geschlossene Kurve ist. Also:

Durch jede Folge ausschließender Polygone $\{P_\nu\}$ wird eine gewisse geschlossene Kurve C definiert, die Teilmenge der durch die Polygone $\{P_\nu\}$ bestimmten Menge $\mathfrak{T}$ ist, und deren Inneres das Innere $J(P_\nu)$ jedes Polygons als Teilmenge enthält.

Für eine Folge einschließender Polygone besteht ein derartiger Satz nicht.

---

*) Dies zeigt Figur 1, wenn man für $\mathfrak{N}$ das Innere des Quadrats und des Dreiecks setzt.

§ 3.

Hilfssätze über die approximierenden Polygonfiguren.

Wie im Beitrag II bewiesen wurde, läßt sich zu jeder abgeschlossenen Menge $\mathfrak{T}$ eine polygonale Figur Π konstruieren, die die Menge $\mathfrak{T}$ in einem gegebenen mittleren Abstand approximiert. Darunter ist zu verstehen, daß die Figur Π ein polygonales Gebiet Σ bestimmt, so daß, wenn $\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{M}$ gesetzt wird, $\mathfrak{T}$ selbst sowie jeder Punkt von $\mathfrak{M}$, dessen Abstand von $\mathfrak{T}$ höchstens $\frac{1}{2}\varepsilon$ beträgt, dem *Inneren* von Σ angehören, während alle Punkte von $\mathfrak{M}$, die von $\mathfrak{T}$ mindestens den Abstand $\frac{3}{2}\varepsilon$ haben, *außerhalb* von Σ liegen.*) In dem Falle, daß $\mathfrak{T}$ eine *zusammenhängende* Menge ist, besitzt die Figur Π einige einfache Eigenschaften, deren wir für das Folgende bedürfen, und die ich hierhersetze. $\mathfrak{M}$ heißt *Komplementärmenge* von $\mathfrak{T}$.

Wenn zunächst die *Komplementärmenge* $\mathfrak{M}$ ein *einziges* zusammenhängendes Gebiet darstellt, so kann es in Π nur ein *einziges äußeres Randpolygon* P_a geben, d. h. ein solches, dessen Äußeres zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Menge $\mathfrak{T}$ innerhalb von P_a liegt, und daher zwei Polygone P_a dieser Art unmöglich sind. Aus der Konstruktionsart der Figur Π folgt nun weiter, daß innerhalb von P_a keine zwei Polygone liegen, von denen das eine das andere einschließt.

Ist $\mathfrak{T}$ eine solche zusammenhängende Menge, für die $\mathfrak{M}$ in *mehrere* Teilgebiete zerfällt, so läßt sich das Vorstehende unmittelbar auf das *äußere* Gebiet $\mathfrak{A}$ übertragen: Ist also Π_a derjenige Teil von Π, der in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, so besteht er ebenfalls aus einem einzigen äußeren Randpolygon P_a und einer endlichen Zahl einander ausschließender Polygone innerhalb von P_a. Diese können auch fehlen.

Ist dagegen $\mathfrak{J}$ ein *inneres* Gebiet, das zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist Π_i die in $\mathfrak{J}$ enthaltene Teilfigur von Π und P_i irgend ein Polygon von Π_i, so gehört sein Inneres gemäß der Konstruktionsart von Π zu $\mathfrak{M}$; daher müssen je zwei zu Π_i gehörige Polygone P_i einander *ausschließen.*

Die große Mannigfaltigkeit der gestaltlichen Verhältnisse, die hier möglich sind, dürfte aus folgendem Beispiel erhellen, bei dem die Menge $\mathfrak{T}$ selbst ein einfaches Polygon ist.

Auf einer Geraden g (Fig. 2) denke man sich eine Folge $\{p_\nu\}$ natürlich geordneter Punkte p_ν, deren Grenzpunkt p sei, errichte in den Punkten p_ν nach oben Lote von der Länge λ_ν, die gegen Null konvergieren, und

*) Im Beitrag II, diese Ann. Bd. 59, S 138, ist $\frac{3}{2}\varepsilon$ durch ε ersetzt; es ist bequemer, die obige Definition von Π zu benutzen.

verbinde die Endpunkte von je zwei benachbarten Loten durch gleichschenklige Dreiecke, deren Höhen h_ν ebenfalls gegen Null konvergieren. Diese Figur spiegele man gegen die Gerade g, so bestimmen die sämtlichen Dreiecke ein einfaches Polygon P.*) Zieht man nun von innen Parallelen zu den Seiten dieses Polygons im Abstand ε, so bestimmen sie ebenfalls eine approximierende Figur, die wir wieder Π nennen, die aber im allgemeinen in mehrere Polygone P_i zerfällt. Die Zahl dieser Polygone kann sogar mit abnehmendem ε über alle Grenzen wachsen, obwohl die von ihnen gebildete Figur Π gegen das eine einfache Polygon P konvergiert. Um dies zu erreichen, wähle man die Intervalle $\delta_\nu = p_\nu p_{\nu+1}$ so, daß

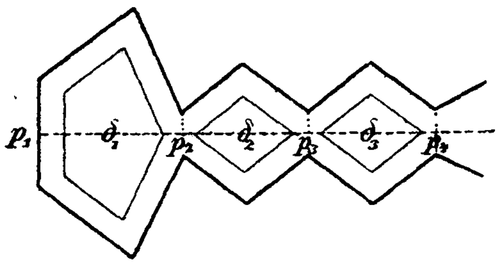

Fig. 2.

$$\delta_2 = \delta_3, \quad \delta_4 = \delta_5 = \delta_6, \quad \delta_7 = \delta_8 = \delta_9 = \delta_{10}, \cdots$$

ist und überdies $\Sigma\delta_\nu$ konvergiert. Ebenso wähle man

$$\lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10}, \cdots$$
$$h_2 = h_3, \quad h_4 = h_5 = h_6, \quad h_7 = h_8 = h_9 = h_{10}, \cdots$$

und kann nun durch geeignete Wahl der δ_μ, λ_μ, h_μ und von ε erreichen, daß in der mit ε konstruierten Figur Π ein Teilpolygon P_i auftritt, das zwischen zwei vorgegebenen benachbarten Punkten der Folge $\{p_\nu\}$ liegt. Ist δ' die Länge des zugehörigen Intervalles, und gibt es ϱ Intervalle δ_ν von der gleichen Länge δ', so gibt es auch mindestens $\varrho - 1$ gleiche Polygone P_i, die zu Π gehören. Die Zahl der Polygone, in die Π zerfällt, wächst also für $\lim \varepsilon = 0$ über alle Grenzen.

§ 4.

Hilfssätze über Gebiete und Gebietsteilung.

Wir bedürfen einiger Sätze über die Zerlegung in Teilgebiete, die ein Gebiet $\mathfrak{M}$ durch *Wege* erfährt. Die Wege nehmen wir im folgenden immer so, daß *keine zwei sich kreuzen.* Daß sich dies für zwei Wege stets bewirken läßt, wurde früher bewiesen**); es ist leicht durch den Schluß von n auf $n+1$ zu zeigen, daß es auch für beliebig viele Wege richtig bleibt, was einer näheren Ausführung nicht bedarf. Würde man jedoch die Wege beliebig annehmen, so würden die Beweise teilweise recht schwerfällig werden. Ich ziehe deshalb vor, mich hier zunächst auf

*) In Fig. 2 ist es stark gezeichnet.

**) Beitrag II, § 1.

Wege *besonderer Art* zu beschränken; es wird sich in § 14 zeigen, daß eine sachliche Beschränkung des Beweisganges darin nicht enthalten ist.

Sei $\mathfrak{T}$ zunächst eine zusammenhängende Menge von der Art, daß die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ ein einziges Gebiet darstellt, und sei Q_ν das äußere Randpolygon der Figur Π_ν. Wir wählen dann die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, die von einem Punkte m, der zum Äußeren von Q_ν gehört, zu zwei Punkten t' und t'' von $\mathfrak{T}$ führen, insbesondere so, daß sie jedes Polygon Q_ν nur *einmal* kreuzen; es ist übrigens klar, daß ein jeder Weg, der von m zu einem Punkte t führt, dadurch in einen solchen Weg verwandelt werden kann, daß man auf Q_ν immer nur den letzten Kreuzungspunkt beibehält und diese Punkte entsprechend verbindet. Seien nun l_ν' und l_ν'' die Kreuzungspunkte von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ mit Q_ν. Sie zerlegen Q_ν in zwei Streckenzüge. Der eine von ihnen bestimmt mit den bezüglichen Teilen von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, nämlich $\mathfrak{l}_\nu' = m \cdots l_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu'' = m \cdots l_\nu''$ ein Polygon, dessen Inneres außerhalb von Q_ν liegt und daher zu $\mathfrak{M}$ gehört. Der zweite Streckenzug bestimmt mit den nämlichen Teilen von $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu''$ ein Polygon, dessen Inneres das Innere von Q_ν enthält und dessen Äußeres zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Das erste Polygon heiße J_ν, das zweite A_ν, und $\mathfrak{q}_\nu^i$ resp. $\mathfrak{q}_\nu^a$ seien die Streckenzüge von Q_ν, die ihnen angehören.

Konstruiert man das Polygon J_ν zu jeder Figur Π_ν, so ist J_ν Teilpolygon von $J_{\nu+1}$, und die J_ν bilden daher eine Folge $\{J_\nu\}$ *ausschließender* Polygone; gemäß § 1 bestimmen sie daher ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}$, das Teilgebiet von $\mathfrak{M}$ ist, und zu dessen Grenze $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ sowie diejenige zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{T}_i$ von $\mathfrak{T}$ gehört, die Grenzmenge aller Streckenzüge $\mathfrak{q}_\nu^i$ ist. Dagegen bilden die Polygone A_ν eine Folge $\{A_\nu\}$ *einschließender* Polygone; sie bestimmen daher ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{A}$, das ebenfalls Teilgebiet von $\mathfrak{M}$ ist, und zu dessen Grenze $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ und die zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}_a$ von $\mathfrak{T}$ gehört, die Grenzmenge aller Streckenzüge $\mathfrak{q}_\nu^a$ ist. Da jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ äußerer Punkt eines Polygons Q_ν ist, so ist er auch, falls er nicht etwa auf $\mathfrak{l}'$ oder $\mathfrak{l}''$ liegt, Punkt von $\mathfrak{J}$ oder von $\mathfrak{A}$; das Gebiet $\mathfrak{M}$ wird also, von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ abgesehen, durch $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ erschöpft. Das Gebiet $\mathfrak{J}$ liegt ganz im Endlichen.

Das Vorstehende überträgt sich leicht auf den Fall, daß die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ von m aus zu demselben Punkt t von $\mathfrak{T}$ führen.

Bezeichnen wir wieder durch $\mathfrak{T}_{ia}$ die gemeinsamen Grenzpunkte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, durch $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_a'$ diejenigen von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ allein, so hat man

$$\mathfrak{T}_i = \mathfrak{T}_{ia} + \mathfrak{T}_i', \quad \mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_{ia} + \mathfrak{T}_a'.$$

Da $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ nicht die volle Grenze von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ bilden, so kann $\mathfrak{T}_{ia}$ nicht Null sein. Solange $\mathfrak{T}$ eine Menge beliebiger Art ist, kann jedoch weiteres *nicht* ausgesagt werden, wie in § 1 hervorgehoben wurde. Die

Mengen $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_a'$ können Null sein, andererseits können $\mathfrak{T}_i$ resp. $\mathfrak{T}_a$ sogar mit $\mathfrak{T}$ identisch sein.*)

Wie leicht ersichtlich, bildet die Menge $\mathfrak{T}_{ai}$ mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zusammen diejenige geschlossene Kurve C, die gemäß § 2 durch die Folge ausschließender Polygone $\{J_\nu\}$ bestimmt wird. Daraus folgern wir noch, daß $\mathfrak{T}_{ia}$ *eine zusammenhängende Menge* ist. Ist nämlich P_ν' ein Polygon, das die Kurve C von innen im Abstand ε_ν approximiert, so kann man auf ihm je einen Punkt p_ν' und p_ν'' bestimmen, der von t' und t'' den kürzesten Abstand hat. Diese Punkte teilen P_ν' in zwei Streckenzüge, und man zeigt leicht, daß der eine von ihnen die beiden Wege $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu''$ als Grenzmenge hat. Der andere, der $\mathfrak{p}_\nu'$ heißen soll, hat daher $\mathfrak{T}_{ia}$ als Grenzmenge, womit die Behauptung erwiesen ist. Das gleiche kann mittels der Polygone Q_ν' geschlossen werden, die die Kurve C von außen approximieren; seien noch $\mathfrak{q}_\nu'$ diejenigen Streckenzüge der Polygone Q_ν', die ebenfalls gegen $\mathfrak{T}_{ia}$ konvergieren.

Hieraus ziehen wir noch eine wichtige Folgerung. Sei t irgend ein von t' und t'' verschiedener Punkt von $\mathfrak{T}_{ia}$, so kann man um ihn ein Quadrat $\mathfrak{q}$ mit der Seite η so legen, daß t' und t'' außerhalb von $\mathfrak{q}$ bleiben; sei dann $\mathfrak{T}_{ia}'$ diejenige Teilmenge von $\mathfrak{T}_{ia}$, die nach Abzug der *innerhalb* $\mathfrak{q}$ liegenden Punkte von $\mathfrak{T}_{ia}$ übrig bleibt. Werden nun die Polygone P_ν' und Q_ν' so gewählt, daß $\varepsilon_\nu < \frac{1}{4}\eta$ ist, so wird $\mathfrak{q}$ sowohl den Streckenzug $\mathfrak{p}_\nu'$ wie den Streckenzug $\mathfrak{q}_\nu'$ kreuzen. Man kann daher einen Weg legen, der zugleich innerhalb von $\mathfrak{q}$ und innerhalb des durch P_ν' und Q_ν' gebildeten Ringgebietes verläuft, und dieser teilt $\mathfrak{T}_{ia}'$ in *getrennte* Teilmengen, deren jede höchstens einen der beiden Punkte t' und t'', aber nicht beide zugleich enthält.

Die vorstehenden Betrachtungen übertragen wir zunächst auf den Fall, daß die Menge $\mathfrak{T}$ eine eigentliche Gebietsteilung bewirkt, und daß $\mathfrak{M}$ deren äußeres Gebiet $\mathfrak{A}$ ist. Genau wie vorstehend kann man mittels zweier Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ und mittels der von außen approximierenden Polygone Q_ν ein im Endlichen liegendes Gebiet $\mathfrak{J}'$ und ein Gebiet $\mathfrak{A}'$ definieren, die zusammen das Gebiet $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ abgesehen, ausmachen; und zwar wird $\mathfrak{J}'$ wieder durch Polygone J_ν bestimmt, die ebenso definiert sind, wie oben, und $\mathfrak{A}'$ durch Polygone A_ν. Auch geht wieder in die Grenze von $\mathfrak{J}'$ und von $\mathfrak{A}'$ je eine zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{T}_i'$ resp. $\mathfrak{T}_a'$ derjenigen Menge $\mathfrak{T}_a$ ein, die volle Grenze des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist.

---

*) Wird von der Kurve $y = \sin 1/x$ nur ein Stück beibehalten, das den Werten $0 < x \leqq x_0$ entspricht, und dies um die y-Achse zwischen den Punkten $+1$ und -1 vermehrt, und werden diese Punkte mit einem Punkte m durch Wege verbunden, so ist entweder $\mathfrak{T}_i$ oder $\mathfrak{T}_a$ mit $\mathfrak{T}$ identisch.

Dagegen kann man in diesem Fall *nicht* mehr folgern, daß $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ durch je eine geschlossene Kurve begrenzt werden. Ein Beispiel erhält man, wenn man in Fig. 1 einen Punkt von $\mathfrak{A}$ so mit zwei Ecken des Quadrats verbindet, daß die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ das Dreieck umschließen. Andererseits aber folgt aus § 2, daß durch die Folge ausschließender Polygone $\{J_\nu\}$ und daher auch durch die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ doch eine geschlossene Kurve definiert wird, der außer $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ noch eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{T}_{12}$ von $\mathfrak{T}_a$ angehört, und deren Inneres das Gebiet $\mathfrak{J}'$ enthält; auch zeigt man wieder, wie vorher, daß $\mathfrak{T}_{12}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}_i'$ ist. In dem eben genannten Beispiel ist $\mathfrak{T}_{12}$ das bezügliche Stück des Quadratumfangs.

