Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i. B.

In dem vorliegenden Aufsatze habe ich einen neuen Begriff, nämlich den der vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung, eingeführt. Er ist insofern für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen von Bedeutung, als zu jeder linearen homogenen Differentialgleichung eine eindeutig bestimmte, größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung gehört, und diese letztere über alle irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung genügen, Auskunft erteilt. Von den erzielten Resultaten hebe ich an dieser Stelle nur hervor: Jede vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist entweder nur auf eine einzige Art oder auf unendlich viele Arten kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung durch die Integrale von unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen erfüllt wird, ist, daß die zu der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung zugehörige, größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung auf unendlich viele Arten kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen ist.

Bei der Abfassung der Arbeit habe ich mich nur der einfachsten Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen bedient und diese im § 2 zusammengestellt. Nicht benützt wurde die Picard-Vessiotsche Theorie der Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung. Die Kenntnis meines früher veröffentlichten Aufsatzes „Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen“*), mit dem die vorliegende

*) Math. Annalen, Bd. 56, S. 549.

Veröffentlichung in innigstem Zusammenhange steht, ist für die Lektüre dieses Aufsatzes nicht erforderlich; ein Teil der früher gewonnenen Resultate ergibt sich, wie ich zeige, aus den hier erhaltenen.

§ 1.

Der Rationalitätsbereich.

Für die folgenden Untersuchungen denken wir uns einen Rationalitätsbereich Σ zugrunde gelegt. Ein Rationalitätsbereich Σ wird von irgend einem derartig vollständigen oder in sich abgeschlossenen Systeme von Funktionen einer unabhängigen Variablen x gebildet, daß man die Funktionen des Systems unbeschränkt untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null), sowie eine jede differentiieren kann, ohne hierdurch das vorgelegte Funktionensystem zu verlassen. Von den Funktionen von Σ wird auch vorausgesetzt, daß jede einzelne dieser Funktionen ausnahmslos in demselben Bereiche S der Ebene eine eindeutige, bis auf isolierte Punkte überall in S reguläre analytische Funktion sein soll. Vielleicht ist es noch gut, zu bemerken, daß die Gesamtheit aller Punkte von S, die als Singularitäten für die Funktionen von Σ in Frage kommen, nicht etwa ein System isolierter Punkte zu bilden braucht, sondern nur gefordert wird, daß *jede einzelne* Funktion von Σ innerhalb des Bereiches S ausnahmslos isolierte Singularitäten hat.

Sei (Q):

$$q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)y = 0$$

irgend eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche Σ angehören sollen.*) Da infolge der über Σ gemachten Voraussetzungen jede einzelne Funktion aus Σ und daher auch die m Funktionen:

$$\frac{q_1(x)}{q_0(x)}, \frac{q_2(x)}{q_0(x)}, \ldots, \frac{q_m(x)}{q_0(x)}$$

nur an isolierten Punkten innerhalb des Bereiches S aufhören regulär zu sein, so gibt es ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen von (Q), das bis auf isolierte Punkte innerhalb S regulär ist und durch seine Anfangswerte und die seiner $m-1$ ersten Abgeleiteten für eine beliebige Stelle $x = x_0$ im Innern von S, an der die Funktionen

$$\frac{q_1(x)}{q_0(x)}, \frac{q_2(x)}{q_0(x)}, \ldots, \frac{q_m(x)}{q_0(x)}$$

---

*) Alle im folgenden auftretenden Differentialgleichungen und Differentialausdrücke haben ausnahmslos Koeffizienten aus Σ.

