Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

Einleitung.

Ist eine analytische Funktion y der komplexen Veränderlichen z gegeben, die für $z = 0$ den Wert $y = A_0$ annimmt und in der Umgebung dieses Punktes regulär ist, im Inneren des Kreises $|z| < \varrho$ aber gewissen Beschränkungen unterworfen wird, so entsteht die Frage, ob nicht auch dadurch zugleich für die Koeffizienten des Funktionselements

$$y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k,$$

das die Funktion darstellt, Beschränkungen entstehen, welche bestimmt werden können.

Ein spezieller Fall dieser Art von Fragen kommt bei der bekannten Verallgemeinerung vor, die E. Landau für den Picardschen Satz über ganze transzendente Funktionen gegeben hat.*)

Dieser Satz kann nämlich folgendermaßen ausgesprochen werden: Wenn die Funktion y für $z = 0$ den Wert $y = A_0$ annimmt, im Inneren des Einheitskreises regulär ist und die Werte Null und Eins ausläßt, und wenn man den reellen und imaginären Teil des Koeffizienten A_1 als Koordinaten eines Punktes der Ebenen deutet, so muß dieser Punkt im Inneren eines Kreises liegen, dessen Radius man angeben kann.

*) E. Landau, Sitzungsb. d. Berl. Akad. (1904), XXXVIII (pag. 1118) siehe auch A. Hurwitz, Züricher Vierteljahrsschr. XLIX (pag. 242); F. Schottky, Berl. Akad. (1904) XLII (pag. 1244); C. Carathéodory, C.R. Bd. 141 (1905), p. 1213; P. Boutroux, Bull. Soc. Math. Bd. 34 (1906), p. 30.

Während des Druckes dieser Arbeit hat Herr Landau eine ausführliche Darstellung der in Betracht kommenden Fragen publiziert (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich Bd. 51, p. 252). Insbesondere wird im § 15 dieser Arbeit ein dem uns hier beschäftigenden analoges Problem auf ein algebraisches rekurrentes Verfahren zurückgeführt.

Auf ähnliche Weise will ich im folgenden die reellen und imaginären Teile der n Koeffizienten

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

als Koordinaten eines Punktes im $2n$-dimensionalen Raume deuten und diesen Punkt den n^{ten} *geometrischen Repräsentanten* der Potenzreihe nennen. Dann wird sich zeigen, daß, wenn die Funktion y vorgeschriebenen Bedingungen, ähnlich wie beim Landau-Picardschen Satze, genügt, dieser Punkt im Inneren oder auf der Oberfläche eines Körpers K_n liegen muß, den man vollständig und explizite bestimmen kann.

Wir werden von dem speziellen Falle ausgehen, wo die Funktion y im Inneren des Einheitskreises regulär ist und einen positiven reellen Teil besitzt, während sie für den Punkt $z = 0$ den Wert $y = 1$ annimmt.

Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{C}_n$ die Kurve, welche von dem Punkt mit den $2n$ Koordinaten

$$\begin{array}{ccc} 2\cos\vartheta, & 2\cos 2\vartheta, \cdots, & 2\cos n\vartheta, \\ -2\sin\vartheta, & -2\sin 2\vartheta, \cdots, & -2\sin n\vartheta \end{array}$$

durchlaufen wird, wenn ϑ von 0 bis 2π variiert, so fällt unter diesen Annahmen der Körper K_n mit dem kleinsten konvexen Körper $\mathfrak{K}_n$ zusammen, der $\mathfrak{C}_n$ enthält.

Umgekehrt ist aber auch jeder Punkt von $\mathfrak{K}_n$ der n^{te} geometrische Repräsentant von mindestens einer Funktion $y(z)$, die den vorgeschriebenen Bedingungen genügt; für die Punkte der Oberfläche ist diese Funktion eindeutig bestimmt, rational und besitzt höchstens n Nullstellen.*)

Die allgemeine Fragestellung wird auf diese spezielle mit Hilfe einer geeigneten konformen Abbildung zurückgeführt; dieser Abbildung entspricht im $2n$-dimensionalen Raume der n^{ten} geometrischen Repräsentanten eine birationale Transformation, und der gesuchte Körper K_n ist nichts anderes als der Transformierte des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$.

§ 1.

Definition des Körpers $\mathfrak{K}_n$.

Wir betrachten zunächst Funktionen des komplexen Argumentes z, die im Inneren *und auf dem Rande* des Einheitskreises

$$|z| \leqq 1$$

regulär sind, für diese Werte von z einen positiven reellen Teil besitzen und für $z = 0$ den Wert Eins annehmen. Eine Funktion, welche allen diesen Bedingungen genügt, läßt sich in der Umgebung von $z = 0$ durch eine Potenzreihe

*) Dieses Resultat ist mit anderen Worten eine Verallgemeinerung und Präzisierung bekannter Hadamard-Borelscher Ungleichheiten.

(1) $$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + i\bar{c}_k) z^k$$

darstellen, deren Konvergenzradius größer als Eins ist; mit $f(\vartheta)$ bezeichne man den reellen Teil von (1) auf dem Einheitskreise

$$z = e^{i\vartheta};$$

diese Größe, die unserer Annahme gemäß durchweg der Beziehung

(2) $$f(\vartheta) \geqq 0$$

genügen muß, läßt sich in eine konvergente Fouriersche Reihe

(3) $$f(\vartheta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\vartheta - \bar{c}_k \sin k\vartheta)$$

entwickeln; es gelten also die bekannten Gleichungen

(4) $$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 2,$$

(5) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos k\vartheta\, d\vartheta = c_k, \\ \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin k\vartheta\, d\vartheta = -\bar{c}_k. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (5) folgen mit Hilfe von (4) und (2) durch Anwendung des Mittelwertsatzes, und zwar für jedes k, die Beziehungen:

$$|c_k| \leqq 2, \qquad |\bar{c}_k| \leqq 2.$$

Der n^{te} geometrische Repräsentant einer Funktion, welche unseren Forderungen genügt, liegt also jedenfalls im Endlichen.