Ist ferner $\mathfrak{M}$ mit einem inneren Gebiet $\mathfrak{J}$ einer solchen Gebietsteilung identisch, und ist m wieder ein Punkt von $\mathfrak{J}$, so kann man die Figur Π_ν so wählen, daß m innerhalb eines der inneren Randpolygone P_ν liegt, und die analogen Schlüsse ziehen. Sind jetzt $\mathfrak{p}_\nu'$ und $\mathfrak{p}_\nu''$ die Teile, in die P_ν durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zerfällt, so bestimmen sie in diesem Falle mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zwei Polygone P_ν' und P_ν'', die Teilpolygone von P_ν sind, und deren Inneres zu $\mathfrak{J}$ gehört. Diese Polygone bilden jetzt *je eine ausschließende* Polygonfolge und bestimmen daher zwei im Endlichen liegende Gebiete $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$, die mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zusammen das Gebiet $\mathfrak{J}$ ausmachen.

Auch hier kann man *nicht* folgern, daß $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ durch geschlossene Kurven begrenzt werden. Andererseits bestimmen aber die Polygone P_ν' und P_ν'' gemäß § 2 wieder je eine geschlossene Kurve, der $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, sowie je eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{T}_{12}'$ resp. $\mathfrak{T}_{12}''$ von $\mathfrak{T}$ angehören, und zu deren Innerem $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ gehören. Auch sind wieder $\mathfrak{T}_{12}'$ und $\mathfrak{T}_{12}''$ *zusammenhängende* Teilmengen der zusammenhängenden Mengen $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_i''$, die abgesehen von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die Grenzen von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ ausmachen.

In allen Fällen wird also durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ einerseits ein gewisses Teilgebiet des Gebietes $\mathfrak{M}$ definiert, dem $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ angehören, andererseits auch eine gewisse geschlossene Kurve, so daß zu den Grenzen dieses Gebiets außer $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ stets je eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ gehört.

Da $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zusammen einen das Gebiet $\mathfrak{M}$ durchziehenden Weg darstellen, so gilt der vorstehende Satz auch für solche Wege.

Endlich übertragen sich auch die oben für $\mathfrak{T}_{ia}$ abgeleiteten Folgerungen über ihre Zerfällung in *getrennte* Teilmengen auf $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{T}_{12}'$ resp. $\mathfrak{T}_{12}''$. Für $\mathfrak{T}_a'$, $\mathfrak{T}_i'$, $\mathfrak{T}_i''$ brauchen sie jedoch nicht zu gelten.

§ 5.

Erreichbare und nicht erreichbare Punkte.

Sei $\mathfrak{M}$ irgend ein zusammenhängendes Gebiet und t einer seiner *Grenzpunkte.* Wenn dann von einem Punkt m von $\mathfrak{M}$ ein *einfacher Weg* zu t führt, so gilt dies für *jeden* Punkt von $\mathfrak{M}$, und t soll *erreichbar* für

$\mathfrak{M}$ heißen. Im anderen Fall heißt t *nicht erreichbar* für $\mathfrak{M}$. Ich lass zunächst einige Beispiele folgen.

1) Man konstruiere die sämtlichen Punkte (Fig. 3)

$$x = \frac{1}{\nu}, \quad y = (-1)^\nu \frac{\alpha}{\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots;$$

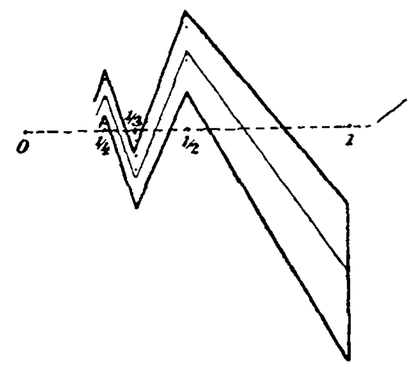

Fig. 3.

wo in der Figur $\alpha < 1$ gewählt worden ist, und verbinde je zwei konsekutive, die zu den Werten ν und $\nu + 1$ gehören, durch Strecken. Diese Strecken bilden einen einfachen Weg mit dem Nullpunkt als Grenzpunkt. Zwei analoge einfache Wege konstruiere man mit den Punkten

$$x = \frac{1}{2\nu}, \quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2\nu+1}, \quad y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu+1}$$

resp. mit den Punkten

$$x = \frac{1}{2\nu}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2\nu+1}, \quad y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu+1},$$

so liefern diese Streckenzüge zusammen mit dem im Punkt $x = 1$ errichteten Lot ein einfaches Polygon. In ihm ist der Nullpunkt ein erreichbarer Punkt, und der zu ihm führende Weg besteht *notwendig* aus unendlich vielen Strecken.

2) Über der Einheitsstrecke zeichne man die Ordinaten der bekannten Funktion $f(x)$, die so definiert ist, daß für die rationalen Werte

$$x = \frac{p}{q}, \quad f(x) = \frac{1}{q}$$

ist, während für alle irrationalen Punkte $f(x) = 0$ ist; p und q sind dabei relativ prim. Ferner konstruiere man das Quadrat $\mathfrak{q}$ über der Einheitsstrecke. Die so bestimmte Punktmenge $\mathfrak{T}$ teilt die Ebene in zwei Gebiete, deren eines im Innern von $\mathfrak{q}$ liegt, und es sind, wie später bewiesen wird, *alle* Punkte der Einheitsstrecke auch für das *Innere* des Quadrats *erreichbare* Punkte. Der zu irgend einem von ihnen führende Weg darf freilich an keine der gezeichneten Ordinaten anstoßen; er vermag dies, indem er unzählig oft bald nach rechts bald nach links hin und her züngelt.*)

3) Auf der Seite s eines Quadrats $\mathfrak{q}$ nehme man einen Punkt p an, und bestimme links und rechts von ihm eine Punktfolge $\{p_\nu\}$ resp. $\{p_\nu'\}$, die p als einzigen Grenzpunkt besitzt. Dann errichte man in den Punkten p_ν und p_ν' auf s im Inneren des Quadrats Lote konstanter Länge, die kleiner als die Quadratseite sind, so bilden diese Lote im Verein mit $\mathfrak{q}$ wieder eine

*) Man kann sogar jedes Lot durch ein Büschel von Strecken gleicher Länge ersetzen.

Punktmenge $\mathfrak{T}$, die eine Gebietsteilung bewirkt, und es ist für das Innere von $\mathfrak{q}$ jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ erreichbar, mit Ausnahme des Punktes p.

4) Man gehe von einer linearen Intervallmenge aus, die eine nirgends dichte perfekte Menge $\mathfrak{S}$ bestimmt, und es sei

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_r + \mathfrak{S}_g,$$

wo $\mathfrak{S}_r$ die Menge aller Intervallendpunkte bedeutet. In allen Punkten von $\mathfrak{S}$ errichte man Lote gleicher Länge nach derselben Seite. Diese Lote bilden eine ebene Menge $\mathfrak{T}$, deren Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ aus einem einzigen Gebiet besteht. $\mathfrak{T}$ ist eine Menge desjenigen Typus, den ich im Beginn von Beitrag II, § 4 untersucht habe. Dann sind alle *inneren* Punkte derjenigen Lote, die in einem Punkte von $\mathfrak{S}_g$ errichtet sind, *unerreichbar*, während alle übrigen Punkte von $\mathfrak{T}$ *erreichbar* sind.

5) Ich gebe endlich ein Beispiel, das zeigt, daß ein Punkt t, der gemeinsamer Grenzpunkt zweier getrennter Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ ist, für das eine erreichbar, für das andere unerreichbar sein kann (Fig. 4)*). Ist nämlich x_0 irgend ein Punkt, in dem die Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$ die positive x-Achse trifft, ist c_0 das Stück dieser Kurve, das den Werten $0 < x \leqq x_0$ entspricht, und verbindet man den Punkt x_0 mit dem Punkt $y = +1$ der y-Achse durch einen Linienzug $\mathfrak{l}$, der das Kurvenstück c_0 nicht kreuzt, so bestimmen $\mathfrak{l}$, c_0 und das Stück der y-Achse zwischen $+1$ und -1 eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$, die die Ebene in zwei Gebiete spaltet, und für das eine sind die Punkte der y-Achse zwischen -1 und $+1$ erreichbar, für das andere nicht.

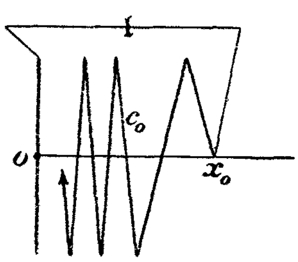

Fig. 4.

Die im folgenden über erreichbare Punkte abzuleitenden Sätze werden sich daher im allgemeinen immer nur auf ein *einziges Gebiet und seine Grenzpunkte* beziehen können. Punkte die für *jedes* Gebiet oder Teilgebiet, zu dessen Grenzen sie gehören können, erreichbar sind, sollen *allseitig erreichbar* genannt werden. Für sie beweisen wir den Satz:

Sind alle Punkte einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar und ist ihre Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ zusammenhängend, so kann man zwei Teilmengen von $\mathfrak{T}$ angeben, die $\mathfrak{T}$ erschöpfen, aber nur einen Punkt gemein haben.

Hierzu schicke ich folgende Bemerkung voraus. Zieht man von m zu einem Punkt t von $\mathfrak{T}$ zwei Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, so daß kein Punkt von $\mathfrak{T}$ außerhalb des von ihnen gebildeten Polygons liegt, so soll es ein *einschließendes Wegpolygon* heißen. Man sieht leicht, daß einschließende Wegpolygone für jeden Punkt der Menge $\mathfrak{T}$ existieren, und daß sie so gezeichnet

*) Die Figur ist nur schematisch gezeichnet.

werden können, daß jeder bereits vorhandene Weg, der von m zu einem von t verschiedenen Punkt von $\mathfrak{T}$ führt, innerhalb dieses Polygons verläuft.

Nun seien t' und t'' irgend zwei Punkte von $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{l}'$ resp. $\mathfrak{l}''$ zwei von m zu ihnen führende Wege. Diese Wege bestimmen gemäß § 3 zwei Teilgebiete von $\mathfrak{M}$, die wir jetzt $\mathfrak{M}_{12}'$ und $\mathfrak{M}_{12}''$ nennen, und es gibt Punkte von $\mathfrak{T}$, die gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{M}_{12}'$ und $\mathfrak{M}_{12}''$ sind und die wir durch $\mathfrak{T}_{12}$ bezeichnen wollen; einer von ihnen sei t_1. $\mathfrak{M}_{12}'$ sei das ganz im Endlichen liegende Gebiet. Da alle Punkte von $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar sind, so können wir von m zu t_1 in $\mathfrak{M}_{12}'$ einen Weg $\mathfrak{l}_1$ legen, ebenso in $\mathfrak{M}_{12}''$ zwei Wege $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$, die ein einschließendes Wegpolygon bilden; gemäß dem Obigen liegen dann $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ und daher auch $\mathfrak{l}_1$ innerhalb dieses Polygons. Daher bilden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1'$, ebenso $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1''$ zwei einfache Polygone P' und P'', die außerhalb voneinander liegen. Sie enthalten daher zwei Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$, die nur den Punkt t_1 gemeinsam haben. Andererseits ist jede von ihnen notwendig zusammenhängend. Wäre z. B. die Menge $\mathfrak{T}'$ nicht zusammenhängend, so zerfiele sie in zwei perfekte Mengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$, und es könnte nur eine von ihnen den Punkt t_1 enthalten. Daher könnte die andere in ein innerhalb P' liegendes Polygon eingeschlossen werden; und es wäre auch $\mathfrak{T}$ selbst nicht zusammenhängend.

§ 6.

Einfache Punktfolge und Ausbiegung.

Sei für ein Gebiet $\mathfrak{M}$

$$\{t^{(\nu)}\} \equiv t', t'', \cdots, t^{(\nu)}, \cdots$$

eine Menge erreichbarer Punkte, die gegen t als ihren einzigen Grenzpunkt in der Weise konvergieren, daß

$$\varrho(t, t^{(\nu+1)}) < \varrho(t, t^{(\nu)})$$

ist.*) Alsdann verbinde man einen Punkt m mit den Punkten $t^{(\nu)}$ durch Wege $\mathfrak{l}^{(\nu)}$, die einander nicht kreuzen, was gemäß § 3 stets ausführbar ist, und schlage um m einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Kreis $\mathfrak{k}$. Dieser Kreis kann von jedem Weg $\mathfrak{l}^{(\nu)}$ nur in einer endlichen Zahl von Punkten geschnitten werden, man kann aber die Wege $\mathfrak{l}^{(\nu)}$ nötigenfalls auch so abändern, daß sie, ohne einander zu kreuzen, $\mathfrak{k}$ nur je einmal schneiden; sei $k^{(\nu)}$ der Kreuzungspunkt. Die Punkte $k^{(\nu)}$ haben mindestens einen auf $\mathfrak{k}$ liegenden Grenzpunkt k. Jedenfalls können wir unendlich viele von den Punkten $k^{(\nu)}$ auswählen, die gegen k von derselben Seite her konvergieren; seien insbesondere

$$k^{(i_1)}, k^{(i_2)}, \cdots, k^{(i_\nu)}, \cdots$$

*) Unter $\varrho(p, q)$ verstehe ich den Abstand der Punkte p und q. Vgl. Beitrag II, § 1.

solche Punkte dieser Art, daß jeder näher an k liegt, als alle vorhergehenden.

Die Indizes $i_1, i_2, \cdots, i_\nu \cdots$ brauchen nicht wachsende Zahlenwerte zu haben. Es gibt aber einen ersten Index i', so daß $i' > i_1$ ist, auf i' folgt ebenso ein erster Index i'', so daß $i'' > i'$ ist usw., und es kann die so definierte Indizesfolge nicht abbrechen. Die zugehörigen Punkte von $\mathfrak{k}$ bezeichnen wir nun durch

$$k_1, k_2, \cdots, k_\mu, \cdots;$$

ihnen entsprechen die Punkte

$$t_1, t_2, \cdots, t_\mu, \cdots$$

und die Wege

$$\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_\mu, \cdots,$$

und diese sind so definiert, daß k_ν zwischen $k_{\nu-1}$ und $k_{\nu+1}$ liegt, also auch $\mathfrak{l}_\nu$ zwischen $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$. Dies führt zu folgendem Satz:

Jeder Punkt t, der zur Grenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes $\mathfrak{M}$ gehört, und Grenzpunkt erreichbarer Punkte von $\mathfrak{T}$ ist, kann in der Weise durch eine Folge $\{t_\nu\}$ erreichbarer Punkte approximiert werden, daß von den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$, die t_ν mit demselben Punkt m von $\mathfrak{M}$ verbinden, immer $\mathfrak{l}_\nu$ zwischen $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ liegt, wenn

$$\varrho(t, t_{\nu-1}) < \varrho(t, t_\nu) < \varrho(t, t_{\nu+1})$$

ist.

Eine solche Punktfolge soll eine *natürlich geordnete* oder eine *einfache* Punktfolge heißen.

Für die Ableitung der Sätze über erreichbare Punkte bedürfen wir noch eines letzten wichtigen Begriffes. Seien nämlich t' und t'' irgend zwei für $\mathfrak{M}$ erreichbare Punkte von $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{w}$ ein in $\mathfrak{M}$ von t' zu t'' gehender Weg. Sei ferner*)

$$\varrho_{ma}(t', \mathfrak{w}) = h', \quad \varrho_{ma}(t'', \mathfrak{w}) = h'',$$

und sei h die größere der beiden Größen h' und h''. Denkt man sich nun *alle* Wege $\mathfrak{w}$, die t' mit t'' in der angegebenen Art verbinden, so gibt es für die zugehörigen Größen h eine *untere Grenze* η, die wir als die zu t' und t'' gehörige *Ausbiegung in bezug auf* $\mathfrak{M}$ bezeichnen wollen. In ähnlicher Weise definieren wir die zu *einem und demselben* Punkt t gehörige Ausbiegung. Sie kommt freilich nur für gewisse Punkte t in Frage. Zeichnen wir nämlich in $\mathfrak{M}$ einen Rückkehrweg $\mathfrak{r}$, der in t seinen Anfangspunkt und Endpunkt hat, und setzen

$$\varrho_{ma}(\mathfrak{r}, t) = g,$$

so wird die untere Grenze aller g ersichtlicherweise den Wert Null haben. Wir nehmen nun aber an, daß es Rückkehrwege $\mathfrak{r}$ gibt, die eine zusammen-

*) ϱ_{ma} t', $\mathfrak{w}$) bezeichnet die *größte* Entfernung zwischen t' und $\mathfrak{w}$.

hängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ einschließen, der t selbst angehört, und fassen insbesondere diejenigen Rückkehrwege ins Auge, die die *umfassendste* derartige Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$ einschließen; darunter ist genauer zu verstehen, daß, falls wir

$$\mathfrak{T} = t + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$$

setzen, *jeder* Punkt von $\mathfrak{T}_1$ aber *kein* Punkt von $\mathfrak{T}_2$ innerhalb eines solchen Rückkehrweges liegen kann, der von t ausgeht.