sämtlich regulär sind, festgelegt werden kann. Bei unserer Wahl von Σ ist mithin für jede lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ die Integralexistenz gesichert. Auf die Frage, ob und wie man die Voraussetzungen für den Rationalitätsbereich Σ noch beschränken kann, ohne daß eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ Integrale zu besitzen aufhört, gehen wir nicht ein. Wir wollen nur einige Beispiele für einen Rationalitätsbereich Σ anführen, wie er durch die obigen Voraussetzungen festgelegt wurde. Einen Rationalitätsbereich Σ bildet offenbar die Gesamtheit der Konstanten irgend eines unendlichen Zahlkörpers (z. B. alle rationalen Zahlen oder alle reellen Zahlen) oder die Gesamtheit aller rationalen Funktionen einer Variablen x mit Koeffizienten aus einem beliebigen unendlichen Zahlkörper. Ein Rationalitätsbereich Σ im obigen Sinne braucht also nicht alle Konstanten zu enthalten. Als Beispiel für einen Rationalitätsbereich Σ können auch alle eindeutigen analytischen Funktionen, die innerhalb eines Bereiches S ausnahmslos überall den Charakter rationaler Funktionen haben, angeführt werden.

Hat man eine endliche Anzahl von Funktionen $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$, die in der Ebene einen gemeinsamen Stetigkeitsbereich S besitzen, in dem jede dieser Funktionen ausnahmslos eindeutig und regulär analytisch ist, und bildet das kleinste Funktionensystem P, das durch $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ entsteht und in sich derartig abgeschlossen ist, daß man je zwei Funktionen des Systems untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null), sowie eine jede differentiieren kann, ohne hierdurch das Funktionensystem P zu verlassen, so enthält P wegen der Voraussetzung, daß die Funktionen $p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ in S regulär sind, nur Funktionen mit polaren Unstetigkeiten in S; die singulären Punkte jeder Funktion von P sind also in S isoliert, und P ist mithin ein Rationalitätsbereich Σ in dem oben verlangten Sinn. Hat man eine lineare homogene Differentialgleichung:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x)\, y = 0$$

und geht nicht, wie wir es im folgenden tun werden, von einem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ als dem Primären, sondern von der Differentialgleichung selbst als dem ursprünglichen Elemente aus, so ist der Rationalitätsbereich P der kleinste Rationalitätsbereich, für den man die Differentialgleichung untersuchen wird.

§ 2.

Zusammenstellung von Hilfssätzen.

Wir stellen die im folgenden verwandten Hilfssätze zusammen. Von irgend einer rationalen Funktion eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung (Q) und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ sagt man, sie ist eine *symmetrische* Funktion des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und dessen Abgeleiteten, wenn sie als Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten formal invariant bleibt, falls man $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleitete den Substitutionen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe unterwirft, d. h. y_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ durch

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{im} y_m \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

ersetzt, wobei die Größen a^i_k ein System von m^2 beliebigen Konstanten bedeuten. Hat man irgend eine rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ, so kann man mit Hilfe der linearen homogenen Differentialgleichung m^{te} und höhere Abgeleitete beseitigen und erhält durch diese Reduktion eine rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$, die deren Abgeleitete höchstens bis zur $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung enthält und, da die vorgelegte Differentialgleichung (Q) nur Koeffizienten aus Σ hat, ebenfalls nur Koeffizienten aus Σ besitzt. Man beweist, daß jede rationale symmetrische Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ, die keine höheren als $m-1^{\text{te}}$ Abgeleitete enthält, frei von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten, also eine bloße Funktion aus Σ, ist. Mithin hat man den bekannten, auf Herrn Appell zurückgehenden Satz:

*Jede rationale symmetrische Funktion eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ist als bloße Funktion des Rationalitätsbereiches Σ ausdrückbar.**)

Ist R irgend ein linearer homogener Differentialausdruck, so ist unter dem symbolischen Produkt QR bekanntlich der lineare homogene Differentialausdruck:

$$q_0(x) \frac{d^m R}{dx^m} + q_1(x) \frac{d^{m-1} R}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x) R$$