Das Polynom n^{ten} Grades

(6) $$y = 1 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + i\bar{c}_k) z^k$$

hat den Punkt mit den Koordinaten

(7) $$\begin{cases} c_1, c_2, \cdots, c_n, \\ \bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n \end{cases}$$

zum n^{ten} geometrischen Repräsentanten und da der reelle Teil der Funktion (6) auf dem Einheitskreise den Wert

$$f(\vartheta) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos k\vartheta - \bar{c}_k \sin k\vartheta)$$

besitzt, so sieht man, daß dieser reelle Teil auf der ganzen Kreisfläche nicht negativ sein kann, wenn für jedes k

$$|c_k| < \frac{1}{2n}, \qquad |\bar{c}_k| < \frac{1}{2n}$$

ist. Da in diesem Falle die Funktion (6) unsere sämtlichen Bedingungen erfüllt, so sieht man, daß gewisse Umgebungen des Anfangspunktes der Koordinaten im $2n$-dimensionalen Raume durch geometrische Repräsentanten unserer Funktionen erfüllt sind; eine solche Umgebung ist z. B. die Kugel vom Radius $\frac{1}{2n}$

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k^2 + \bar{c}_k^2) \leqq \frac{1}{4n^2}. \tag{8}$$

Sind y_1 und y_2 zwei Funktionen, welche unsere sämtlichen Forderungen erfüllen, so gilt das gleiche für jede Funktion y der Schar

$$\begin{cases} y = ty_1 + (1-t)y_2, \\ \quad 0 \leqq t \leqq 1; \end{cases}$$

der Repräsentant P von y durchläuft aber die geradlinige Strecke, welche die Repräsentanten P_1 und P_2 von y_1 und y_2 verbindet, wenn t von 0 bis 1 variiert; diese Strecke besteht also aus lauter geometrischen Repräsentanten unserer Funktionen.

Aus dieser Bemerkung folgt unter anderem, daß auf jedem Radiusvektor des $2n$-dimensionalen Raumes, der vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgeht, ein und nur ein Grenzpunkt π existiert, welcher diejenigen Punkte dieser Geraden, die Repräsentanten einer unserer Funktionen sein können, von den anderen trennt, welche diese Eigenschaft nicht haben. Es sei nun S ein Punkt des Strahles, der den Anfangspunkt O der Koordinaten mit dem Grenzpunkte π verbindet, und es liege π zwischen O und S (Fig. 1). Jeder Punkt Q des Raumes, der von S um weniger als

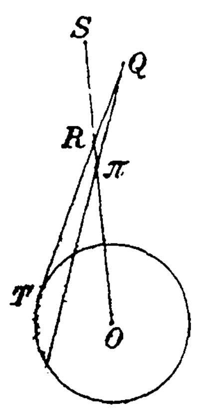

Fig. 1.

$$\frac{1}{2n}\,\frac{\pi S}{O\pi}$$

abweicht, kann unmöglich Repräsentant einer unserer Funktionen sein. Denn die Gerade $Q\pi$ schneidet dann den Kreis vom Radius $\frac{1}{2n}$, den die $2n$-dimensionale Kugel (8) in der Ebene OQS bestimmt (Fig. 1); man kann also von Q aus eine Tangente QT an diesen Kreis legen, welche die Strecke πS in einem inneren Punkte R trifft. Wäre nun Q Repräsentant einer Funktion $y(z)$, die unsere Bedingungen erfüllt, so müßte für jeden Punkt der Strecke QT, folglich auch für R das gleiche gelten und π wäre nicht Grenzpunkt von Repräsentanten auf der Strecke OS.

Man bezeichne mit $\mathfrak{K}_n$ die Punktmenge, die man erhält, wenn man zu den Repräsentanten der unseren Bedingungen genügenden Funktionen die Grenzpunkte π hinzufügt; aus dem vorhergehenden folgt, daß jeder Punkt S, der nicht in $\mathfrak{K}_n$ enthalten ist, um eine endliche angebbare Größe von dieser Menge entfernt ist; da nun die Punktmenge $\mathfrak{K}_n$ keine isolierten Punkte enthält, so sieht man, daß sie perfekt ist.

Sind P_1 und P_2 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{K}_n$, so gehört jeder Punkt der Strecke $P_1 P_2$ auch dieser Menge. Würde nämlich ein Punkt S dieser Strecke außerhalb $\mathfrak{K}_n$ liegen, so müßte im Dreiecke OP_1P_2 eine Parallele $P_1'P_2'$ zu P_1P_2 existieren, welche noch mindestens einen Punkt S' enthält, der nicht zu $\mathfrak{K}_n$ gehört, und dieses ist unmöglich, weil P_1' und P_2' sicher Repräsentanten von Funktionen $y(z)$ sind, die sämtlichen früher gestellten Forderungen genügen.

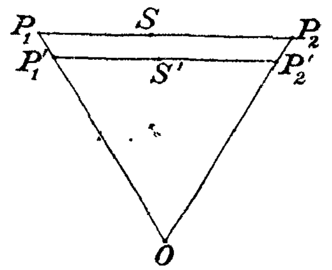

Fig. 2.

Die Punktmenge $\mathfrak{K}_n$ genügt also der Definition, die Minkowski für einen $2n$-dimensionalen konvexen Körper zugrunde legt*): sie liegt nicht ganz in einer $(2n-1)$-dimensionalen Ebene, ist perfekt und enthält jede geradlinige Strecke, deren Endpunkte ihr angehören.