Für die so definierten Rückkehrwege hat g eine von Null verschiedene untere Grenze γ; sie soll die *zu t selbst gehörige* Ausbiegung heißen. Nur wenn Rückkehrwege dieser Art für t nicht existieren, ist $\gamma = 0$.

Eine unmittelbare Folgerung der obigen Begriffe ergibt sich wie folgt. Seien wieder t' und t'' zwei für den Punkt m erreichbare Punkte, und $\mathfrak{l}'$ resp. $\mathfrak{l}''$ zwei zu ihnen führende Wege. Durch sie wird gemäß § 4 ein im Endlichen enthaltenes Teilgebiet $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{M}$ und eine Teilmenge $\mathfrak{T}_i'$ von $\mathfrak{T}$ definiert, die mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die volle Grenze von $\mathfrak{J}'$ bildet. Gibt es zwei solche Gebiete, so kommt doch, falls t' und t'' zwei Punkte t_ν und $t_{\nu+1}$ der Punktfolge sind, nur eines in Frage. In diesem Gebiet $\mathfrak{J}'$ gibt es Wege $\mathfrak{w}$, die von t' zu t'' führen, und es leuchtet ein, daß die oben mit h bezeichnete Größe für hinlänglich großes ν nur für solche Wege $\mathfrak{w}$ in Betracht kommt, die innerhalb $\mathfrak{J}'$ verlaufen. Daraus folgt dann weiter, daß der Menge $\mathfrak{T}_i'$ Punkte zugehören müssen, deren Entfernung von t' resp. t'' beliebig wenig von η verschieden ist; was einer ausführlicheren Darlegung nicht bedarf.

§ 7.

Sätze über erreichbare Punkte.

Weder die erreichbaren noch die unerreichbaren Punkte bilden abgeschlossene Mengen. Im vierten Beispiel von § 5 ist jeder Endpunkt jedes in einem Punkt von $\mathfrak{S}_g$ errichteten Lotes erreichbar, während die inneren Punkte dieser Lote unerreichbar sind. Daß andrerseits ein unerreichbarer Punkt Grenzpunkt erreichbarer Punkte sein kann, ist nur ein spezieller Fall des folgenden Satzes:

Jeder Punkt der Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes $\mathfrak{M}$, der nicht etwa ein isolierter Punkt der Menge $\mathfrak{T}$ ist, ist Grenzpunkt erreichbarer Punkte.

Dieser Satz, der auch dahin ausgesprochen werden kann, daß die für $\mathfrak{M}$ erreichbaren Punkte *überall dicht in* $\mathfrak{T}$ liegen, läßt sich folgendermaßen beweisen.

Sei t der bezügliche Punkt von $\mathfrak{T}$, so liegen in jeder Nähe von ihm Punkte von $\mathfrak{M}$. Sei m ein solcher Punkt von $\mathfrak{M}$, daß $\varrho(m, t) < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so lege man um t ein durch m gehendes Quadrat $\mathfrak{q}$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Enthält der Umfang $\mathfrak{q}$ Punkte von $\mathfrak{T}$, so gibt es auf $\mathfrak{q}$ ein größtes m einschließendes Intervall, dessen innere Punkte ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehören, und jeder seiner Endpunkte ist ein Punkt t', der von m erreichbar ist, und für den $\varrho(t', t) < \varepsilon$ ist.*) Enthält jedoch $\mathfrak{q}$ keine Punkte von $\mathfrak{T}$, so verkleinere man $\mathfrak{q}$ in der Weise, daß t sein Mittelpunkt bleibt und seine Seiten ihre Richtung behalten;**) es gibt dann, da t kein isolierter Punkt von $\mathfrak{T}$ ist, eine erste Lage $\mathfrak{q}'$ des sich zusammenziehenden Quadrats, die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Andrerseits enthält der Umfang von $\mathfrak{q}'$ notwendig auch Punkte von $\mathfrak{M}$, da sonst t nicht zur Grenze von $\mathfrak{M}$ gehören würde. Ist m' ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Punkt von $\mathfrak{q}'$, so kann man zu ihm wie oben einen Punkt t' von $\mathfrak{q}'$ bestimmen, so daß $\varrho(t, t') < \varepsilon$ und zugleich t' für m' also auch für m erreichbar ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Sei nun $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge, sei η_ν die zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehörige Ausbiegung und γ_ν die zu t_ν selbst gehörige Ausbiegung, so ist zu unterscheiden, ob η_ν und γ_ν mit wachsenden ν gegen Null konvergieren oder nicht; hiermit hängt nämlich die Eigenschaft von t, erreichbar oder unerreichbar zu sein, enge zusammen. Dies bedarf jedoch einer ausführlichen Untersuchung.

Wir leiten zunächst einige Sätze ab, bei denen wir über die Natur der Menge $\mathfrak{T}$, die Grenze des Gebietes $\mathfrak{M}$ ist, keinerlei Voraussetzungen machen, und zwar beweisen wir zuerst den folgenden Satz:

Ist ein nicht isolierter Punkt t für $\mathfrak{M}$ erreichbar, so läßt sich zu ihm eine einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ erreichbarer Punkte bestimmen, deren Ausbiegungen gegen Null konvergieren.

Ist nämlich $\mathfrak{l}$ der zu t führende Weg, so sei m_ν ein solcher Punkt von $\mathfrak{l}$, daß $\varrho(m_\nu, t) < \frac{1}{2}\sigma_\nu$ ist; ferner sei $\mathfrak{l}_\nu$ der von m_ν zu t führende Teil des Weges $\mathfrak{l}$. Man lege wieder, wie oben, um t als Mitte ein Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$, das durch m_ν geht. Gibt es auf ihm Punkte von $\mathfrak{T}$, so gibt es auch ein größtes m_ν einschließendes Intervall, das zu $\mathfrak{M}$ gehört. Jeder seiner Endpunkte t_ν ist wieder ein erreichbarer Punkt, und es ist $\varrho(t, t_\nu) < \sigma_\nu$. Als Weg $\mathfrak{w}_\nu$ kann man daher $\mathfrak{l}_\nu$ nebst dem Intervall $m_\nu \cdots t_\nu$ von $\mathfrak{q}_\nu$ wählen, woraus in diesem Fall die Behauptung folgt. Falls aber auf $\mathfrak{q}_\nu$ kein Punkt von $\mathfrak{T}$ liegt, so möge sich $\mathfrak{q}_\nu$ wie oben um t zusammenziehen; es gibt dann eine Grenzlage, die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ und überdies mindestens einen Punkt m_ν' von $\mathfrak{l}$ enthält, mit dem man ebenso operieren kann, wie soeben mit m_ν.

Wie das dritte Beispiel von § 5 zeigt, trifft die unmittelbare Um-

*) Die beiden Endpunkte des Intervalls können auch zusammenfallen.

**) Vgl. Beitrag I und II, diese Ann. Bd. 58, S. 207 und Bd. 59, S. 132.

kehrung des Satzes nicht zu. Denn sowohl die Folge $\{p_\nu\}$ wie die Folge $\{p_\nu'\}$ dieses Beispiels ist eine einfache Folge und besteht überdies aus lauter erreichbaren Punkten und doch ist p selbst unerreichbar. Wenn dagegen bei *jeder* einfachen Folge erreichbarer Punkte die zugehörigen Ausbiegungen η_ν gegen Null konvergieren, so muß auch t selbst ein erreichbarer Punkt sein. Dies läßt sich folgendermaßen beweisen.

Sei $\{t_\nu\}$ irgend eine derartige Punktfolge, so zeigen wir zunächst, daß die zu den Punkten t_ν selbst gehörigen Ausbiegungen γ_ν gegen Null konvergieren. Sei nämlich t_ν ein Punkt, für den $\gamma_\nu > 0$ ist, so zeichnen wir zunächst den bezüglichen von t_ν ausgehenden Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$, verbinden dann m mit $t_{\nu-1}$ und $t_{\nu+1}$ durch die Wege $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ und ziehen die Wege $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$, die $t_{\nu-1}$ mit t_ν und t_ν mit $t_{\nu+1}$ verbinden. Alle diese Wege lassen sich so wählen, daß sie erstens einander nicht kreuzen und daß zweitens die Wege $\mathfrak{l}_{\nu-1}$, $\mathfrak{l}_{\nu+1}$, $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ ein Polygon $\mathfrak{p}_\nu$ bestimmen, in dem der Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$ enthalten ist, wie man leicht zeigt. Wir ziehen endlich noch von $t_{\nu-1}$ zu $t_{\nu+1}$ einen Weg $\mathfrak{w}_\nu'$, der ebenfalls innerhalb von $\mathfrak{p}_\nu$ verläuft, aber $\mathfrak{r}_\nu$ nicht kreuzt. Setzt man nun

$$\varrho_{ma}(\mathfrak{w}_\nu', t_\nu) = h_\nu', \quad \varrho_{ma}(\mathfrak{w}_\nu', t_{\nu-1}) = h_{\nu-1}', \quad \varrho_{mr}(\mathfrak{w}_\nu', t_{\nu+1}) = h_{\nu+1}',$$

$$\varrho_{ma}(\mathfrak{r}_\nu, t_\nu) = g_\nu, \qquad \varrho(t_{\nu-1}, t_\nu) = r_{\nu-1}, \qquad \varrho(t_{\nu+1}, t_\nu) = r_{\nu+1}$$

so bestehen, wie leicht ersichtlich, die Relationen

$$h_\nu' > g_\nu, \quad h_{\nu-1}' > h_\nu' - r_{\nu-1}, \quad h_{\nu+1}' > h_\nu' - r_{\nu+1}.$$

Hieraus kann aber die Behauptung leicht gefolgert werden. Falls nämlich γ_ν nicht gegen Null konvergierte, so gäbe es unter den Indizes ν unendlich viele Werte μ, so daß $\gamma_\mu > \gamma > 0$ bliebe. Da aber $\lim\limits_{\nu=\infty} r_\nu = 0$ ist, so müßte gemäß den obigen Relationen ersichtlicherweise auch h_μ' und ebenso $h_{\mu-1}'$ und $h_{\mu+1}'$ für alle Werte μ oberhalb einer positiven Größe bleiben und dasselbe würde auch von den unteren Grenzen dieser Größen gelten. Dies widerspricht aber der Voraussetzung. Denn alsdann könnte man aus der Punktfolge $\{t_\nu\}$ eine einfache Folge $\{t_\nu'\}$ so auswählen, daß ihr unendlich viele Punktepaare $t_{\mu-1}$ und $t_{\mu+1}$ als konsekutive Punkte angehörten, und erhielte so eine Punktfolge, für die das zugehörige η_ν' nicht gegen Null konvergierte.

Nunmehr konstruieren wir einen zu t führenden Weg folgendermaßen. Wir gehen wieder zur Punktfolge $\{t_\nu\}$ zurück, konstruieren zu jedem Punkt t_ν, für den $\gamma_\nu > 0$ ist, einen Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$, so daß

$$g_\nu = \varrho_{ma}(\mathfrak{r}_\nu, t_\nu) < \gamma_\nu + \varepsilon_\nu$$

ist, und alle $\mathfrak{r}_\nu$ außerhalb voneinander liegen, und legen alsdann um jeden Punkt t_ν ein Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$ so, daß auch diese Quadrate außerhalb voneinander liegen; um dies zu erreichen, genügt es, die Seite δ_ν dieses Quadrats so zu wählen, daß

$$\delta_\nu < \frac{1}{4}\,\varrho_{mi}(t_\nu, t_\lambda)^{*)}$$

ist, wo t_λ ein beliebiger Punkt der Punktfolge $\{t_\nu\}$ ist, was stets möglich ist Dieses Quadrat kreuzt die oben konstruierten Wege $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ und den eventuellen Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$. Läuft man dann von $t_{\nu-1}$ auf $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ bis zum letzten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{q}_\nu$, dann auf $\mathfrak{q}_\nu$ innerhalb $\mathfrak{p}_\nu$ bis zum ersten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{r}_\nu$, weiter auf $\mathfrak{r}_\nu$ von diesem Punkt bis zum letzten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{q}_\nu$, und zwar ebenfalls innerhalb $\mathfrak{p}_\nu$, weiter auf $\mathfrak{q}_\nu$ wiederum innerhalb $\mathfrak{p}_\nu$ bis zum ersten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{w}_\nu$, endlich auf $\mathfrak{w}_\nu$ bis zum ersten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{q}_{\nu+1}$ usw., so stellen diese Streckenzüge einen einfachen Weg dar, der von $t_{\nu-1}$ zum Punkt t führt. Schlägt man nämlich um t einen Kreis mit dem Radius σ, und wählt N so, daß für $\nu > N$

$$\varrho(t, t_\nu) < \frac{1}{4}\,\sigma, \quad \delta_\nu < \frac{1}{4}\,\sigma, \quad \eta_\nu < \frac{1}{4}\,\sigma, \quad \gamma_\nu < \frac{1}{4}\,\sigma, \quad \varepsilon_\nu < \frac{1}{4}\,\sigma$$

ist, so liegen für alle diese Werte ν sämtliche soeben konstruierten Wegstücke innerhalb dieses Kreises. Daraus folgt, daß t der einzige Grenzpunkt der benutzten Streckenzüge ist. Also folgt:

Wenn für einen Punkt t jede gegen ihn konvergierende einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ erreichbarer Punkte die Eigenschaft hat, daß ihre Ausbiegungen η_ν gegen Null konvergieren, so ist t selbst ein erreichbarer Punkt.

Auch dieser Satz ist nicht umkehrbar. Es gibt erreichbare Punkte, zu denen man einfache Punktfolgen $\{t_\nu\}$ konstruieren kann, deren Ausbiegungen η_ν nicht gegen Null konvergieren; das Beispiel 5) liefert solche Punkte. Jeder Punkt der y-Achse zwischen -1 und $+1$ gehört zu ihnen, falls wir $\mathfrak{T}$ als Grenze des sich ins Unendliche erstreckenden Gebietes betrachten. Von links ist er erreichbar, von rechts aber nicht; als bezügliche einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ kann man den Schnitt von $\mathfrak{T}$ mit einer Parallelen zur x-Achse wählen. Falls man also der Menge $\mathfrak{T}$, die Gebietsgrenze von $\mathfrak{M}$ ist, ihre volle Allgemeinheit läßt, lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für ihre Erreichbarkeit *nicht* aufstellen. Dies bleibt auch bestehen, wenn wir $\mathfrak{T}$ als zusammenhängende Menge allgemeinster Art nehmen, und das letzte Beispiel zeigt sogar, daß es auch dann noch der Fall ist, wenn wir $\mathfrak{T}$ als geschlossene Kurve wählen. Aus diesem Grunde wollen wir die Betrachtung der allgemeineren Mengen $\mathfrak{T}$ hiermit verlassen und zur Erörterung der einfachen geschlossenen Kurve übergehen. Erst für sie bestehen wieder präzisere Resultate. Andrerseits

*) $\varrho_{mi}(t_\nu, t_\lambda)$ bezeichnet die untere Grenze aller Abstände $\varrho(t_\nu, t_\lambda)$.

schienen die vorstehenden allgemeinen Untersuchungen deshalb notwendig zu sein, weil durch sie die nun folgende Beschränkung auf einfache Kurven ihre Begründung erhält.

§ 8.

Einige Eigenschaften der einfachen geschlossenen Kurven.

Den Begriff der *geschlossenen Kurve* habe ich im zweiten Beitrag ausführlich erörtert. Eine zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}$ heißt *geschlossene Kurve*, wenn sie die Ebene so in zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ trennt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ ist. Eine solche Kurve heißt insbesondere *einfach*, falls jeder ihrer Punkte sowohl für $\mathfrak{J}$, wie für $\mathfrak{A}$ erreichbar ist. Für sie ist, wie aus den Sätzen von § 4 folgt, jeder Punkt auch *allseitig* erreichbar. Endlich heißt jede zusammenhängende Teilmenge von ihr ein einfacher *Kurvenbogen*.