---

*) Appell, Sur les équations différentielles linéaires. Annales de l'École Normale (2), 10 (1881). Beweise des Satzes findet man u. a. in Picards Traité d'Analyse, t. 3 (1896), 509 und in Ludwig Schlesingers Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 1 (1895), 41.

zu verstehen, falls Q den linearen homogenen Differentialausdruck

$$q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m}+q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+q_m(x)y$$

vorstellt. Haben Q und R nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, so trifft dies auch für QR zu. Für diese symbolische Zerlegung gilt folgender bekannter Satz:

Wird eine lineare homogene Differentialgleichung $D=0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ durch alle Integrale einer ebenfalls linearen homogenen Differentialgleichung $E=0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ erfüllt, so gibt es einen linearen homogenen Differentialausdruck E_1 mit Koeffizienten aus Σ, so daß symbolisch $D=E_1 E$ wird. $E_1=0$ ist eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Ordnung gleich der Differenz der Ordnungen von $D=0$ und $E=0$ ist.

Eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ heißt in bezug auf den Rationalitätsbereich Σ *irreduzibel*, wenn sie mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, die ebenfalls nur Koeffizienten aus Σ besitzt, ein Integral gemeinsam hat; anderenfalls heißt sie für den Rationalitätsbereich Σ *reduzibel*. Dann gilt der Satz des Herrn Frobenius: Eine lineare homogene Differentialgleichung $D=0$ mit Koeffizienten aus Σ, die mit einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $J=0$ mit Koeffizienten aus Σ ein Integral gemeinsam hat, wird durch jedes Integral von $J=0$ erfüllt.*)

Für die folgenden Betrachtungen sehr wichtig ist auch der Begriff des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* zweier linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ. Haben die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $D_1=0$ und $D_2=0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ kein Integral gemeinsam, so gibt es eine lineare homogene Differentialgleichung $U=0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von $D_1=0$ und $D_2=0$ ist und die durch alle Integrale von $D_1=0$ und $D_2=0$ erfüllt wird.**) Der lineare homogene Differentialausdruck U, das kleinste gemeinsame Vielfache von D_1 und D_2, ist bis auf einen nur von x abhängigen, willkürlichen, allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor völlig bestimmt und nach einem der angegebenen Sätze sowohl durch D_1 als auch durch D_2 teilbar. Mithin wird:

$$U=AD_1;\quad U=BD_2.$$

*) Für die angeführten Sätze kann man neben der fundamentalen Abhandlung von Frobenius, Über den Begriff der Irreduzibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76 (1873), 236 etwa die Darstellung in Ludw. Schlesingers Handbuch, Bd. 1, S. 43—46 und S. 81—85 vergleichen.

**) Der Fall, daß $D_1=0$ und $D_2=0$ einige Integrale gemeinsam haben, wird im folgenden nicht verwandt werden.

A und B bedeuten hierbei lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus Σ.*)

Schließlich verwenden wir im folgenden noch den Begriff, daß zwei lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ:

$$Q \equiv q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)\,y = 0,$$

$$R \equiv r_0(x)\frac{d^n z}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + r_n(x)\,z = 0$$

*von derselben Art***) sind. Man sagt: die Gleichung $R = 0$ ist mit der Gleichung $Q = 0$ von derselben Art, falls man von den Integralen der Differentialgleichung $Q = 0$ zu denen der Differentialgleichung $R = 0$ durch die Beziehung:

$$z = a_0(x)\,y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

übergehen kann; hierbei sollen $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{m-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ sein. Nach unserer Definition sind alle linearen homogenen Differentialgleichungen, die mit einer vorgegebenen von derselben Art sind, mit ihr von gleicher oder niedrigerer Ordnung. Ist die lineare homogene Differentialgleichung $Q = 0$ mit einer linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$ von m^{ter} oder höherer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ von derselben Art, so ist offenbar auch $R = 0$ mit $P = 0$ von derselben Art. Im Falle $n < m$ ist, wenn $R = 0$ mit $Q = 0$ von derselben Art ist, nicht umgekehrt $Q = 0$ mit $R = 0$ von derselben Art, also die eingeführte Beziehung nicht wechselseitig. Für $n = m$ gilt der leicht herleitbare Satz von L. Fuchs: Gehören von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen derselben Ordnung die eine mit der anderen zu derselben Art, so sind die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art.