Die Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$ wird aus der Gesamtheit der Grenzpunkte π gebildet, von denen einer auf jedem Radiusvektor durch den Anfangspunkt O der Koordinaten liegt; denn man kann zeigen, und zwar auf ganz analogem Wege wie früher für die äußeren Punkte S, daß, wenn P ein innerer Punkt der Strecke $O\pi$ ist, eine gewisse Umgebung von P aus lauter Punkten von $\mathfrak{K}_n$ besteht und folglich P auch innerer Punkt von $\mathfrak{K}_n$ ist; durch $\mathfrak{O}_n$ wird übrigens der Körper $\mathfrak{K}_n$ vollkommen bestimmt.

§ 2.

Stützebenen.

Eine abgeschlossene Punktmenge im n-dimensionalen Raume besitzt bekanntlich *Stützebenen***), d. h. solche $(n-1)$-dimensionale Ebenen, die mindestens einen Punkt der Menge enthalten und den der Ebene außerhalb liegenden n-dimensionalen Raum in zwei Teile trennen, von denen der eine keinen einzigen Punkt der Menge enthält.

Aus den Untersuchungen von Herrn Minkowski geht hervor, daß bei einem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ durch jeden Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}$ mindestens eine Stützebene geht. Den Gedankengang des folgenden einfachen Beweises für diese Tatsache verdanke ich seiner freundlichen Mitteilung.

---

*) Geometrie der Zahlen (Leipzig 1896) p. 200.

**) Der Ausdruck ist von Minkowski eingeführt l. c. p. 13.

Es sei π ein beliebiger Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ mit den Koordinaten

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n,$$

ferner sei S ein beliebiger Punkt, der außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$ liegt, und ε die Entfernung zwischen π und S. Der Abstand von S bis zu einem beliebigen Punkte von $\mathfrak{K}$ hat ein von Null verschiedenes Minimum δ, das für einen Punkt π' des Körpers erreicht wird, und es ist jedenfalls

$$\delta \leqq \varepsilon.$$

Die $(n-1)$-dimensionale Ebene, welche π' enthält und die Strecke $\pi' S$ senkrecht schneidet, ist eine Stützebene des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$; denn läge ein Punkt T von $\mathfrak{K}$ außerhalb dieser Ebene und auf derselben Seite wie S, so müßte wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ die ganze Strecke $\pi' T$ aus lauter Punkten dieses Körpers bestehen, und das Minimum des Abstandes zwischen S und $\mathfrak{K}$ wäre nicht für den Punkt π' erreicht, wie sich sofort aus der Betrachtung des Dreiecks $S\pi' T$ ergibt. Da nun folglich π, wenn er kein Punkt dieser Ebene ist, auf der entgegengesetzten Seite wie S zu liegen kommt, so enthält die Strecke πS sicher einen Punkt der konstruierten Stützebene und diese ist um weniger als ε von π entfernt. Wir betrachten nun eine Reihe von Punkten

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, \tag{9}$$

die sämtlich außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$ liegen und gegen π konvergieren, und es sei

$$u_1^{(k)} c_1 + u_2^{(k)} c_2 + \cdots + u_n^{(k)} c_n - d = 0 \tag{10}$$

die Gleichung der auf die soeben geschilderte Weise mit Hilfe des Punktes S_k konstruierten Stützebene. Wenn die Gleichung (10) in der Normalform geschrieben ist, d. h. wenn die Koeffizienten $u_i^{(k)}$ der Bedingung genügen

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i^{(k)})^2 = 1, \tag{11}$$

so stellt die linke Seite von (10) den Abstand des Punktes mit den Koordinaten $c_1, c_2, \cdots$ von der besagten Ebene dar. Bezeichnet man also mit ε_k den Abstand zwischen S_k und dem Grenzpunkte π, dessen Koordinaten γ_i waren, so hat man nach dem vorhergehenden

$$u_1^{(k)} \gamma_1 + u_2^{(k)} \gamma_2 + \cdots + u_n^{(k)} \gamma_n - d < \varepsilon_k;$$

also läßt sich die Gleichung (10) schreiben

$$u_1^{(k)}(\gamma_1 - c_1) + u_2^{(k)}(\gamma_2 - c_2) + \cdots + u_n^{(k)}(\gamma_n - c_n) - h_k = 0 \tag{12}$$

wobei

$$h_k < \varepsilon_k$$

ist und folglich die Gleichung

$$\lim_{k=\infty} h_k = 0 \tag{13}$$

gilt. Da nun wegen (11) alle Größen $u_i^{(k)}$ endlich bleiben, so läßt sich aus den Punkten $S_1, S_2, \cdots$ eine neue Reihe aussondern, für welche die Größen $\lim\limits_{k=\infty} u_i^{(k)}$ existieren, so daß man für jedes

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

Gleichungen wie

$$\lim_{k=\infty} u_i^{(k)} = u_i$$

schreiben kann.

Ich behaupte, daß die Ebene

$$u_1(\gamma_1 - c_1) + u_2(\gamma_2 - c_2) + \cdots + u_n(\gamma_n - c_n) = 0, \tag{14}$$

die den Punkt π enthält, eine Stützebene ist. Im entgegengesetzten Falle würden nämlich zwei Punkte P und P' von $\mathfrak{K}$ existieren, deren Koordinaten, in die linke Seite von (14) eingesetzt, dieser Größe entgegengesetzte Vorzeichen erteilen würden. Dasselbe würde aber dann bei geeigneter Wahl von k in (12) gelten, was mit der Tatsache unvereinbar wäre, daß für jedes k die Gleichungen (12) eine Stützebene darstellen, und hiermit ist der Satz von Minkowski bewiesen.

§ 3.

Bestimmung der Oberfläche.