Bei einer einfachen geschlossenen Kurve vereinfachen sich die in § 4 abgeleiteten Resultate. Für sie fällt nämlich, wie aus ihrer Definition unmittelbar folgt, die dort eingeführte Unterscheidung zwischen den durch die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ bestimmten Teilgebieten von $\mathfrak{M}$ und den durch sie bestimmten geschlossenen Kurven weg.

Wir beweisen zunächst noch, daß die in § 4 betrachteten Teilmengen $\mathfrak{T}_{12}$ resp. $\mathfrak{T}_{12}'$ und $\mathfrak{T}_{12}''$, die dort durch zwei Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ definiert wurden, durch die Punkte t' und t'' unmittelbar bestimmt sind. Dazu ist zu zeigen, daß diese Mengen von den Wegen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ unabhängig sind. Betrachten wir z. B. das Gebiet $\mathfrak{J}$, bezeichnen jetzt die durch die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ entstehenden Teilgebiete von $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, und durch $\mathfrak{T}'$ resp. $\mathfrak{T}''$ die eben genannten zugehörigen Grenzmengen. Seien dann $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$ irgend zwei andere Wege von m zu t' und t'', $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_1''$ die zugehörigen Teilgebiete und $\mathfrak{T}_1'$ resp. $\mathfrak{T}_1''$ die entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{T}$, so ist zu zeigen, daß $\mathfrak{T}_1'$ mit $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}_1''$ mit $\mathfrak{T}''$ identisch ist. Dazu ändern wir, wenn nötig, die Wege $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$ zunächst so ab, daß $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}_1''$, ebenso $\mathfrak{l}''$ und $\mathfrak{l}_1'$ sich nicht kreuzen; da es sich beidemal nur um eine endliche Zahl von Kreuzungspunkten handeln kann, so ist dies für den Beweis belanglos. Dann bilden $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}_1'$, ebenso $\mathfrak{l}''$ und $\mathfrak{l}_1''$ je eine endliche oder unendliche Menge von Polygonen und gemäß der in § 4 enthaltenen Definition von $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_1''$ stellen diese Polygone die einzigen Gebiete dar, die zu $\mathfrak{M}'$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_1'$ resp. umgekehrt gehören. Seien insbesondere $\mathfrak{p}_\nu$ die Polygone, die zu $\mathfrak{M}'$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_1'$ gehören. Falls es nun einen Punkt t_1 gäbe, der zu $\mathfrak{T}'$, aber nicht zu $\mathfrak{T}_1'$ gehörte, so müßte er Grenzpunkt solcher Punkte sein, die zwar zu $\mathfrak{M}'$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_1'$ gehören, er müßte mithin auch Grenzpunkt von

Punkten sein, die dem Innern der Polygone $\mathfrak{p}_\nu$ angehören. Daraus aber folgert man weiter, daß er sogar selbst dem Innern eines Polygons $\mathfrak{p}_\nu$ angehören müßte, da er nämlich nicht außerhalb aller dieser Polygone liegen kann, und da ihre Umfänge außer t' und t'' keine weiteren Punkte von $\mathfrak{T}$ enthalten. Ein solcher Punkt wäre aber für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$ nicht erreichbar und bedeutet daher einen Widerspruch. Das gleiche folgt für das Gebiet $\mathfrak{A}$, womit der Satz bewiesen ist*).

Die Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ haben in diesem Fall noch eine weitere wichtige Eigenschaft. Sie haben nämlich außer t' und t'' keine weiteren Punkte gemein. Sei $\mathfrak{M}$ wieder das innere Gebiet $\mathfrak{J}$. Wäre nun t_1 ein Punkt, der $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ gemeinsam ist, so läge er einerseits auf der Grenze von $\mathfrak{M}'$ und könnte mit m durch einen Weg $\mathfrak{l}_1'$ innerhalb $\mathfrak{M}'$ verbunden werden; andrerseits läge er auch auf der Grenze von $\mathfrak{M}''$, und es gäbe einen Weg $\mathfrak{l}_1''$, innerhalb $\mathfrak{M}''$, der ihn mit m verbindet. Schlägt man nun um m einen kleinen Kreis, so wird er von $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{l}_1'$, $\mathfrak{l}_1''$ in zwei Punktepaaren getroffen, die einander notwendig trennen. Da nun diese vier Wege nur den Punkt m gemein haben, so bilden $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$ ein einfaches Polygon, von der Art, daß von den beiden Wegen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ nur einer in seinem Innern verläuft; es sei $\mathfrak{l}'$. Es würde also auch t' im Innern dieses Polygons liegen. Andrerseits enthält der Umfang dieses Polygons außer t_1 nur Punkte von $\mathfrak{J}$, es könnte also t' nicht mit äußeren Punkten verbunden werden. Also:

Zwei Punkte t' und t'' einer einfachen geschlossenen Kurve bestimmen zwei einfache Kurvenbögen, die außer t' und t'' keinen Punkt gemein haben.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten in gleicher Weise für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$.

Für $\mathfrak{T}$ als beliebige geschlossene Kurve trifft der Satz nicht mehr zu. Verbindet man z. B. im fünften Beispiel von § 5 einen Punkt von $\mathfrak{A}$ mit den Punkten $+1$ und -1 der y-Achse, so gehören alle Punkte der y-Achse sowohl zu $\mathfrak{T}'$ wie zu $\mathfrak{T}''$. Der obige Beweis läßt erkennen, daß der Grund in der Existenz der nicht erreichbaren Punkte besteht.

§ 9.

Die zyklische Anordnung der Punkte der einfachen geschlossenen Kurve.

Auf einem der beiden Kurvenbögen $\mathfrak{T}'$ oder $\mathfrak{T}''$, die durch t' und t'' bestimmt werden, nehme man einen Punkt t beliebig an, so beweist man ebenso, wie eben, daß auch durch ihn eine weitere Teilung des bezüg-

*) Wählt man dagegen in Fig. 1 (S. 289) den Grenzpunkt von Dreieck und Quadrat als t' und eine Quadratecke als t'', so können die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ das Dreieck sowohl einschließen, wie ausschließen und bestimmen $\mathfrak{T}'$ nicht eindeutig.

lichen Kurvenbogens bewirkt wird, so daß die entstehenden Teile immer nur je einen Punkt gemein haben. Hieraus ziehen wir noch eine wichtige Folgerung, nämlich die folgende:

Auf jede beliebige Menge von Punkten einer einfachen geschlossenen Kurve lassen sich die Axiome und Gesetze der Anordnung übertragen.

Dies ergibt sich unmittelbar wie folgt. Seien wieder $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die Wege, die von m zu den zwei Kurvenpunkten t' und t'' führen, und seien k' und k'' die beiden Punkte, in denen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ einen um m gelegten Kreis schneiden — wir können annehmen, daß es für jeden Weg nur einen Kreuzungspunkt gibt. Verbindet man dann irgend einen Punkt t_1 eines der beiden Kurvenbögen $\mathfrak{T}'$, resp. $\mathfrak{T}''$ mit m, so wird der zugehörige Weg nur in einem der beiden Gebiete $\mathfrak{M}'$ resp. $\mathfrak{M}''$ enthalten sein und daher einen und nur einen der beiden Kreisbogen kreuzen, die durch k' und k'' bestimmt sind. Dies ist aber die notwendige und hinreichende Eigenschaft, vermöge deren die Anordnung, die auf dem Kreis von den Kreuzungspunkten gebildet wird, auf die Wege und von ihnen auf die Kurvenpunkte übertragen werden kann. Insbesondere zeigen also auch die Punkte t_ν einer einfachen Punktfolge die Anordnung, daß t_ν auf der Kurve *zwischen* $t_{\nu-1}$ und $t_{\nu+1}$ liegt. Daraus folgt noch, daß auch t_ν und t durch $t_{\nu-1}$ und $t_{\nu+1}$ getrennt werden. Der Einfachheit halber wollen wir auch von den zugehörigen Wegen $\mathfrak{l}_\nu$ sagen, daß $\mathfrak{l}_\nu$ *zwischen* $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ liegt; bei einer einfachen Punktfolge werden daher auch $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}$ durch $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ getrennt.

Die obigen Sätze konnten auch in der Weise abgeleitet werden, daß man nicht das innere Gebiet, sondern das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$ zum Ausgangspunkt nimmt. Sie führen schließlich noch zu folgender später nötigen Folgerung. Wir verbinden wieder irgend zwei Punkte t' und t'' der Kurve mit einem äußeren Punkt a und einem inneren Punkt m; die bezüglichen Wege seien $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$. Diese Wege bilden ein Polygon P. Verbindet man nun einen Punkt t_1 von $\mathfrak{T}'$ und einen Punkt t_2 von $\mathfrak{T}''$ mit m durch die Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, so werden sie durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ getrennt, es tritt also nur einer von ihnen bei m in das Innere von P, und da dieser Weg mit P keinen Punkt außer m gemein haben kann, liegt er ganz innerhalb P. Daraus folgt, daß von den Mengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ die eine dem Innern und die andere dem Äußeren von P angehört.

Nun sei wieder $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge, seien $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ die Wege, die m und a mit t_ν verbinden, und sei $\mathfrak{T}_\nu$ der Kurvenbogen, der t_ν und $t_{\nu+1}$, aber keinen andern Punkt der Punktfolge enthält. Die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ bilden dann mit $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ ein Polygon L_ν. Wie eben gezeigt, kann $\mathfrak{T}_\nu$ sowohl dem Innern, wie dem Äußeren von L_ν angehören. Sollte das letzte der Fall sein, so ziehen wir von a zu t_ν einen Weg $\mathfrak{a}_\nu'$, der keinen der andern Wege kreuzt, und mit $\mathfrak{a}_\nu$ ein Wegpolygon $\mathfrak{W}_\nu$ bestimmt, das die Menge $\mathfrak{T}$ einschließt; alsdann bestimmt $\mathfrak{a}_\nu'$ mit $\mathfrak{a}_{\nu+1}$, $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ ein Polygon L_ν', das dem Inneren von $\mathfrak{W}_\nu$ und dem Äußeren von L_ν angehört; gemäß unserer Annahme über L_ν muß daher jeder von t_ν und $t_{\nu+1}$ verschiedene Punkt der Punktfolge außerhalb von ihm liegen. Verbindet man nun weiter $t_{\nu+2}$ mit a und m durch die Wege $\mathfrak{a}_{\nu+2}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+2}$, so bilden sie mit $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ ein Polygon $L_{\nu+1}$, das notwendig außerhalb von L_ν resp. L_ν' liegt, und in seinem Innern nur die Teilmenge $\mathfrak{T}_{\nu+1}$ enthält. So weiterschließend gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge einer einfachen geschlossenen Kurve, so lassen sich ihre Punkte mit je einem Punkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ durch Wege so verbinden, daß von den Polygonen, die durch je zwei konsekutive Wege bestimmt werden, ein jedes außerhalb aller übrigen liegt.

Verbinden wir endlich auch t selbst mit m und a durch die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{a}$, so können wir sie dem Vorigen gemäß so wählen, daß der Punkt $t_{\nu+1}$ innerhalb des von ihnen mit $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ gebildeten Polygons $\mathfrak{P}_\nu$ liegt. Da sich aber die Wege $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{l}$ und die Wege $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+2}$ gegenseitig trennen, so folgt nun weiter, daß auch $t_{\nu+2}$ und jedes $t_{\nu+\varrho}$ innerhalb dieses Polygons $\mathfrak{P}_\nu$ liegt.

§ 10.

Die einfachen Punktfolgen der einfachen geschlossenen Kurve.

Bei einer einfachen geschlossenen Kurve hat jede einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ die Eigenschaft, daß die zugehörigen Ausbiegungen η_ν gegen Null konvergieren.

Zum Beweise schicke ich folgende Hilfsbetrachtung voraus. Sei wieder L_ν das Polygon, das von den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ gebildet wird, dessen Inneres also den Kurvenbogen $\mathfrak{T}_\nu$, aber keinen Punkt der Punktfolge $\{t_\nu\}$ enthält, sei τ_ν irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}_\nu$ und sei τ ein Grenzpunkt aller Punkte τ_ν. Dann folgt zunächst, daß τ nicht innerhalb irgend eines Polygons L_ν liegen kann. Setzen wir jetzt

$$\varrho(t_\nu, t_{\nu+1}) = d_\nu, \quad \varrho(t_\nu, \tau_\nu) = r_\nu, \quad \varrho(t_\nu, t) = \sigma_\nu, \quad \varrho(\tau_\nu, \tau) = \sigma_\nu',$$

so ergibt das von t_ν, τ_ν, t und τ gebildete Viereck die Relation

$$\varrho(t, \tau) > r_\nu - \sigma_\nu - \sigma_\nu'. \tag{1}$$

Ebenso erhält man aus dem Viereck der Punkte $t_{\nu+1}$, t, τ_ν, τ

$$\varrho(t, \tau) > r_{\nu+1} - \sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu'. \tag{1a}$$

Denken wir uns nun wieder den Punkt τ_ν auf $\mathfrak{T}_\nu$ veränderlich und setzen*)

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 300.

$$\varrho_{ma}(t_\nu, \mathfrak{T}_\nu) = e_\nu', \quad \varrho_{ma}(t_{\nu+1}, \mathfrak{T}_\nu) = e_\nu'',$$

so kann man einen Punkt τ_ν so auswählen, daß bei beliebig kleinem δ_ν

$$e_\nu' \geqq \varrho(t_\nu, \tau_\nu) > e_\nu' - \delta_\nu$$

ist, und wir erhalten schließlich

(2) $$\varrho(t, \tau) > e_\nu' - \delta_\nu - \sigma_\nu - \sigma_\nu',$$

und ebenso ergibt sich

(2a) $$\varrho(t, \tau) > e_\nu'' - \delta_{\nu+1} - \sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu'.$$

Nun legen wir um die Mitte der Strecke $t_\nu t_{\nu+1}$ ein Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$ mit der Seite s_ν, so daß t_ν und $t_{\nu+1}$ innerhalb von ihm liegen; es wird dann

$$\varrho(t_\nu, \mathfrak{q}_\nu) \geqq \frac{1}{2}(s_\nu - d_\nu) \quad \text{und} \quad \varrho(t_{\nu+1}, \mathfrak{q}_\nu) \geqq \frac{1}{2}(s_\nu - d_\nu)$$

sein. Ist nun e_ν die größere der beiden Größen e_ν' und e_ν'' und wählen wir

$$s_\nu = 2e_\nu + d_\nu,$$

so wird jeder Punkt τ_ν notwendig innerhalb von $\mathfrak{q}_\nu$ liegen. Das gleiche gilt daher für die gesamte Menge $\mathfrak{T}_\nu$. Fassen wir also jetzt dasjenige polygonale Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ ins Auge, das sowohl zum Innern von $\mathfrak{q}_\nu$, wie zum Innern von L_ν gehört, so wird sein Umfang durch t_ν und $t_{\nu+1}$ in zwei Streckenzüge geteilt, die je einen von t_ν zu $t_{\nu+1}$ führenden Weg darstellen, von denen der eine durch $\mathfrak{A}$ und der andere durch $\mathfrak{J}$ führt, und von denen keiner außerhalb $\mathfrak{q}_\nu$ verläuft. Für die Ausbiegung η_ν, die zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehört, besteht daher jedenfalls die Relation

$$\eta_\nu < s_\nu \sqrt{2}; \quad e_\nu + \frac{1}{2} d_\nu > \frac{1}{4}\eta_\nu.$$

Angenommen nun, die Ausbiegungen η_ν konvergierten nicht gegen Null, so gäbe es unendlich viele Werte von η_ν, die größer als eine Größe ϑ bleiben, die nicht Null ist. Man kann dann eine Zahl N so bestimmen, daß für beliebiges ε und unendlich viele Werte $\nu > N$ die Relationen

$$\eta_\nu > \vartheta - \varepsilon, \quad \sigma_\nu < \varepsilon, \quad \sigma_{\nu+1} < \varepsilon, \quad \sigma_\nu' < \varepsilon,$$

bestehen und daß zugleich für *alle* Werte $\nu > N$

$$d_\nu < \varepsilon, \quad \delta_\nu < \varepsilon, \quad \delta_{\nu+1} < \varepsilon$$

ist. Daraus aber erhielte man gemäß (2) und (2a) schließlich

(3) $$\varrho(t, \tau) > \vartheta',$$

wo auch ϑ' eine endliche von Null verschiedene Größe ist. *Wenn also die Ausbiegungen η_ν nicht gegen Null konvergieren, so kann man die Zwischenpunkte τ_ν so wählen, daß die Folgen $\{t_\nu\}$ und $\{\tau_\nu\}$ verschiedene Grenzpunkte bestimmen.*