Wir kehren nun zu dem konvexen Körper $\mathfrak{K}_n$ im $2n$-dimensionalen Raume zurück, den wir im ersten Paragraphen betrachtet haben. Jeder *innere* Punkt von $\mathfrak{K}_n$ ist der n^{te} geometrische Repräsentant einer Funktion $y(z)$, deren Konvergenzradius größer als Eins ist, deren reeller Teil im Einheitskreise nicht negativ wird und die für $z = 0$ den Wert Eins annimmt. Ist nun umgekehrt

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + i\bar{c}_k) z^k \tag{15}$$

eine Funktion, deren Konvergenzradius größer *oder gleich* Eins ist und deren reeller Teil im Einheitskreise nicht negativ ist, so liegt für jedes

$$r < 1$$

der Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{cases} c_1 r, \; c_2 r^2, \; \cdots, \; c_n r^n, \\ \bar{c}_1 r, \; \bar{c}_2 r^2, \; \cdots, \; \bar{c}_n r^n \end{cases}$$

im Inneren des Körpers $\mathfrak{K}_n$ und folglich der Punkt mit den Koordinaten

$$c_1, \; c_2, \; \cdots, \; c_n; \quad \bar{c}_1, \; \bar{c}_2, \; \cdots, \; \bar{c}_n$$

im Inneren oder auf der Oberfläche dieser perfekten Punktmenge; der n^{te} geometrische Repräsentant von (15) ist also jedenfalls ein Punkt von $\mathfrak{K}_n$.

Es sei nun π ein Punkt der Oberfläche von $\mathfrak{K}_n$ mit den Koordinaten

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n; \quad \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \cdots, \bar{\gamma}_n$$

und

$$\left.\begin{aligned} u_1(c_1-\gamma_1) + u_2(c_2-\gamma_2) + \cdots + u_n(c_n-\gamma_n) \\ + \bar{u}_1(\bar{c}_1-\bar{\gamma}_1) + \bar{u}_2(\bar{c}_2-\bar{\gamma}_2) + \cdots + \bar{u}_n(\bar{c}_n-\bar{\gamma}_n) \end{aligned}\right\} = 0 \tag{16}$$

die Gleichung einer Stützebene durch diesen Punkt. Man normiere die Koeffizienten von (16) so, daß

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k^2 + \bar{u}_k^2) = 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k\gamma_k + \bar{u}_k\bar{\gamma}_k) > 0$$

sei. Für jeden Punkt von $\mathfrak{K}_n$ mit den Koordinaten c_k, $\bar{c}_k$ ist dann die linke Seite von (16) negativ oder Null, also

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) \leqq \sum_{k=1}^{n} (u_k\gamma_k + \bar{u}_k\bar{\gamma}_k), \tag{17}$$

und für innere Punkte ist das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Da nun π Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so wird man die Größe

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k\gamma_k + \bar{u}_k\bar{\gamma}_k)$$

durch die obere Grenze von

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k)$$

bestimmen können, wenn der Punkt mit den Koordinaten $(c_k, \bar{c}_k)$ das Innere des Körpers $\mathfrak{K}_n$ durchläuft; nun ist aber jeder solche Punkt der n^{te} geometrische Repräsentant einer Funktion $y(z)$, die auf dem Einheitskreise regulär ist und unseren Bedingungen genügt. Man kann also nach Einführung der Bezeichnung

$$\Phi(\vartheta) = \sum_{k=1}^{n} (u_k \cos k\vartheta - \bar{u}_k \sin k\vartheta) \tag{18}$$

mit Hilfe von (5) schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, \Phi(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{19}$$

Da nun die Beziehungen (2) und (4) d. h.

$$\begin{cases} f(\vartheta) \geqq 0, \\ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 2 \end{cases}$$

auch hier gelten, so folgt aus (19), wenn man mit M das Maximum der Funktion $\Phi(\vartheta)$ für das Intervall von 0 bis 2π bezeichnet, die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) \leqq 2M; \tag{20}$$

es ist also auch die obere Grenze der linken Seite von (20)

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k \gamma_k + \bar{u}_k \bar{\gamma}_k) \leqq 2M. \tag{21}$$

Die Funktion $\Phi(\vartheta)$ ist im Intervalle von 0 bis 2π stetig und erreicht ihr Maximum M für mindestens einen bestimmten Wert von ϑ, z. B. für $\vartheta = \vartheta_1$, so daß

$$M = \sum_{k=1}^{n} (u_k \cos k\vartheta_1 - \bar{u}_k \sin k\vartheta_1) \tag{22}$$

ist. Andererseits ist die Funktion

$$y = \frac{e^{i\vartheta_1} + z}{e^{i\vartheta_1} - z}$$

im Inneren des Einheitskreises regulär, ihr reeller Teil ist positiv innerhalb dieses Gebietes und sie nimmt für $z = 0$ den Wert 1 an. Der n^{te} geometrische Repräsentant dieser Funktion ist also ein Punkt von $\mathfrak{K}_n$; er hat aber die Koordinaten

$$c_k = 2\cos k\vartheta_1, \qquad \bar{c}_k = -2\sin k\vartheta_1,$$

und es folgt aus (22) für diesen Punkt

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) = 2M.$$

Es ist also wegen (17)

$$2M \leqq \sum_{k=1}^{n} (u_k \gamma_k + \bar{u}_k \bar{\gamma}_k)$$

und der Vergleich mit (21) liefert

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k \gamma_k + \bar{u}_k \bar{\gamma}_k) = 2M. \tag{23}$$

Es sei jetzt eine Reihe

$$P_1, P_2, P_3, \cdots$$

von unendlich vielen Punkten des *Inneren* von $\mathfrak{K}_n$ gegeben, die gegen unseren Punkt π konvergieren, und man bezeichne mit

$$c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \cdots, c_n^{(m)}; \qquad \bar{c}_1^{(m)}, \bar{c}_2^{(m)}, \cdots, \bar{c}_n^{(m)}$$

die Koordinaten des Punktes P_m; wir können wegen (17) und (23) schreiben

$$\sum_{k=1}^{n}\left(u_k c_k^{(m)} + \bar{u}_k \bar{c}_k^{(m)}\right) = 2M - \varepsilon_m^2, \tag{24}$$

wobei ε_m eine von Null verschiedene Größe bedeutet und

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \varepsilon_m = 0$$

ist. Es sei weiter y_m eine auf dem Einheitskreise noch konvergierende Potenzreihe, die allen unseren Bedingungen genügt und deren Repräsentant P_m ist, $f_m(\vartheta)$ der reelle Teil von y_m auf diesem Kreise.

Es gilt nach (19) und (24) die Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\,\Phi(\vartheta)\,d\vartheta = 2M - \varepsilon_m^2. \tag{25}$$

Nun seien mit

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_p$$

die sämtlichen Werte von ϑ zwischen 0 und 2π bezeichnet, für welche

$$\Phi(\vartheta) = \sum_{k=1}^{n}(u_k \cos k\vartheta - \bar{u}_k \sin k\vartheta)$$

seinen Maximalwert M erreicht; da diese Größe aus einer abgebrochenen Fourierschen Reihe besteht, die mit den Gliedern in $\cos n\vartheta$ und $\sin n\vartheta$ aufhört, so kann sie, was auch die Werte der Konstanten u_k, $\bar{u}_k$ sein mögen, im Intervalle von 0 bis 2π nie mehr als n Maxima überhaupt aufweisen und es ist

$$p \leqq n.$$

Für hinreichend kleine Werte von ε_m oder, was dasselbe ist, für hinreichend große Werte von m werden durch die Bedingung

$$\Phi(\vartheta) \geqq M - \varepsilon_m$$

im Intervalle von 0 bis 2π genau p voneinander getrennte Teilintervalle*)

$$\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \cdots, \delta_p^{(m)}$$

---

*) oder höchstens $p+1$, von denen aber dann zwei die Endpunkte 0 und 2π enthalten.

definiert; jedes dieser Teilintervalle konvergiert gegen Null, wenn m unbeschränkt wächst. Man bezeichne mit $L_0^{(m)}$ den Wert von

$$\frac{1}{2\pi}\int f_m(\vartheta)\,d\vartheta$$

über das Äußere der sämtlichen Teilintervalle, mit $L_j^{(m)}$ den Wert desselben Integrals für das Intervall $\delta_j^{(m)}$. Es ist wegen (4) für jedes m

$$L_0^{(m)} + L_1^{(m)} + \cdots + L_p^{(m)} = 1; \tag{26}$$

andererseits hat man

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\,\Phi(\vartheta)\,d\vartheta \leqq 2L_0^{(m)}\left(M-\varepsilon_m\right) + 2M\left(L_1^{(m)} + L_2^{(m)} + \cdots + L_p^{(m)}\right).$$

Aus (25) und (26) folgt also

$$2M - \varepsilon_m^2 \leqq 2M - 2L_0^{(m)}\varepsilon_m$$

oder

$$L_0^{(m)} \leqq \frac{\varepsilon_m}{2};$$

folglich ist auch

$$\lim_{m=\infty} L_0^{(m)} = 0. \tag{27}$$

Aus der Menge der Funktionen y_m kann man nun eine Teilmenge absondern, so daß für jedes

$$j = 1, 2, \cdots, p$$

die $L_j^{(m)}$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren; man hat dann

$$\lim_{m=\infty} L_j^{(m)} = \lambda_j$$

und wegen (26) und (27)

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1;$$

die λ_j können nach ihrer Definition wegen der Bedingung

$$f_m(\vartheta) \geqq 0$$

niemals negativ sein.

Wir können mit Hilfe der gefundenen Resultate die Koordinaten

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n; \qquad \bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \cdots, \bar\gamma_n$$

unseres Grenzpunktes π wirklich bestimmen; denn es ist

$$\gamma_k = \lim_{m=\infty} c_k^{(m)}, \qquad \bar\gamma_k = \lim_{m=\infty} \bar c_k^{(m)};$$

$$c_k^{(m)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\bar{c}_k^{(m)} = \frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta$$

und der Mittelwertsatz liefert, wenn man berücksichtigt, daß die Intervalle $\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \cdots, \delta_p^{(m)}$ mit wachsendem m unendlich klein werden,

$$\begin{cases} \gamma_k = 2\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \sin k\vartheta_j. \end{cases}$$

Wenn wir nun bemerken, daß p höchstens gleich n ist, so sehen wir, daß *jeder* Punkt π der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ die Koordinaten

$$\text{(28)}\qquad \begin{cases} \gamma_k = 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \sin k\vartheta_j \end{cases}$$

besitzt, wobei ϑ_j, λ_j geeignete Konstanten bedeuten, die den Bedingungen

$$\text{(29)}\qquad \begin{cases} 0 \leqq \vartheta_j \leqq 2\pi, \quad \lambda_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \end{cases}$$

genügen.

Sind umgekehrt ϑ_j und λ_j irgend welche $2n$ reelle Zahlen, welche die Bedingungen (29) befriedigen, so stellen die Gleichungen (28) die Koordinaten eines Punktes P von $\mathfrak{K}_n$ dar; denn P ist der n^{te} geometrische Repräsentant der Funktion

$$\text{(30)}\qquad y = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z},$$

und diese erfüllt unsere sämtlichen Bedingungen: sie ist regulär und ihr reeller Teil ist positiv für

$$|z| < 1,$$

und für $z = 0$ ist $y = 1$.

Läßt man also die Größen

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

innerhalb der Grenzen (29) *unbeschränkt variieren, so wird der Punkt, dessen Koordinaten durch die Gleichungen*

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_k &= \quad 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{\gamma}_k &= -2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \sin k\vartheta_j \end{aligned}\right. \tag{31}$$

gegeben sind, den konvexen Körper $\mathfrak{K}_n$ *nie verlassen und es wird jeder Punkt der Oberfläche* $\mathfrak{O}_n$ *dieses Körpers mindestens für ein System von Werten* ϑ_j, λ_j *erreicht werden.*

§ 4.

Eindeutigkeit.