Man betrachte nun das oben (§ 7) genannte Polygon $\mathfrak{P}_\nu$, das durch die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{a}_\nu$ und die Wege $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{a}$ gebildet wird, die t mit m und a verbinden. Es enthält das Polygon L_ν als Teilpolygon und daher enthält es auch den Punkt τ_ν, ebenso enthält es jeden Punkt $\tau_{\nu+\varrho}$; der Punkt τ kann daher *nicht außerhalb* von $\mathfrak{P}_\nu$ liegen, und da er wegen der letzten Relation nicht in den Umfang dieses Polygons fallen kann, so muß er notwendig in seinem *Inneren* enthalten sein. Man verbinde nun auch τ mit a und m durch je einen Weg α resp. λ, so kann man diese Wege so wählen, daß sie den Umfang von $\mathfrak{P}_\nu$ nicht kreuzen; sie bestimmen mit $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ ein Teilpolygon $\mathfrak{P}_\nu'$ von $\mathfrak{P}_\nu$, so daß t außerhalb dieses Polygons liegt. Man kann daher um t einen Kreis schlagen, der ebenfalls außerhalb dieses Polygons liegt. Im Inneren dieses Kreises liegen aber Punkte der Folge $\{t_\nu\}$. Sei $t_{\nu+\varrho}$ einer von ihnen und $P_{\nu+\varrho}$ das Polygon, das durch die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+\varrho}$ und $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+\varrho}$ bestimmt wird, so muß $\mathfrak{P}_\nu'$ Teilpolygon auch von $P_{\nu+\varrho}$ sein. Das Polygon $P_{\nu+\varrho}$ besteht aber aus einer endlichen Zahl von Polygonen L_ν. Andererseits enthält es dem Vorstehenden gemäß auch den Punkt τ; es müßte daher τ dem Inneren oder dem Umfang eines Polygons L_ν angehören, was aber einen Widerspruch darstellt. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem vorstehenden Beweise ziehen wir noch die Folgerung, daß *der Punkt τ mit t identisch ist.* Ist also $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge und wählt man einen Punkt τ_ν beliebig zwischen t_ν und $t_{\nu+1}$ aus, so bilden auch die Punkte τ_ν eine einfache Punktfolge, die denselben Grenzpunkt besitzt, wie die Folge $\{t_\nu\}$.

§ 11.

Die Abbildung der einfachen geschlossenen Kurve auf den Kreis.

Sei wieder $\mathfrak{T}$ die einfache geschlossene Kurve, sei m ein innerer Punkt von $\mathfrak{T}$ und K ein ihn umgebender kleiner Kreis. Ferner seien

$$P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots$$

irgend welche gegen $\mathfrak{T}$ von innen approximierende Polygone, die sämtlich den Punkt m und den Kreis K einschließen. P_ν approximiere im mittleren Abstande ε_ν, so daß für *jeden* Punkt p von P_ν*)

$$(1)\qquad \frac{3}{2}\varepsilon_\nu > \varrho(p, \mathfrak{T}) \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_\nu$$

ist. Endlich setze man für alle P_ν eine einheitliche positive Umlaufsrichtung fest.

Sei jetzt ϑ_1 der größte Abstand zweier Punkte von P_1. Nimmt man

*) Beiträge II, S. 138. Dort geschieht die Approximation so, daß ε statt $\frac{3}{2}\varepsilon$ steht. Diese Abänderung ist belanglos.

dann eine Größe $s_1 < \vartheta_1$ zunächst beliebig an, so kann man auf P_1 gewisse in positiver Richtung aufeinander folgende Punkte

$$p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$$

bestimmen, so daß für *je zwei konsekutive* Punkte p_i und p_{i+1}

$$(2) \qquad \frac{3}{2} s_1 > \varrho(p_i, p_{i+1}) \geqq \frac{1}{2} s_1$$

ist.*)

Innerhalb P_1 zieht man nun von m zu p_i den Weg $\mathfrak{p}_i$ und zwar so, daß diese Wege den Kreis K in Punkten k_i kreuzen, die ihn in gleiche Teile teilen. Alsdann konstruiere man zu p_i einen sich ins Äußere von P_1 erstreckenden Bereich T_i, der auf seinem Umfange mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Um den Beweis zu vereinfachen, ändern wir jedoch die früher**) angegebene Konstruktion dieses Bereiches dahin ab, daß wir nicht ein um p_i sich dehnendes *Quadrat*, sondern einen sich um p_i dehnenden *Kreis* zugrunde legen. Ist dann t_i ein auf T_i liegender Punkt von $\mathfrak{T}$, so ist für ihn

$$(3) \qquad \varrho(p_i, t_i) = \varrho(p_i, \mathfrak{T}).$$

Verbindet man nun t_i mit p_i durch einen Streckenzug $\mathfrak{w}_i$ innerhalb T_i, so stellt er zusammen mit $\mathfrak{p}_i$ einen einfachen Weg $\mathfrak{l}_i$ endlicher Streckenzahl von m zu t_i dar; wir nehmen ihn und jeden der übrigen Wege überdies so an, daß die in t_i endigende Seite von $\mathfrak{w}_i$ in den Radius $p_i t_i$ fällt. Durch geeignete Wahl ihrer Länge kann dann sicher erreicht werden, daß für *jeden* Punkt m_i dieser Seite ebenfalls

$$\varrho(m_i, t_i) = \varrho(m_i, \mathfrak{T})$$

ist; was für den folgenden Beweis nötig ist.

Bei geeigneter Wahl von ε_1 und s_1 können die Wege $\mathfrak{l}_i$ *einander nicht kreuzen.* Um dies nachzuweisen, ist zu zeigen, daß bei geeigneter

---

*) Um dies in aller Form auszuführen, nimmt man p_1 auf P_1 beliebig an, schlägt um p_1 einen Kreis mit s_1 und nennt seinen *ersten* Schnittpunkt mit dem in positiver Richtung durchlaufenen Polygon p_2. Denkt man sich dann den bezüglichen Streckenzug $p_1 \cdots p_2$ von P_1 getilgt, so bleibt ein Streckenzug $p_2 \cdots p_1$, mit dem man von p_2 aus ebenso verfährt. So fährt man fort, bis der letzte Kreis den noch übrigen Streckenzug $p_n \cdots p_1$ ganz einschließt. Ist nun $\varrho(p_n, p_1) \geqq \frac{1}{2} s_1$, so behält man p_n bei, ist aber $\varrho(p_n, p_1) < \frac{1}{2} s_1$, so wählt man p_{n-1} als letzten Teilpunkt und es ist $\varrho(p_{n-1}, p_1) < \frac{3}{2} s_1$.

**) Vgl. die Anmerkung **) auf S. 302.

Wahl von ε_1 und s_1 *je zwei* Bereiche T_i und T_k außerhalb voneinander liegen*), und zwar wird dies sicher erreicht, falls man

$$s_1 > 16\varepsilon_1 \tag{4}$$

wählt. Zunächst folgt leicht, daß der Bereich T_i außerhalb von T_{i+1} liegt und daß ein Bereich T_k nicht an zwei Bereiche T_i und T_{i+1} anstoßen oder mit ihnen Teile gemein haben kann. Ist nämlich δ' der kleinste Radius dieser Bereiche, so würde sonst

$$\varrho(p_i, p_{i+1}) \leqq 2\delta', \text{ resp. } \varrho(p_i, p_{i+1}) \leqq 4\delta'$$

sein und dies steht wegen $\delta' < \frac{3}{2}\varepsilon_1$ mit der aus (2) und (4) folgenden Relation

$$\varrho(p_i, p_{i+1}) \geqq \frac{1}{2} s_1 > 8\varepsilon_1$$

im Widerspruch.

Angenommen nun, es liegen nicht alle Bereiche T_i außerhalb voneinander, so wollen wir sie sämtlich gleichzeitig um die Punkte p_i entstehen lassen, so daß sie stets denselben Radius haben, bis irgend zwei aneinander stoßen. Die so gebildeten Bereiche seien T_i', wo die T_i' mit den T_i identisch sind oder nur Teile der T_i, und es seien T_i' und T_k', wo $k > i$, zwei aneinandergrenzende Bereiche. Ist dann p' der ihnen gemeinsame Punkt, sind $\mathfrak{l}_i'$ und $\mathfrak{l}_k'$ zwei Wege, die innerhalb T_i' und T_k' von p' zu p_i und p_k führen, und sind $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ die Wege von m zu p_i und p_k, so kann keiner dieser Wege einen der Bereiche T_h' kreuzen; jeder dieser Bereiche liegt also außerhalb oder innerhalb des einfachen Polygons $\mathfrak{P}$, das von den vier Wegen gebildet wird, und dasselbe gilt von den Wegen $\mathfrak{p}_h$, die von m zu p_h führen. Andererseits müßte es aber wegen der zyklischen Anordnung der Punkte p_i innerhalb wie außerhalb dieses Polygons $\mathfrak{P}$ Wege $\mathfrak{p}_h$ und damit auch Bereiche T_h' wirklich geben. Wir nehmen an, es mögen alle Bereiche T_h', für die $i < h < k$ ist, innerhalb $\mathfrak{P}$ liegen, so ist dadurch nur die Bezeichnung festgelegt, und es liegt T'_{i+1} innerhalb von $\mathfrak{P}$. Aus dem Vorstehenden folgert man nun weiter, daß dann auch T_{i+1} selbst ganz innerhalb $\mathfrak{P}$ liegt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte T_{i+1} entweder T_i' oder T_k' oder beide Bereiche kreuzen; jede dieser Annahmen führte aber, wie leicht ersichtlich, auf einen Widerspruch gegen die oben gezogene Folgerung, daß weder T_i und T_{i+1} noch auch T_k mit T_i und T_{i+1} Punkte gemein haben. Daher müßte T_{i+1} innerhalb von $\mathfrak{P}$ liegen. Das Polygon $\mathfrak{P}$ umschließt alsdann auch den Punkt t_{i+1} von T_{i+1}. Dies ist aber unmöglich, gleichgültig ob der Punkt p' zu $\mathfrak{T}$ gehört oder zu $\mathfrak{J}$, woraus die Behauptung folgt.

---

*) In dem Umstande, daß dies für je zwei Bereiche T_i und T_k nachzuweisen ist, liegt die Notwendigkeit eines ausführlichen Beweises.

Aus den Relationen (1) und (3) folgern wir noch

$$\frac{3}{2}\varepsilon_1 > \varrho(p_i, t_i) \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_1,$$

und wenn man noch $\varrho(t_i, t_{i+1}) = r_i$ setzt, so folgt aus dem Viereck der Punkte $p_i, p_{i+1}, t_i, t_{i+1}$ mittels (2)

$$(5) \qquad \frac{3}{2}s_1 + 3\varepsilon_1 > r_i > \frac{1}{2}s_1 - 3\varepsilon_1.$$

Aus der Reihe der Polygone P_ν bestimmt man jetzt ein im Abstand ε_2 approximierendes Polygon P_2' folgendermaßen. Man nehme zunächst

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\varepsilon_1$$

beliebig an, überdies aber soll, wenn p_{i0} der *letzte* Kreuzungspunkt des Weges $\mathfrak{l}_i$ mit dem Polygon P_2' ist,

$$\varrho(p_{i0}, t_i) = \varrho(p_{i0}, \mathfrak{T})$$

sein. Gemäß der obigen Festsetzung wird dies sicher erfüllt sein, wenn p_{i0} in diejenige Seite des Weges $\mathfrak{l}_i$ fällt, die in t_i endigt. Es ist dann

$$\frac{3}{2}\varepsilon_2 > \varrho(p_{i0}, t_i) \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}\varepsilon_2 > \varrho(p_{i+1,0}, t_{i+1}),$$

und daher folgt für die Entfernung der Punkte p_{i0} und $p_{i+1,0}$, die in den Bereichen T_i und T_{i+1} liegen,

$$(6) \qquad r_i + 3\varepsilon_2 > \varrho(p_{i0}, p_{i+1,0}) > r_i - 3\varepsilon_2.$$

Man nehme nun eine Größe $s_2 \leqq \frac{1}{3}s_1$ zunächst beliebig an und bestimme auf dem Streckenzuge $p_{i0} \cdots p_{i+1,0}$ wiederum die Punkte

$$p_{i0}, p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{i\mu}, p_{i+1,0}$$

in der Weise, daß für je zwei konsekutive

$$\frac{3}{2}s_2 > \varrho(p_{ik}, p_{i,k+1}) \geqq \frac{1}{2}s_2$$

ist, und konstruiere zu jedem dieser Punkte p_{ik} den Bereich T_{ik}. Dieser liefert einen Punkt t_{ik}, so daß für jeden Punkt p_{ik}

$$\frac{3}{2}\varepsilon_2 > \varrho(p_{ik}, t_{ik}) \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_2$$

ist; und hieraus folgt wiederum, falls noch $\varrho(t_{ik}, t_{i,k+1}) = r_{ik}$ gesetzt wird,

$$(7) \qquad \frac{3}{2}s_2 + 3\varepsilon_2 > r_{ik} > \frac{1}{2}s_2 - 3\varepsilon_2.$$

Nun ziehe man wieder für jeden neu entstandenen Punkt p_{ik} den Weg $\mathfrak{l}_{ik}$, der von m über p_{ik} zu t_{ik} führt und zwar so, daß auf dem Kreise K, der m umgibt, jeder bereits vorhandene Kreisbogen durch die neuen Teil-punkte k_{ik} in gleiche Teile zerlegt wird und daß auch die Wege $\mathfrak{l}_{ik}$ der oben für die Wege $\mathfrak{l}_i$ getroffenen Festsetzung genügen. Alle diese Wege haben alsdann endliche Streckenzahl und man beweist, wie oben, daß, wenn man

$$s_2 > 16\,\varepsilon_2$$

wählt, keine zwei dieser Wege einander kreuzen. Sie folgen überdies in derselben Weise aufeinander, wie die Punkte p_{ik} auf dem Umfange von P_2 resp. die Punkte k_{ik} auf dem Kreise K.

In dieser Weise kann man fortfahren. Hat man das Polygon P_ν' konstruiert, mit den Punkten p_N und t_N, wo N eine Abkürzung für ν Indizes ist, und den zu ihnen führenden Wegen $\mathfrak{l}_N$, die auf dem Kreise K die Punkte k_N bestimmen und der obigen Festsetzung unterliegen, so nimmt man unter den approximierenden Polygonen P_ν ein solches als $P'_{\nu+1}$, daß man

(8) $$\varepsilon_{\nu+1} < \frac{1}{3}\,\varepsilon_\nu$$

wählt und daß, wenn p_{N0} der *letzte* Kreuzungspunkt des Weges $\mathfrak{l}_N$ mit $P'_{\nu+1}$ ist,

$$\varrho(p_{N0},\, t_N) = \varrho(p_{N0},\, \mathfrak{T})$$

ist. Ferner sei p'_N ein dem Punkte p_N benachbarter Punkt auf P_ν', so hat man wieder

(9) $$r_N + 3\,\varepsilon_{\nu+1} > \varrho(p_{N0},\, p'_{N0}) > r_N - 3\,\varepsilon_{\nu+1},$$

und man bestimmt nun auf dem Streckenzuge $p_{N0} \cdots p'_{N0}$ wiederum die Punkte

$$p_{N0},\, p_{N1},\, \cdots,\, p_{N\varrho},\, p'_{N0}$$

in der Weise, daß für je zwei konsekutive

$$\frac{3}{2}\,s_{\nu+1} > \varrho(p_{Ni},\, p_{N,i+1}) \geqq \frac{1}{2}\,s_{\nu+1}$$

ist, wo

(10) $$s_{\nu+1} < \frac{1}{3}\,s_\nu$$

gewählt ist. Diese Punkte p_{Ni} liefern dann wieder die Punkte t_{Ni}, und man hat, wenn man $\varrho(t_{Ni},\, t_{N,i+1}) = r_{Ni}$ setzt, für *jeden* dieser Punkte t_{Ni}

(11) $$\frac{3}{2}\,s_{\nu+1} + 3\,\varepsilon_{\nu+1} > r_{Ni} > \frac{1}{2}\,s_{\nu+1} - 3\,\varepsilon_{\nu+1}.$$

Zieht man dann wieder zu jedem neu entstandenen Punkte t_{Ni} den Weg $\mathfrak{l}_{Ni}$ von m über p_{Ni}, so haben alle diese Wege endliche Seitenzahl, und wenn man

(12) $$s_{\nu+1} > 16\,\varepsilon_{\nu+1}$$

wählt, so werden keine zwei sich kreuzen und alle in derselben Weise aufeinander folgen, wie die Punkte p_{Ni} auf $P'_{\nu+1}$, resp. die Punkte k_{Ni} auf K; diese teilen zugleich einen jeden bereits vorhandenen Bogen des Kreises K in gleiche Teile.