Es muß nun gezeigt werden, daß die rationalen Funktionen der Form (30) die *einzigen* sind, welche unsere sämtlichen Bedingungen erfüllen und einen Punkt π der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ zum geometrischen Repräsentanten haben. Man nehme an, daß $y(z)$ eine Funktion sei, welche dies leiste; dann ist die Funktion $y = y(rz)$ für jedes $r < 1$ auch auf dem Einheitskreise regulär und wir können für den reellen Teil dieser letzten Funktion auf dem Einheitskreise die Bezeichnung $f(r, \vartheta)$ einführen. Wir werden von der Bemerkung sofort Gebrauch machen, daß $f(r, \vartheta)$ auch den reellen Teil der ursprünglichen Funktion $y(z)$ auf dem Kreise $re^{i\vartheta}$ darstellt.

Da der Repräsentant von $y(rz)$ im *Inneren* von $\mathfrak{K}_n$ liegt, so hat man die der Gleichung (25) analoge Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \vartheta)\,\Phi(\vartheta)\,d\vartheta = M - \varepsilon^2(r),$$

wobei $\varepsilon(r)$ eine von Null verschiedene positive Größe bedeutet, und es ist, weil der n^{te} geometrische Repräsentant von $y(rz)$ sich stetig mit r ändert,

$$\lim_{r=1} \varepsilon(r) = 0.$$

Nun betrachte man wieder die Intervalle

$$\delta_1(r), \ \delta_2(r), \cdots, \delta_p(r),$$

innerhalb welcher

$$\Phi(\vartheta) \geqq M - \varepsilon(r)$$

ist, und bezeichne mit $L_j(r)$ den Wert des Integrals

$$\int f(r, \vartheta)\, d\vartheta$$

innerhalb des Intervalls $\delta_j(r)$ genommen. Man kann jedenfalls eine Reihe von wachsenden positiven Größen

$$r_1, r_2, r_3, \cdots \tag{32}$$

bestimmen, welche alle <1 sind, gegen Eins konvergieren und die Eigenschaft haben, daß für jedes

$$j = 1, 2, \cdots, p,$$
$$\lim_{n=\infty} L_j(r_n) = \lambda_j$$

existiert.

Nun betrachte man die Funktion

$$\bar{y}(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z},$$

wo die λ_j durch die soeben bestimmten Werte gegeben sind und die ϑ_j dieselbe Bedeutung haben wie früher; die Größen λ_j, ϑ_j genügen ihrer Konstruktion nach den Beziehungen (29), so daß $\bar{y}(z)$ unsere sämtlichen Bedingungen ebenfalls erfüllt. Man bezeichne mit $\bar{f}(r, \vartheta)$ den reellen Teil von $\bar{y}(z)$ auf dem Kreise $re^{i\vartheta}$.

Ist nun

$$z = \varrho e^{i\psi}$$

ein willkürlicher Punkt im Inneren des Kreises $|z| < 1$, so sind in der Reihe (32) für hinreichend große n sämtliche $r_n > \varrho$ und es kann $f(\varrho, \psi)$ durch das Poissonsche Integral für einen Kreis mit dem Radius r_n

$$f(\varrho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_n, \vartheta)\,(r_n^2 - \varrho^2)}{r_n^2 - 2 r_n \varrho \cos(\vartheta - \psi) + \varrho^2}\, d\vartheta$$

ausgedrückt werden. Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung von n unabhängig und man bekommt, wenn man n gegen Unendlich konvergieren läßt und das Integral ähnlich wie früher abschätzt (pag. 106),

$$f(\varrho, \psi) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j (1 - \varrho^2)}{1 - 2\varrho \cos(\vartheta_j - \psi) + \varrho^2}.$$

Genau denselben Ausdruck würde man bei der Berechnung von $\bar{f}(\varrho, \psi)$ erhalten, so daß schließlich die Gleichung

$$f(\varrho, \psi) = \bar{f}(\varrho, \psi)$$

in ϱ und ψ identisch erfüllt ist; hieraus folgt endlich, da

$$y(0) = \bar{y}(0) = 1$$

ist,

$$y(z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z},$$

d. h. die Beziehung, die wir beweisen wollten.

Zugleich hat sich ergeben, daß die Punkte der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ sich auf *eindeutige* Weise durch die Formeln (28) darstellen lassen; jedesmal nämlich, wo die Größen (λ_j, ϑ_j) und $(\lambda'_j, \vartheta'_j)$ in die Formeln eingesetzt dieselben Werte für γ_k, $\bar{\gamma}_k$ liefern würden, müßte nach dem vorhergehenden die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z} = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j \frac{e^{i\vartheta'_j} + z}{e^{i\vartheta'_j} - z}$$

identisch in z erfüllt sein, woraus folgt, daß die λ_j, ϑ_j und λ'_j, ϑ'_j bis auf die Reihenfolge auch identisch sind.

Man hat also den Satz: *Es gibt nur eine Funktion, deren Repräsentant ein gegebener Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ ist, und diese ist rational und höchstens vom n^{ten} Grade.*

§ 5.

Vollständigkeit der Darstellung.

Um auch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen d. h. daß der Repräsentant jeder rationalen Funktion, die sich in der Form (30) darstellen läßt, der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ gehört, müssen wir die geometrischen Eigenschaften von $\mathfrak{K}_n$ etwas näher betrachten.

Man bemerke zunächst, daß jeder Punkt der Oberfläche oder des Inneren des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$ als Projektion im $2n$-dimensionalen Raume eines Punktes der Oberfläche $\mathfrak{O}_{n+1}$ (die im $(2n+2)$-dimensionalen Raume liegt) angesehen werden kann. Hieraus folgt, daß die Koordinaten jedes Punktes von $\mathfrak{K}_n$ sich in der Form

$$(33)\qquad \begin{cases} c_k = \quad 2\sum\limits_{j=1}^{(n+1)} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \\ \bar{c}_k = -2\sum\limits_{j=1}^{(n+1)} \lambda_j \sin k\vartheta_j, \\ \qquad k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

darstellen lassen, wobei die λ_j alle positiv oder Null und ihre Summe gleich Eins ist.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}_n$ die Kurve, welche durch den Punkt mit den Koordinaten

$$2\cos\vartheta,\quad 2\cos 2\vartheta,\ \cdots,\quad 2\cos n\vartheta,$$
$$-2\sin\vartheta,\ -2\sin 2\vartheta,\ \cdots,\ -2\sin n\vartheta$$

im $2n$-dimensionalen Raume beschrieben wird, wenn ϑ von 0 bis 2π variiert. Die Punkte dieser Kurve gehören als Repräsentanten der Funktionen

$$y(z) = \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}$$

sämtlich zu $\mathfrak{K}_n$. Sind

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_p$$

die Punkte von $\mathfrak{C}_n$, welche den Werten

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \cdots,\ \vartheta_p$$

von ϑ entsprechen, die in (33) vorkommen, (wobei angenommen wird, daß

$$p \leqq n+1$$

und

$$\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$$

ist), so enthält *jeder* konvexe Körper, dem die Punkte $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_p$ gehören, auch den Punkt mit den Koordinaten (33); dieses kann ohne weiteres mit Hilfe unserer Definition eines konvexen Körpers und Anwendung des Schlusses von n auf $(n+1)$ bewiesen werden.

Aus diesen sämtlichen Tatsachen folgt, daß *jeder* Punkt von $\mathfrak{K}_n$ in *jedem* konvexen Körper enthalten ist, dem die Kurve $\mathfrak{C}_n$ angehört, das heißt *daß $\mathfrak{K}_n$ der kleinste konvexe Körper ist, der $\mathfrak{C}_n$ enthält.*

Jede Stützebene von $\mathfrak{C}_n$ ist also Stützebene von $\mathfrak{K}_n$, sonst würde derjenige Teil $\mathfrak{K}'_n$ von $\mathfrak{K}_n$, der auf derselben Seite der Stützebene wie $\mathfrak{C}_n$ liegt, schon einen konvexen Körper bilden, der $\mathfrak{C}_n$ enthält und der kleiner wäre als $\mathfrak{K}_n$. Ähnlich sieht man, daß jede Stützebene von $\mathfrak{K}_n$ auch Stützebene von $\mathfrak{C}_n$ sein muß.

Es sei nun ein Punkt P mit den Koordinaten

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma_k = 2\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \cos k\vartheta_j, \qquad \bar{\gamma}_k = -2\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \sin k\vartheta_j \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \cdots, n \\ \qquad\qquad p \leqq n \end{array}\right.$$

gegeben, wobei die λ_j wie immer positiv sind und zur Summe Eins haben.

Ich will zeigen, daß dieser Punkt ein Punkt der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{K}_n$ ist; dieses kann dadurch bewiesen werden, daß wir eine Stützebene von $\mathfrak{K}_n$ oder, was dasselbe ist, von $\mathfrak{C}_n$ konstruieren, die den Punkt P enthält.

Wir betrachten dazu eine Reihe von n getrennten Punkten auf $\mathfrak{C}_n$, unter welchen sämtliche Punkte enthalten sind, die den Werten

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_p$$

in (34) entsprechen.

Jede $(2n-1)$-dimensionale Ebene, welche diese n Punkte enthält, muß durch P gehen. Nun gibt es aber eine solche Ebene von der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k c_k + \bar{u}_k \bar{c}_k) = 2d, \tag{35}$$

welche in jedem der n Punkte die Kurve $\mathfrak{C}_n$ berührt; man braucht nur die Verhältnisse der $2n+1$ Größen u_k, $\bar{u}_k$ und d durch die $2n$ linearen Gleichungen

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n}(u_k \cos k\vartheta_j - \bar{u}_k \sin k\vartheta_j) = d, \\ \sum_{k=1}^{n}(k u_k \sin k\vartheta_j + k\bar{u}_k \cos k\vartheta_j) = 0 \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

zu bestimmen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k \cos k\vartheta - \bar{u}_k \sin k\vartheta) = d \tag{36}$$

hat, wenn ϑ von 0 bis 2π variiert, höchstens $2n$ reelle Wurzeln; er kann also in diesem Intervalle nur für die Werte

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$$

verschwinden, da jedem dieser Werte eine Doppelwurzel entspricht. In der Umgebung eines jeden dieser Werte behält er aber dasselbe Vorzeichen; folglich muß er für alle Werte von ϑ, für welche er nicht verschwindet, ein und dasselbe Vorzeichen haben. Mit anderen Worten: es stellt (35) die gesuchte Stützebene von $\mathfrak{C}_n$ dar, welche den Punkt P enthält.

Hieraus folgt nun, daß die Gleichungen (28) *ausschließlich* Punkte der Oberfläche $\mathfrak{O}_n$ darstellen können, und da wir im § 4 die Eindeutigkeit der Darstellung für diese Punkte bewiesen haben, so folgt ganz allgemein, daß Gleichungen wie

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j \cos k\vartheta_j - \mu_j \cos k\psi_j) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j \sin k\vartheta_j - \mu_j \sin k\psi_j) = 0$$

$$k = 1, 2, \cdots, n$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 0 \leqq \vartheta_j < 2\pi, & 0 \leqq \psi_j < 2\pi, \\ \lambda_j \geqq 0, & \mu_j \geqq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, & \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \end{cases}$$

nur dann gelten können, wenn bei geeigneter Anordnung der μ_j, ψ_j

$$\begin{cases} \lambda_j = \mu_j, \quad \vartheta_j = \psi_j \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

sind.