Es fragt sich jetzt nur noch, ob die vorstehenden Bedingungen so zu erfüllen sind, daß die Punkte t_N schließlich überall dicht auf der Kurve liegen. Dazu muß zunächst mit limes $\varepsilon_\nu = 0$ auch limes $r_N = 0$ werden, und zwar für je zwei benachbarte Punkte t_N und t'_N. Dies kann auf mannigfache Weise geschehen. Dazu wähle man z. B. ε_1 irgendwie der Relation (4) entsprechend, was immer möglich ist, und setze

$$(13) \qquad \varepsilon_{\nu+1} = \frac{1}{a}\,\varepsilon_\nu, \quad s_{\nu+1} = \frac{1}{b}\,s_\nu,$$

wo, den Relationen (8) und (10) gemäß, $a \geqq 3$ und $b \geqq 3$ zu wählen ist. Ferner hat man

$$(13) \qquad \frac{3}{2}\,\frac{s_1}{b^{\nu-1}} + \frac{3}{a^{\nu-1}}\,\varepsilon_1 > r_N > \frac{1}{2}\cdot\frac{s_1}{b^{\nu-1}} - \frac{3}{a^{\nu-1}}\,\varepsilon_1.$$

Wird also noch $a \geqq b$ angenommen, so bewirkt dies, daß alle Relationen (12) erfüllt sind, daß auch alle $r_N > 0$ sind, und daß r_N mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Die Punkte $\{t_N\}$ bilden dann, wie wir sehen werden, eine auf $\mathfrak{T}$ überall dichte Menge; sie sei $\mathfrak{T}_r$. Andererseits ist auch die auf dem Kreise liegende Menge $K_r = \{k_N\}$ eine überall dichte Menge, und es sind die Mengen $\mathfrak{T}_r$ und K_r eineindeutig aufeinander bezogen.*)

Sei nun k irgend ein Punkt von K, und $\{k^{(\nu)}\}$ eine gegen ihn konvergierende *einfache* Folge, deren Punkte zu K_r gehören, so entsprechen ihr Punkte $\{t^{(\nu)}\}$, die dieselbe Anordnung besitzen, wie die Punkte $k^{(\nu)}$. Falls nun diese Punkte nicht einen einzigen Grenzpunkt haben sollten, so kann man aus ihnen wie in § 6, durch Tilgung gewisser Punkte eine *einfache* Folge herausheben, die einen einzigen Grenzpunkt t besitzt. Sie sei $\{t_\nu\}$, so ist auch ihr Bild $\{k_\nu\}$ auf K eine einfache Folge. Ersetzt man nun $\{k_\nu\}$ durch eine Folge $\{k_\nu'\}$, die von derselben Seite gegen k konvergiert, und liegt k_ν' zwischen den Punkten k_λ und k_μ, so liegt auch t_ν' zwischen t_λ und t_μ; gemäß dem Schlußsatz von § 10 konvergiert also auch $\{t_\nu'\}$ gegen t. Dies gilt für jede derartige Folge $\{k_\nu'\}$. Es haben daher alle derartigen Folgen $\{t_\nu'\}$ einen und denselben Grenzpunkt und daraus folgt weiter, daß auch die Punkte $t^{(\nu)}$ nur einen Grenzpunkt besitzen, nämlich t.

---

*) Durch geeignete Wahl von a und b kann man sogar erreichen, daß beim Fortgang von P_ν zu $P_{\nu+1}$ zwischen *je* zwei Punkten k_N ein neuer Teilpunkt liegt, was aus den obigen Relationen leicht hervorgeht. Durch $a > b$ wird auch erreicht, daß für *jede* Indizesgruppe $r_N > r_{Ni}$ ist.

Es ist nur noch zu zeigen, daß, wenn man zu k eine Folge $\{k_\nu''\}$ konstruiert, die von der entgegengesetzten Seite gegen k konvergiert, auch $\{t_\nu''\}$ gegen t konvergiert.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so sei t'' der Grenzpunkt dieser Folge. Um die Begriffe zu fixieren, werde nun angenommen, daß die Folge $\{k_\nu\}$ gegen k von links, die Folge $\{k_\nu''\}$ gegen k von rechts konvergiert, das gleiche gilt dann auch bezüglich t und t''. Nun sind zwei Fälle möglich. Zunächst könnte t'' rechts von t liegen. Dann gibt es *mehrere* Punkte t_r von $\mathfrak{T}_r$, die links von t' und rechts von t liegen. Nimmt man nun einen Punkt t_ϱ der ersten und einen Punkt t_σ'' der zweiten Folge beliebig an, so würde auch jeder derartige Punkt t_r links von t_σ'' und rechts von t_ϱ liegen; es müßte also auch Punkte k_r auf K geben, die die gleiche Lage zu je zwei Punkten k_ϱ und k_σ'' besitzen. Von solchen Punkten gibt es aber auf K nur einen, nämlich k selbst; die obige Annahme ist daher unmöglich. Zweitens könnte t'' links von t liegen; dies führte aber in ähnlicher Weise auf die Folgerung, daß es einen Punkt k_r gäbe, der sowohl rechts wie links von k liegen müßte, was ebenfalls unmöglich ist.

Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{T}_r$ in der Tat auf $\mathfrak{T}$ überall dicht ist, daß jedem Punkt k von K ein und nur ein Punkt t von $\mathfrak{T}$ entspricht, überdies jeder Folge, die gegen k konvergiert, eine Folge, die gegen t konvergiert. Damit ist aber bekanntlich der Beweis der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung erbracht.

§ 12.

Die Erweiterung des Jordanschen Satzes.

Der Satz des Herrn Jordan besagt, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises eine geschlossene Kurve ist. Dieser Satz bedarf aber einer Erweiterung. Die Erweiterung besteht darin, daß sämtliche Punkte der Kurve für das äußere und innere Gebiet *erreichbare* Punkte sind; d. h. das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises ist eine *einfache* geschlossene Kurve.

Bei der Fragestellung, die hier zugrunde gelegt ist, ist diese Eigenschaft sogar die Hauptsache; erst sie führt uns dazu, die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung einer Punktmenge auf den Kreis zu erkennen.

Der Beweis unseres Satzes ergibt sich, nachdem wir die allgemeine Untersuchung der ebenen perfekten Mengen vorausgeschickt haben, fast unmittelbar. Er geht so vor sich, daß wir innerhalb der Gesamtheit aller ebenen Mengen die einfache geschlossene Kurve als das einzig mögliche Abbild des Kreises erkennen werden.

Da die Eigenschaften *perfekt* und *zusammenhängend* unserer Abbildung gegenüber invariant sind, so ist, wie der Kreis K, auch sein Abbild $\mathfrak{T}$ eine perfekte, zusammenhängende Menge. Sie muß aber mit dem Kreise auch die Eigenschaft teilen, nirgends dicht zu sein. Wäre sie nämlich in der Umgebung eines Punktes t überall dicht, so gäbe es ein den Punkt t einschließendes Quadrat, das ebenfalls zu $\mathfrak{T}$ gehörte. Das Abbild dieses Quadrates müßte wieder eine *zusammenhängende* Teilmenge des Kreises sein, d. h. ein Kreisbogen. Dies ist aber unmöglich; denn ein Kreisbogen kann ebensowenig wie die Strecke umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Quadrates sein.*)

Wir zeigen nun weiter, daß alle Punkte von $\mathfrak{T}$ *allseitig erreichbar* sind. Dies ist das einzige, was einer längeren Darlegung bedarf. Dazu schicken wir eine Hilfsbetrachtung voraus.

Seien t' und t'' zwei Punkte von $\mathfrak{T}$, die für irgend ein Gebiet $\mathfrak{M}$ erreichbar sind, $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die von m zu ihnen führenden Wege, und k' und k'' ihre Bildpunkte auf K. Gemäß § 4 wird durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ eine geschlossene Kurve definiert, der außer $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ eine gewisse *zusammenhängende* Teilmenge $\mathfrak{T}_{12}$ von $\mathfrak{T}$ angehört. Dieser Menge muß eine zusammenhängende Teilmenge K_{12} des Kreises entsprechen, der k' und k'' angehören; daher muß K_{12} einen der beiden durch k' und k'' bestimmten Teilbögen von K ganz enthalten; er sei K_1. Sie kann aber auch keinen Punkt des anderen Kreisbogens K_2 enthalten. Wäre dies der Fall, wäre k_2 ein solcher Punkt und t_2 sein Bildpunkt in $\mathfrak{T}_{12}$, so lege man um t_2 ein die Punkte t' und t'' ausschließendes kleines Quadrat $\mathfrak{q}$. Durch Tilgung der in $\mathfrak{q}$ enthaltenen Punkte entstehen gemäß § 4 aus $\mathfrak{T}_{12}$ gewisse *getrennte* Teilmengen, deren jede höchstens nur einen der beiden Punkte t' und t'' enthält. Wegen der Stetigkeit kann man aber das Quadrat $\mathfrak{q}$ so klein wählen, daß den innerhalb von $\mathfrak{q}$ liegenden Punkten von $\mathfrak{T}_{12}$ lauter Bildpunkte entsprechen, die sämtlich auf dem Bogen K_2 liegen. Nach Wegnahme dieser Punkte bleibt daher in K_{12} eine zusammenhängende Teilmenge übrig, der sowohl k' wie k'' angehören, und dies bedeutet einen Widerspruch.

Angenommen nun, t sei ein Grenzpunkt eines Gebietes $\mathfrak{M}$, der für dies Gebiet nicht erreichbar ist, so gibt es eine gegen ihn konvergierende Folge $\{t_\nu\}$, deren Ausbiegungen η_ν nicht gegen Null konvergieren. Diese Folgen können wir uns zunächst von überflüssigen Punkten gereinigt denken; d. h. wir können aus ihr, falls nötig, Punkte so weglassen, daß bei gegebenem N für *alle* $\nu > N$ *jedes* $\eta_\nu > \lambda > 0$ bleibt. Daß dies möglich ist, geht aus den Begriffen der Folge und der Ausbiegung unmittelbar hervor.

*) Vgl. § 14. Hilfssatz.

Wir wählen nun m innerhalb $\mathfrak{M}$ beliebig und ziehen von m zu den Punkten t_ν die Wege $\mathfrak{l}_\nu$. Sei dann k_ν der auf K liegende Bildpunkt von t_ν, so haben wegen der Stetigkeit die Punkte $\{k_\nu\}$ einen und nur einen Grenzpunkt k, der zugleich Bildpunkt von t ist. Sollten nun die Punkte k_ν auf k keine einfache Folge bilden, so können wir doch analog wie in § 6 eine in ihnen enthaltene Folge $\{k_\nu'\}$ bestimmen von der Art, daß auch die ihnen entsprechenden Punkte t_ν' eine einfache Folge $\{t_\nu'\}$ bilden, und es wird nun auch für diese Punkte *jedes* $\eta_\nu' > \lambda' > 0$ sein, falls $\nu > N'$ gewählt wird.

Gemäß § 4 bestimmen die Wege $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}'$ ein Teilgebiet $\mathfrak{M}_\nu$ von $\mathfrak{M}$ und definieren eine gewisse Menge $\mathfrak{T}_\nu$, deren Punkte zu der durch $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu''$ bestimmten *geschlossenen Kurve* gehören. Ihr entspricht, wie wir eben bewiesen haben, einer der beiden durch k_ν' und $k_{\nu+1}'$ bestimmten Kreisbogen, und da die Punkte k_ν' eine einfache Folge bilden, so müssen es auch diese Kreisbogen tun. Wäre nun t für $\mathfrak{M}$ nicht erreichbar, so könnte man gemäß § 8 auf den Teilmengen $\mathfrak{T}_\nu'$ Punkte τ_ν so auswählen, daß sie einen von t verschiedenen Grenzpunkt haben; es müßten also auch die Bildpunkte auf den Kreisbögen K_ν' einen von k verschiedenen Grenzpunkt besitzen, was unmöglich ist.

Es handelt sich jetzt noch darum, aus der Gesamtheit der ebenen nirgends dichten zusammenhängenden Mengen diejenigen herauszusuchen, die Abbild des Kreises sein können, und zwar ist dabei nur noch die von ihnen bewirkte Gebietsteilung zu berücksichtigen. Die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$ könnte an sich zunächst ein einziges Gebiet darstellen. Dies ist aber ausgeschlossen. Denn gemäß § 5 ist eine solche Menge in zwei Teilmengen zerlegbar, die nur *einen* gemeinsamen Punkt besitzen, was für den Kreis nicht zutrifft.

Sei nun $\mathfrak{A}$ das äußere Teilgebiet von $\mathfrak{M}$ und C diejenige Teilmenge von $\mathfrak{T}$, deren Punkte sämtlich zur Grenze von $\mathfrak{A}$ gehören, aber nicht Grenzpunkte von $\mathfrak{A}$ allein sind; ferner seien c_1 und c_2 zwei Punkte von C. Sie definieren gemäß § 8 zwei Kurvenbogen c_{12} und c_{12}', deren jedem wieder einer der beiden Kreisbögen entsprechen muß, die durch die Bildpunkte k_1 und k_2 bestimmt werden. Daraus folgt aber, daß die Kurve C die Menge $\mathfrak{T}$ erschöpft, also mit ihr identisch ist. Damit ist der Satz bewiesen und es folgt also:

Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises ist eine einfache geschlossene Kurve.

Als *einfachen Kurvenbogen* habe ich oben jede zusammenhängende Teilmenge einer einfachen geschlossenen Kurve definiert; es folgt daraus, daß *jeder einfache Kurvenbogen Bildmenge eines Kreisbogens* ist. Dies ist wiederum umkehrbar, d. h. es gilt der Satz:

Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines Kreisbogens ist ein einfacher Kurvenbogen.

Um dies zu beweisen, ist zu zeigen, daß man eine einfache geschlossene Kurve angeben kann, die Bild eines Kreises ist, und von der die bezügliche Bildmenge eine zusammenhängende Teilmenge ist. Sei $\mathfrak{T}$ diese Bildmenge, K' der Kreisbogen, und k_1 resp. k_2 seine Endpunkte. Zunächst folgt, wie beim Beweis des Hauptsatzes, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar ist. Ferner muß die Komplementärmenge von $\mathfrak{T}$ ein *einziges* Gebiet sein. Denn sonst gäbe es in $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Kurve und ihr müßte K oder ein Teil von K', also jedenfalls ein Kreisbogen entsprechen, was unmöglich ist. Man kann daher von *demselben* Punkte m zu den Bildpunkten t_1 und t_2 von k_1 und k_2 zwei Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ legen. Diese kann man umkehrbar eindeutig und stetig auf den Komplementärbogen des Kreisbogens K' abbilden. Sie stellen zusammen mit $\mathfrak{T}$ eine Menge dar, die Bild eines Kreises, also eine geschlossene einfache Kurve ist, womit die Behauptung erwiesen ist.

Man kann noch fragen, welche rein mengentheoretischen Kriterien dafür bestehen, daß eine Menge $\mathfrak{T}$, deren Komplementärmenge ein einziges Gebiet $\mathfrak{M}$ ist, ein einfacher Kurvenbogen ist. Dies wird dann der Fall sein, wenn jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ ebenfalls ein einfacher Kurvenbogen ist.*)

§ 13.

Herstellung von ebenen Abbildungen bei gegebenem Entsprechen zweier Kurven.

Für den Beweis der vorstehenden Sätze haben wir uns in § 4 die Beschränkung auferlegt, nur polygonale Wege einfachster Art zu benutzen. Hiervon müssen wir uns freimachen; alle für solche Wege abgeleiteten Sätze müssen auf beliebige einfache Kurvenbögen ausgedehnt werden. Um dies auszuführen, bedürfen wir eines Satzes, der besagt, daß man die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung zweier einfachen *Kurven* zu einer ebenfalls umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung für jeden beliebigen *Teil der Ebene* erweitern kann, und zwar so, daß auch für die erweiterte Abbildung diejenige der beiden Kurven bestehen bleibt.

Ich schicke dazu zwei einfache Hilfsbetrachtungen voran. Sei erstens P ein Polygon, das konkave Ecken hat. Verlängert man eine Seite, die in einer konkaven Ecke endigt, in das Innere von P, so zerfällt P in zwei Polygone, deren jedes mindestens eine Ecke weniger hat als P. Es

*) Vgl. meine Note in den Gött. Nachr. 1904.

kann daher P in eine endliche Zahl von Polygonen ohne konkave Ecken zerlegt werden.

Sind zweitens P und Q irgend zwei *konvexe* Polygone, die keineswegs gleich viele Ecken zu haben brauchen, so kann man ihre Innengebiete leicht in der Weise umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abbilden, daß man die Abbildung ihrer Umfänge beliebig vorschreibt. Um dies in einfachster Weise zu bewirken, kann man so verfahren. Seien p_0 und q_0 zwei Punkte im Innern dieser Polygone, z. B. diejenigen, die den größten Abstand von den Umfängen haben. Dann verbinde man p_0 mit einem Punkt p von P und q_0 mit dem entsprechenden Punkte q von Q und ordne je zwei Punkte der Strecken p_0p und q_0q einander zu, die beide in gleichem Verhältnis teilen; tut man dies für jedes Paar entsprechender Punkte p und q, so ist damit eine Abbildung der verlangten Art geleistet, was weiterer Ausführung nicht bedarf.

Ist endlich drittens Q ein konvexes Polygon, ist P ein solches, das auch konkave Ecken hat, und p eine konkave Ecke von P, so verlängere man wieder eine in p endigende Seite in das Innere von P bis zum ersten Schnittpunkt p' mit P und verbinde die beiden entsprechenden Punkte q und q' von Q durch eine Gerade innerhalb Q. Diese Gerade ordnen wir wieder der Geraden pp' eineindeutig und stetig zu. Sie zerlegt Q in zwei konvexe Polygone Q_1 und Q_2. Kann man nun diese Polygone in der verlangten Weise auf die Teilpolygone P_1 und P_2 von P abbilden, so ist damit auch die Abbildung von P auf Q geleistet. Dabei ist zu beachten, daß die Abbildung innerhalb des einen Polygonpaares P_1 und Q_1 von derjenigen innerhalb des anderen im allgemeinen unabhängig ist, sie muß nur die Eigenschaft haben, beidemal dieselbe Beziehung für die Strecken pp' und qq' zu liefern. Dies bleibt bestehen, wie oft wir auch die Zerlegung von P ausführen müssen, um es in lauter konvexe Polygone zu zerlegen. Andererseits zerfällt dabei Q ebenfalls in lauter *konvexe* Polygone. Bilden wir dann jedes Teilpolygon von Q auf das entsprechende Teilpolygon von P in der oben angegebenen Weise ab, so haben wir damit eine eineindeutige und stetige Abbildung für $\mathfrak{J}(P)$ und $\mathfrak{J}(Q)$ gewonnen, die stetig in die vorgeschriebene Abbildung von P und Q übergeht.*)

Sei nun C eine einfache geschlossene Kurve, die eineindeutig auf das Quadrat $\mathfrak{Q}$ bezogen ist, und sei die Aufgabe gestellt, das Innere $\mathfrak{J}(C)$ umkehrbar eindeutig und stetig auf das Innere $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q})$ so abzubilden, daß diese Abbildung stetig in die gegebene Abbildung von C auf $\mathfrak{Q}$ übergeht.

*) Die oben benutzte Abbildung kann durch jede andere umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung ersetzt werden.

Sei m_0 der Punkt von $\mathfrak{J}(C)$, für den $\varrho(m_0, C) = \eta$ ein Maximum ist, sei q_0 der Mittelpunkt von Q, und δ sein d Abstand von Q. Wir zeichnen dann die Polygone

$$P', P'', \cdots, P^{(\nu)}, \cdots$$

die m_0 einschließen und C von innen approximieren, und zwar setzen wir

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\eta, \quad \varepsilon'' = \frac{1}{4}\varepsilon', \cdots, \quad \varepsilon^{(\nu+1)} = \frac{1}{4}\varepsilon^{(\nu)}, \cdots$$

Ebenso zeichnen wir die Quadrate, die Q von innen in den Abständen δ_ν approximieren, nämlich

$$\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \cdots, \mathfrak{Q}^{(\nu)}, \cdots$$

und zwar sei

$$\delta' = \frac{1}{2}\delta, \quad \delta'' = \frac{1}{4}\delta', \cdots \quad \delta^{(\nu+1)} = \frac{1}{4}\delta^{(\nu)}, \cdots$$

Es ist jetzt noch zu erörtern, wie man die Abbildung von $P^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ anzunehmen hat, damit die Abbildung des Inneren von $\mathfrak{Q}$ und C gleichmäßig in die vorgegebene Abbildung von $\mathfrak{Q}$ auf C übergeht. Dies kann folgendermaßen geschehen (Fig. 5).*) Seien q_1, q_2, q_3, q_4 in kon-

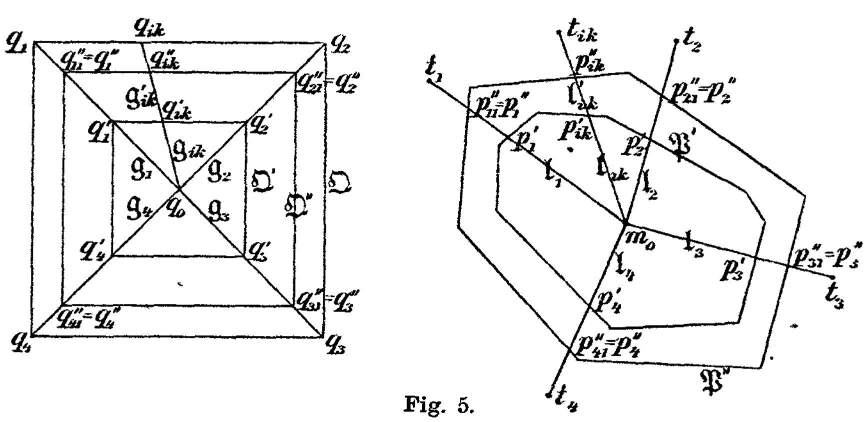

Fig. 5.

sekutiver Folge die Ecken von $\mathfrak{Q}$ und q_1', q_2', q_3', q_4' die analogen Ecken von Q', ferner seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ die Diagonalstrecken, die q_0 mit diesen Punkten verbinden. Sind dann t_1, t_2, t_3, t_4 die Punkte der Kurve C, die den Punkten q_i von Q entsprechen, so verbinden wir sie mit m_0 durch Wege $\mathfrak{l}_i$, die einander nicht kreuzen und jedes Polygon $P^{(\nu)}$ nur einmal schneiden. Wir richten nun die weitere Abbildung immer so ein, daß *diese Wege* $\mathfrak{l}_i$ *den Strecken* $\mathfrak{g}_i$ *entsprechen und daß sie die Polygone* $P^{(\nu)}$ *und* $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ *je in entsprechenden Punkten treffen.* Sind also insbesondere p_1', p_2', p_3', p_4' die Schnittpunkte dieser Wege mit P', so schreiben wir die Abbildung von P' auf $\mathfrak{Q}'$ so vor, daß dem Punkte p_i' der Punkt q_i' entspricht, und daß ferner die Strecke $q_i' q_{i+1}'$ von $\mathfrak{Q}'$ *ähnlich* auf das Intervall $p_i' \cdots p_{i+1}'$ von P' bezogen wird. Die Länge dieses Intervalls sei L_i'.

*) Die Figur ist nur schematisch zu verstehen.

Um die Abbildung von P'' auf $\mathfrak{Q}''$ zu bewirken, nehmen wir eine Größe η_1 an, die kleiner als jedes L_i' ist, und teilen jeden Streckenzug $p_i' \cdots p_{i+1}'$ in solche der Einfachheit halber *gleiche* Teile, daß die Länge jedes Teiles zwischen η_1 und $\frac{1}{2}\eta_1$ liegt. Die so auf $p_i' \cdots p_{i+1}'$ entstehenden Punkte seien

$$p_{i1}' = p_i',\ p_{i2}',\ p_{i3}',\ \cdots,\ p_{i\lambda}' = p_{i+1}';$$

ihnen entsprechen auf $\mathfrak{Q}'$ die Punkte

$$q_{i1}' = q_i',\ q_{i2}',\ q_{i3}',\ \cdots,\ q_{i\lambda}' = q_{i+1}',$$

die ebenfalls *gleichen* Abstand voneinander haben müssen. Seien $\mathfrak{g}_{ik}$ die Geraden, die diese Punkte mit q_0 verbinden, q_{ik} ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{Q}$, q_{ik}'' diejenigen mit $\mathfrak{Q}''$ und $\mathfrak{g}_{ik}'$ das Stück $q_{ik}' q_{ik}$ dieser Geraden, das also *außerhalb* von $\mathfrak{Q}'$ liegt. Die Gesamtheit dieser Punkte auf $\mathfrak{Q}$ resp. $\mathfrak{Q}''$ bezeichne ich durch

$$Q_2 = \{q_{ik}\} \quad \text{resp.} \quad Q'' = \{q_{ik}''\},$$

und zwar gehören zu Q_2 auch die vier Punkte q_i der Punktmenge $Q_1 = \{q_i\}$, und zwischen je zweien von ihnen liegt mindestens ein Punkt von Q_2. Auf der Kurve C bestimmen wir nun die entsprechende Punktmenge

$$T_2 = \{t_{ik}\},$$

und verbinden m_0 mit jedem Punkte t_{ik}, der nicht schon zur Punktmenge $T_1 = \{t_i\}$ gehört, durch Wege $\mathfrak{l}_{ik}$, die den Punkt p_{ik}' von P' enthalten, die einander und die Wege $\mathfrak{l}_i$ nicht kreuzen und jedes $P^{(\nu)}$ nur einmal schneiden. Ist dann $\mathfrak{l}_{ik}'$ dasjenige Stück des Weges, das zwischen p_{ik}' und t_{ik} liegt, so setzen wir zunächst fest, daß *die Wege* $\mathfrak{l}_{ik}'$ *und die Strecken* $\mathfrak{g}_{ik}'$ *einander entsprechen**) und richten die weitere Abbildung wieder so ein, daß für jedes $\nu > 1$ *ihre Schnittpunkte auf* $P^{(\nu)}$ *und* $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ *entsprechende Punkte sind.* Ist insbesondere p_{ik}'' der Schnittpunkt von $\mathfrak{l}_{ik}$ mit P'', so ist die Anordnung dieser Punkte auf P'' die gleiche, wie die der Punkte q_{ik}'' auf $\mathfrak{Q}''$, und wir schreiben nun weiter vor, daß die Punkte p_{ik}'' und q_{ik}'' einander entsprechen, und daß die entsprechenden Intervalle von P'' und $\mathfrak{Q}''$ *ähnlich* aufeinander bezogen werden. Damit sind die Umfänge je zweier Teilpolygone, in die die Gebiete zwischen P' und P'' resp. zwischen $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ zerfallen, einander zugeordnet, und es kann daher auch die dementsprechende Abbildung dieser Ringgebiete selbst bewirkt werden.

In dieser Weise kann man fortfahren. Sei L'' die kleinste Länge

---

*) Die innerhalb $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ liegenden Teile dieser Wege brauchen einander nicht zu entsprechen; und analog im folgenden.

eines dieser auf P'' liegenden Intervalle $p''_{i,k} \cdots p''_{i,k+1}$, so wähle man eine Größe η_2 so, daß

$$\eta_2 < \frac{1}{2}\eta_1 \quad \text{und} \quad \eta_2 < L'',$$

und teile jedes Intervall $p''_{ik} \cdots p''_{i,k+1}$ auf P'' in *gleiche* Teile, deren jeder der Länge nach zwischen η_2 und $\frac{1}{2}\eta_2$ liegt, bestimme die entsprechenden Punkte auf $\mathfrak{Q}''$, und verbinde sie mit q_0 durch Geraden $\mathfrak{g}_{ikl}$. Man erhält so in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{Q}'''$ resp. $\mathfrak{Q}$ die Punktmengen

$$Q_3 = \{q_{ikl}\} \quad \text{und} \quad Q''' = \{q'''_{ikl}\},$$

so daß Q_3 die Menge Q_2 enthält und zwischen je zwei Punkten von Q_2 mindestens ein Punkt von Q_3 liegt. Alsdann bestimme man auf C die Punkte

$$T_3 = \{t_{ikl}\},$$

und verbinde m_0 mit ihnen durch die Wege $\mathfrak{l}_{ikl}$, die durch p''_{ikl} gehen und auf P''' die Punkte p'''_{ikl} ausschneiden. Man richtet dann die weitere Abbildung so ein, daß man die Stücke $\mathfrak{l}_{ikl} = p''_{ikl}\, t_{ikl}$ dieser Wege, die *außerhalb* P'' liegen, den außerhalb $\mathfrak{Q}''$ liegenden Strecken $\mathfrak{g}''_{ikl} = q''_{ikl}\, q_{ikl}$ in der genannten Weise zuordnet, auf P''' und $\mathfrak{Q}'''$ die Punkte p'''_{ikl} und q'''_{ikl} als Bildpunkte wählt, und die zwischen ihnen liegenden Streckenzüge einander *ähnlich* zuordnet.

Wird auf diese Weise fortgefahren, und sind

$$Q_r = \{Q_\nu\}, \quad \text{resp.} \quad T_r = \{T_\nu\}$$

die auf $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ entstehenden Punktmengen, so ist der Konstruktion gemäß Q_r auf $\mathfrak{Q}$ überall dicht; es muß daher, da $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ beiderseits stetige Abbilder sind, auch $\mathfrak{T}_r$ auf C überall dicht liegen.

Es ist nun noch zu beweisen, daß die Stetigkeit auch beim Übergang aus dem Inneren zur Grenze, d. h. zu $\mathfrak{Q}$ und C gewahrt bleibt. Dazu ist zu zeigen, daß jeder dem Inneren von $\mathfrak{Q}$ zugehörigen Punktfolge, die gegen einen Punkt q von $\mathfrak{Q}$ konvergiert, eine Punktfolge entspricht, die gegen einen einzigen Grenzpunkt von C konvergiert, und zwar gegen den Bildpunkt t von C. Man sieht aber leicht, daß es genügt, gewisse einfachere Punktfolgen in Betracht zu ziehen. Erstens können wir uns auf Punkte beschränken, die auf den Umfängen der $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ liegen; zweitens dürfen wir annehmen, daß auf jedem $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ nur ein Punkt der Punktfolge liegt, und drittens können wir jeden Punkt eines $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ durch den ihm am nächsten liegenden Punkt der Punktmenge $Q^{(\nu)}$ ersetzen. Sei nun

$$\{q^{(\nu)}\} = q', q'', q''', \cdots, q^{(\nu)}, \cdots$$

eine derartige Punktfolge und q ihr Grenzpunkt, und seien

$$\{p^{(\nu)}\} = p', p'', p''', \cdots, p^{(\nu)}, \cdots$$

die entsprechenden Punkte auf den Polygonen $P^{(\nu)}$. Wir wollen nun annehmen, es gebe einen Grenzpunkt von $\{p^{(\nu)}\}$, der von t verschieden ist, so gehörte er doch sicher der Menge C an. Er sei t_1, und q_1 sei der entsprechende Punkt von $\mathfrak{Q}$, ferner sei $q q_1$ die kleinere der beiden Strecken, in die $\mathfrak{Q}$ zerfällt. Dann gibt es auf ihr sicher Punkte von Q_r; irgend zwei von ihnen seien q_r' und q_r'', ferner seien $\mathfrak{g}_r'$ und $\mathfrak{g}_r''$ die von q_0 zu ihnen führenden Geraden, und $\mathfrak{M}_q$ das durch sie bestimmte Teilgebiet von $\mathfrak{Q}$. Andererseits bestimmen die Wege $\mathfrak{l}_r'$ und $\mathfrak{l}_r''$, die von m_0 zu t_r' und t_r'' führen, ein Teilgebiet $\mathfrak{M}_t$ des Kurveninneren, zu dessen Grenze t und t_1 nicht gehören, auch folgen t, t_1, t_r', t_r'' in derselben Ordnung aufeinander wie q, q_1, q_r', q_r''. Man lege nun um t_1 einen Kreis mit einem so kleinen Radius, daß die Wege $\mathfrak{l}_r'$ und $\mathfrak{l}_r''$ zu seinem Äußeren gehören, dann wird man eine Zahl N so wählen können, daß es unendlich viele Werte $\nu > N$ gibt, so daß die Punkte $p^{(\nu)}$ dem Inneren dieses Kreises angehören.