Wenn man also in den Formeln (28) *die* ϑ_j, λ_j, *bei Berücksichtigung der Bedingungen* (29), *unbeschränkt variiert, so wird die Oberfläche* $\mathfrak{O}_n$ *des Variabilitätsgebietes der Koeffizienten beschrieben, und die Beziehung zwischen den Punkten dieser Oberfläche und den Wertsystemen für die* λ_j, ϑ_j *ist eine eineindeutige.*

Jeder Punkt des Variabilitätsgebietes $\mathfrak{K}_n$ wird ferner erreicht, wenn man die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

durch die andere

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leqq 1$$

ersetzt. Man hat also folgenden Satz:

Jeder Punkt P des Variabilitätsgebietes $\mathfrak{K}_n$ *ist der* n^{te} *geometrische Repräsentant einer und nur einer rationalen Funktion der Form*

$$(37) \qquad \begin{cases} y = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z}, \\ \lambda_j \geqq 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1; \end{cases}$$

für $\lambda_0 = 0$ *liegt der Punkt P auf der Oberfläche* $\mathfrak{O}_n$ *von* $\mathfrak{K}_n$ *und die Funktionen* (37) *sind die einzigen, deren Repräsentant auf* $\mathfrak{O}_n$ *zu liegen kommt.*

§ 6.

Allgemeine Probleme.

Wir wollen jetzt die gefundenen Resultate auf die allgemeinen Probleme anwenden und nehmen an, es sei T ein Gebiet der Ebene der komplexen Veränderlichen u oder auch einer Riemannschen Fläche, welche auf dieser Ebene ausgebreitet ist, und man könne mit Hilfe einer analytischen Funktion $\varphi(y)$ die Halbebene

$$\Re(y) \geqq 0$$

auf dieses Gebiet abbilden; dabei gehe der Punkt $y = 1$ in einen regulären Punkt

$$u = M_0 = m_0 + i\overline{m}_0$$

des Inneren von T über. Die Funktion $\varphi(y)$ kann in der Umgebung des Punktes $y = 1$ in eine konvergente Potenzreihe der Form

$$(38) \qquad u = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k (y-1)^k$$

entwickelt werden, wobei

$$|M_1| \neq 0$$

ist; man kann also die Reihe (38) in der Umgebung von $u = M_0$ umkehren und z. B. schreiben

$$(39) \qquad y - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} N_k (u - M_0)^k$$

oder

$$y = \psi(u).$$

Nun sei $u(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z, welche für alle Werte

$$|z| < 1$$

auf das Innere des Gebietes T beschränkt bleibt, in diesem Gebiete regulär ist und für $z = 0$ den Wert $u = M_0$ annimmt; es kann nach den gemachten Voraussetzungen diese Funktion in der Umgebung von $z = 0$ in die konvergente Potenzreihe

$$(40) \qquad u = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k$$

entwickelt werden, und wir wollen nach dem Variabilitätsgebiete des n^{ten} geometrischen Repräsentanten dieser Potenzreihe fragen.

Setzt man in (39) für u die gegebene Funktion $u(z)$ ein, so wird y eine Funktion von z sein, welche sämtlichen am Anfange dieser Arbeit geschilderten Bedingungen genügt. Man wird sie also in die konvergente Potenzreihe

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k \tag{41}$$

entwickeln können und der n^{te} geometrische Repräsentant dieser Potenzreihe wird im Inneren oder auf der Oberfläche unseres früheren Körpers $\mathfrak{K}_n$ liegen.

Die Gleichungen (38) und (39), mit (40) und (41) verbunden, liefern jetzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \left[\sum_{l=1}^{\infty} C_l z^l\right]^j,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k = \sum_{j=1}^{\infty} N_j \left[\sum_{l=1}^{\infty} A_l z^l\right]^j,$$

und man kann mit Hilfe dieser letzten Beziehungen, wenn man die Koeffizienten derselben Potenzen von z rechts und links vergleicht, sowohl A_k als ganze rationale Funktion von $C_1, C_2, \cdots, C_k$, wie auch C_k als ganze rationale Funktion von $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ausdrücken.

Die n^{ten} geometrischen Repräsentanten der Potenzreihen (40) und (41) entsprechen also einander in eineindeutiger Weise und die birationale Transformation des $2n$-dimensionalen Raumes, welche diese Abbildung bewirkt, hängt nur von allen reellen und imaginären Teilen der n ersten Koeffizienten $M_1, M_2, \cdots, M_n$ der Potenzreihe (38) ab. Den Variabilitätsbereich K_n der n Koeffizienten $A_1, A_1, \cdots, A_n$ erhält man nun dadurch, daß man auf unseren früheren Körper $\mathfrak{K}_n$ die Transformation ausübt, und die Oberfläche Ω_n von K_n enthält ausschließlich die Repräsentanten von Funktionen der Form

$$\varphi\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n}{\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n}\right), \tag{42}$$

wobei $\varphi(y)$ wieder die Funktion bezeichnet, welche die Halbebene auf das Gebiet T abbildet, und die α, β geeignete Konstanten bedeuten.

Alle unsere früheren Sätze lassen sich in geeignet modifizierter Form auf den Körper K_n übertragen. Insbesondere lassen sich die Koordinaten der Oberfläche Ω_n von K_n als rationale Funktionen der früher benutzten Parameter

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_j, \quad \cos k\vartheta_j, \quad \sin k\vartheta_j, \\ \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \quad k = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right.$$

ausdrücken. Dadurch, daß die Transformation eine birationale ist, ist man versichert, daß zwei Punkte von Ω_n, die verschiedenen Werten der Parameter entsprechen, nie zusammenfallen können, und daß folglich die Oberfläche Ω_n sich nicht selbst schneidet und der Körper K_n einfach zusammenhängend ist.

Man kann ferner die Theorie, wie ich es in meiner Comptes Rendus Note (26. Dezember 1905) angedeutet habe, auch auf solche Fälle erstrecken, bei welchen der Punkt $u = M_0$ des Gebietes T singulär ist, die Funktion $u(r)$ aber auf T eindeutig bleibt; dann besitzt die Funktion $u(z)$ zwar auch eine Singularität für $z = 0$, aber die Potenzreihe (41) ist trotzdem regulär in diesem Punkte und dieses genügt, um auch hier den Körper K_n aufzustellen.

Brüssel, den 14. September 1906.