Welches nun auch die Punkte q_r' und q_r'' sein mögen, so kann man gemäß den obigen Vorschriften die Zahl N auch so bestimmen, daß für *alle* $\nu > N$ einerseits die Polygone $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ von den Geraden $\mathfrak{g}_r''$ und $\mathfrak{g}_r''$ und andererseits die Polygone $P^{(\nu)}$ von den beiden Wegstücken $\mathfrak{l}_r'$ und $\mathfrak{l}_r''$ in entsprechenden Punkten getroffen werden. Sind also $\mathfrak{q}^{(\nu)}$ resp. $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ diejenigen Streckenzüge dieser Polygone, die im Innern der Gebiete $\mathfrak{M}_q$ und $\mathfrak{M}_t$ verlaufen, so werden für alle diese Werte ν ihre Endpunkte einander entsprechen. Für diese Werte ν müssen daher auch die Punkte $p^{(\nu)}$ und $q^{(\nu)}$ die gleiche Lage zu $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ resp. $\mathfrak{q}^{(\nu)}$ haben, d. h. entweder zugleich links oder zugleich rechts von ihnen liegen. Dies enthält aber einen Widerspruch mit der Annahme, denn man könnte daraus folgern, daß es unendlich viele Werte $\nu > N$ gäbe, für die die Punkte $p^{(\nu)}$ und daher auch die Punkte $q^{(\nu)}$ auf *verschiedenen* Seiten dieser Streckenzüge liegen müßten. Dies trifft aber für die Punkte $q^{(\nu)}$, resp. die Streckenzüge $\mathfrak{q}^{(\nu)}$ nicht zu. Die Punkte $p^{(\nu)}$ besitzen daher nur einen Grenzpunkt.

Ebenso ließe sich beweisen, daß jeder Punktfolge von C eine Punktfolge von $\mathfrak{Q}$ mit nur einem Grenzpunkte entspricht; doch ist dies nicht einmal nötig, da eine eineindeutige und einerseits stetige Abbildung auch umkehrbar stetig ist. Also folgt:

Ist die einfache geschlossene Kurve C eineindeutiges und stetiges Abbild eines Quadrates $\mathfrak{Q}$, so kann man diese Abbildung zu einer analogen Abbildung der beiden inneren Gebiete von C und $\mathfrak{Q}$ erweitern, die stetig in die gegebene Abbildung zwischen $\mathfrak{Q}$ und C übergeht.

Die Anwendung dieses Satzes auf die im Eingang des Paragraphen genannte Frage wird im folgenden Paragraphen gegeben werden.

§ 14.

Zusammenstellung der invarianten Eigenschaften.

Es scheint mir nützlich, zum Schlusse eine Zusammenstellung aller der Eigenschaften zu geben, die bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung *invariant* bleiben, sowie der meines Erachtens *einfachsten Beweismethoden.* Dabei setze ich von vornherein voraus, daß wir es mit der Abbildung *von Ebenen aufeinander* zu tun haben. Gemäß § 12 enthält dies keine Beschränkung, da ja jede Abbildung von Kurven als *Teil* einer Ebenenabbildung angesehen werden kann.

1. *Einer abgeschlossenen resp. perfekten Menge entspricht wieder eine abgeschlossene resp. perfekte Menge,* was aus dem Charakter der Stetigkeit unmittelbar folgt.*)

2. *Der Zusammenhang ist eine Invariante.* Seien nämlich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ entsprechende *perfekte* Mengen, und sei $\mathfrak{T}$ zusammenhängend, so daß $\mathfrak{T}$ nicht in abgeschlossene Teilmengen zerlegbar ist. Wenn dann die Menge $\mathfrak{T}_1$ nicht zusammenhängend wäre, so zerfiele sie in zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$, die beide perfekt sind. Ihnen müßten gemäß 1. analoge Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$ entsprechen, was aber einen Widerspruch darstellt.

3. Hilfssatz: *Einem Quadrat kann bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung nicht eine Strecke entsprechen.* Zieht man nämlich im Quadrat eine zu zwei Seiten parallele Gerade, so entspricht ihr eine zusammenhängende Teilmenge der Strecke. Von Geraden dieser Art ohne gemeinsame Punkte gibt es im Quadrat eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, während auf der Strecke nur eine abzählbare Menge solcher Teilstrecken liegen kann.

4. *Der Begriff der einfachen geschlossenen Kurve und die durch sie bewirkte Gebietsteilung sind invariant,* d. h. dem Inneren und Äußeren der Kurve entspricht das Innere und Äußere der Bildkurve.

Der erste Teil des Satzes ist nichts anderes als der Inhalt von § 11 und § 12, der sich also auch als Aussage einer invarianten Eigenschaft auffassen läßt. Der Beweis des zweiten Teiles ergibt sich folgendermaßen.

Seien C und C' die beiden Kurven, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ die inneren und äußeren Gebiete, endlich m und m_1 zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, und m' resp. m_1' ihre Bildpunkte. Dann ist m mit m_1 durch einen Streckenzug $\mathfrak{w}$ verbindbar, der keinen Punkt von C enthält. Ihm entspricht in der Bildebene ein einfacher Kurvenbogen $\mathfrak{w}'$, der keinen Punkt von C' enthält. Nun sei der Abstand

$$\varrho(\mathfrak{w}', C') = \eta',$$

*) Vgl. C. Jordan, Cours d'analyse, Bd. 1, S. 46, sowie meinen Bericht, S. 115.

so kann man wegen der Stetigkeit der Abbildung eine Größe δ bestimmen, so daß, falls p, p_1 und p', p_1' entsprechende Punkte sind,

$$\varrho(p', p_1') < \eta' \text{ wird, falls } \varrho(p, p_1) < \delta$$

gewählt wird. Erfüllt man nun den Streckenzug $\mathfrak{w}$ so mit einer Zahl konsekutiver Punkte m_i, daß

$$\varrho(m_i, m_{i+1}) < \delta$$

ist, so wird für die auf $\mathfrak{w}'$ liegenden Bildpunkte

$$\varrho(m_i', m_{i+1}') < \eta'$$

sein. Die Strecken $m_i' m_{i+1}'$ haben daher keinen Punkt mit C' gemein und bestimmen daher einen Streckenzug, der ganz zu $\mathfrak{J}'$ oder ganz zu $\mathfrak{A}'$ gehört. Daß nunmehr $\mathfrak{J}'$ dem $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$ entspricht, folgt ebenfalls aus der Stetigkeit der Abbildung.*)

5. *Der Begriff der geschlossenen Kurve und der durch sie bewirkten Gebietsteilung ist invariant.*

Dies läßt sich auf Grund des vorstehenden Satzes leicht beweisen. Sei nämlich $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Kurve, $\mathfrak{T}'$ ihr Abbild, und $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{A}$ das Innere und Äußere der durch $\mathfrak{T}$ bewirkten Gebietsteilung. Ferner sei P ein Polygon, das $\mathfrak{T}$ von innen approximiert, so entspricht ihm eine einfache geschlossene Kurve C' und dem Inneren $\mathfrak{J}(P)$ entspricht das Innere $\mathfrak{J}(C')$; ebenso folgert man leicht aus Satz 4., daß, wenn P und P_ν zwei solche Polygone sind und P_ν außerhalb von P liegt, auch die Bildkurve C_ν' von P_ν außerhalb der Bildkurve C' von P liegt. Dem Gebiete $\mathfrak{J}$, zu dem jeder Punkt eines $\mathfrak{J}(P_\nu)$ gehört, entspricht daher ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}'$, dem jeder Punkt eines $\mathfrak{J}(C_\nu')$ angehört.

Nun ist jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}$, und da, wie eben bewiesen, jedem Punkte von $\mathfrak{J}$ ein Punkt von $\mathfrak{J}'$ entspricht, so ist auch jeder Punkt von $\mathfrak{T}'$ Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}'$. Ebenso kann man die Existenz eines zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{A}'$ nachweisen, das $\mathfrak{A}$ entspricht, und daraus folgern, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}'$ auch Grenzpunkt von $\mathfrak{A}'$ ist. Damit ist der Beweis geliefert.

Es folgt noch, daß, wenn der Menge $\mathfrak{T}$ ein einziges Gebiet $\mathfrak{M}$ als Komplementärmenge zugehört, auch $\mathfrak{M}'$ ein einziges Gebiet ist.

6. *Der Begriff der Erreichbarkeit ist ein invarianter Begriff.*

Ist nämlich ein Punkt t für einen Punkt m eines Gebietes $\mathfrak{M}$ erreichbar, so entspricht ihm nach dem vorigen Satze ein Punkt m' eines Gebietes $\mathfrak{M}'$, zu dessen Grenze t' notwendig gehört. Das Weitere folgt aus den Ausführungen von § 11 und 12.

---

*) Die Ebene $\mathfrak{E}$ ist hier und sonst immer die Ebene der Funktionentheorie, die einen unendlich fernen Punkt enthält.

7. *Bei einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ ist ihre Struktur sowie die durch sie bewirkte Gebietsteilung invariant.*

Sei zunächst $\mathfrak{T}$ eine nirgends dichte Menge. Man hat allgemein*)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{A} + \Sigma \mathfrak{J}_\nu,$$

wo $\mathfrak{A}$ das äußere Gebiet ist, und $\mathfrak{J}_\nu$ die einzelnen inneren Teilgebiete sind, deren Zahl endlich oder abzählbar ist. Ist dann $\mathfrak{T}_\nu$ Grenzmenge von $\mathfrak{J}_\nu$, so folgert man, wie im Beweis von 5., daß es ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}_\nu'$ gibt, so daß seine Grenze diejenige Teilmenge $\mathfrak{T}_\nu'$ von $\mathfrak{T}'$ ist, die $\mathfrak{T}_\nu$ entspricht. Andererseits entspricht jedem gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_\nu$ ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}_\nu'$; wenn also $\mathfrak{J}_\mu$ und $\mathfrak{J}_\nu$ gemeinsame Grenzpunkte haben, so sind deren Bildpunkte auch gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{J}_\mu'$ und $\mathfrak{J}_\nu'$. Ebenso ist klar, daß einem Punkte von $\mathfrak{T}_\nu$, der Grenzpunkt *nur* von $\mathfrak{J}_\nu$ ist, ein Punkt von $\mathfrak{T}_\nu'$ entspricht, der Grenzpunkt *nur* von $\mathfrak{J}_\nu'$ ist Damit ist die Invarianz der Struktur und Gebietsteilung in diesem Falle bewiesen.

Enthält $\mathfrak{T}$ auch überall dichte Bestandteile, so sei U ein solcher. Er wird notwendig von einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{T}_1$ eingeschlossen. Ihr entspricht eine Bildkurve $\mathfrak{T}_1'$ und dem Inneren U von $\mathfrak{T}_1$ entspricht das Innere U' von $\mathfrak{T}_1'$. Damit ist auch in diesem Falle der Beweis geliefert.

Nunmehr ist es auch leicht, den allgemeinsten Satz dieser Art zu beweisen, der aussagt:

8. *Für jede beliebige Menge $\mathfrak{T}$ bleibt ihre Struktur und die durch sie bewirkte Gebietsteilung bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung invariant.*

Der Satz ist nur noch für den Fall zu beweisen, daß $\mathfrak{T}$ keine zusammenhängende Menge ist, bedarf aber kaum noch eingehender Begründung. Er folgt unmittelbar daraus, daß die Einteilung der Mengen nach ihrer Struktur, wie sie im zweiten Beitrag enthalten ist, in erster Linie darauf beruht, ob und wie $\mathfrak{T}$ in perfekte Teilmengen zerlegbar ist. Sind nun $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zwei perfekte Teilmengen von $\mathfrak{T}$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so zerfällt auch $\mathfrak{T}'$ in zwei perfekte Mengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Ebenso müssen die weiteren Unterteilungen bei beiden Mengen in gleicher Art möglich sein, insbesondere folgt auch, daß jeder zusammenhängenden Grenzmenge $\mathfrak{T}_\omega$ der zusammenhängenden, aber isolierten Mengen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots, \mathfrak{T}_\nu, \cdots$ eine zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}_\omega'$ entspricht, die Grenzmenge der Bildmengen $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \cdots, \mathfrak{T}_\nu', \cdots$ ist; in der Tat muß zu jedem Punkte t_ν, der Grenzpunkt von $\{t_\nu\}$ ist, ein Bildpunkt t_ν' gehören, der Grenzpunkt von $\{t_\nu'\}$ ist. Daher muß auch die im zweiten Beitrage gegebene Analyse für beide

*) Vgl. Beitrag I, diese Ann. Bd. 58, S. 211.

Mengen dieselbe sein. Endlich muß also auch die Zusammenhangsart und Zusammenhangszahl der Gebiete invariant sein, in die die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$ zerfällt. Ist insbesondere $\mathfrak{T}$ eine Menge vom zweiten Typus, d. h. eine solche, die immer wieder in Teilmengen zerlegbar ist, deren keine zusammenhängend ist, so muß es auch die Menge $\mathfrak{T}'$ sein.

9. Ich schließe mit der nachstehenden wichtigen Folgerung. Die Wege $\mathfrak{l}$, die wir von einem Punkte m zu einem Punkte t legten, waren in § 4 gewissen Bedingungen und Festsetzungen unterworfen worden. Wir können aber jetzt zeigen, daß die mit solchen Wegen abgeleiteten Sätze bestehen bleiben, wenn an die Stelle dieser Wege einfache Kurvenbögen treten. Hat man z. B. eine einfache geschlossene Kurve C, und zwei einfache Kurvenbögen $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$, die von einem inneren Punkte m zu zwei Kurvenpunkten c_1 und c_2 führen, so können wir diese Figur gemäß § 13 umkehrbar stetig und eindeutig auf eine andere so abbilden, daß C wieder durch eine einfache Kurve C' ersetzt wird, während den beiden Kurvenbögen zwei Wege $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_2'$ entsprechen, die von einem inneren Punkte m' zu den Punkten c_1' und c_2' führen. Dann folgt aus den obigen Sätzen, daß $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ für $\mathfrak{J}(C)$ dieselbe Gebietsteilung bewirken, wie $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_2'$ für $\mathfrak{J}(C')$. Alle Sätze der früheren Paragraphen gelten daher auch, wenn die dort benutzten Wege durch beliebige einfache Kurvenbögen ersetzt werden, die den gleichen Bedingungen der Lage unterliegen, wie die Wege $\mathfrak{l}_i$. Auf ähnliche Weise zeigt man, daß auch für die Zerlegung, die das Innere einer *beliebigen* geschlossenen Kurve erfährt, die Wege $\mathfrak{l}_i$ durch einfache Kurvenbögen ersetzbar sind, und ebenso steht es mit den anderen Sätzen, in denen einfache Wege auftreten. *Alle die Begriffsbestimmungen und Sätze, die ursprünglich aus methodischen Gründen zunächst für einfache Polygone und Streckenzüge besonderer Art aufgestellt oder abgeleitet wurden, bleiben also in Kraft, wenn man die Polygone durch einfache Kurven und die Streckenzüge und Wege durch einfache Kurvenbögen ersetzt.**)

Umgekehrt folgt noch aus § 13, daß man jede beliebig gegebene ebene Menge umkehrbar eindeutig auf eine solche abbilden kann, in die nur Strecken und Streckenzüge eingehen. Die aus lauter polygonalen Bestandteilen aufgebauten Mengen stellen daher nicht etwa nur den einfachsten Fall, sondern zugleich den allgemeinsten Typus der möglichen Gestalten dar.

*) Eine endliche Bogenlänge brauchen diese Wege oder Kurvenbögen nicht zu haben; ein Beispiel liefert Fig. 3.