Wir brauchen noch folgenden Satz von Fuchs: Ist eine lineare homogene Differentialgleichung irreduzibel, so sind alle linearen homogenen Differentialgleichungen, die mit ihr von derselben Art sind, ebenfalls ausnahmslos irreduzibel und von der gleichen Ordnung.***)

---

*) Brassinne, Note 3 in Ch. Sturms Cours d'Analyse, t. 2. L. Heffter, Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 116, S. 157. E. Beke, Symmetrische Funktionen bei linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. Bd. 45, S. 297.

**) Die Bezeichnung stammt für $n = m$ von Herrn Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta mathematica, Bd. 5 (1884), S. 212.

***) L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1888, S. 1274 ff. Vgl. auch die Darstellung in Ludw. Schlesingers Handbuch, Bd. 2_1, S. 120.

Ist im besonderen in der angeführten Relation

$$a_1(x) = a_2(x) = \cdots = a_{m-1}(x) = 0,$$

so sagen wir, die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $Q = 0$ und $R = 0$ sind *ähnlich.* Irgend zwei lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ sollen also als *ähnlich* bezeichnet werden, wenn man aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der einen durch bloße Multiplikation mit einer dem Rationalitätsbereiche Σ angehörigen Funktion von x die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen der anderen Differentialgleichung finden kann. Der Begriff der Ähnlichkeit, der nur im Paragraphen 5 verwandt wird, ist stets ein gegenseitiger. Ähnliche Differentialgleichungen sind eine ganz spezielle Gattung von Differentialgleichungen derselben Art.

§ 3.

Vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen.

Die linke Seite einer jeden algebraischen Gleichung kann bei Zugrundelegung eines unendlichen Zahlkörpers als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler Polynome aufgefaßt werden. Dementsprechend betrachten wir diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen, bei denen sich die linke Seite als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialausdrücke auffassen läßt. Wir definieren:

Eine lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ mit Koeffizienten aus Σ heißt vollständig reduzibel, wenn man voneinander verschiedene) irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ mit Koeffizienten aus Σ finden kann, so daß die Ordnung der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$ gleich der Summe der Ordnungen von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ ist und $V = 0$ unter allen linearen homogenen Differentialgleichungen diejenige niedrigster Ordnung ist, die durch die Integrale aller Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ gleichzeitig erfüllt wird.*

Von der vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$ sagen wir auch: *sie ist das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen*

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0,\ \cdots,\ J_g = 0.$$

*) Als nicht verschieden gelten zwei lineare homogene Differentialgleichungen, die in sämtlichen Integralen übereinstimmen. Anders ausgedrückt: Alle diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen gelten als nicht verschieden, bei denen die linearen homogenen Differentialausdrücke, durch deren Nullsetzen die Differentialgleichungen entstehen, sich nur um einen Faktor, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches Σ ist, unterscheiden.

Eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung kann auch auf folgende Weise, die mit der obigen gleichwertig ist, charakterisiert werden: für sie existiert wenigstens ein Fundamentalsystem von Integralen, so daß jedes Element dieses Fundamentalsystems auch Integral einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ wird.

Ein *spezieller Fall der vollständig reduziblen* linearen homogenen Differentialgleichung ist die *irreduzible* lineare homogene Differentialgleichung.

Für vollständig reduzible Differentialgleichungen gilt folgender Satz:

I. *Ist $V = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, die das kleinste gemeinsame Vielfache der in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ist, und gibt es irgend eine von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1' = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V = 0$ genügen, so muß diese mit einer der irreduziblen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ notwendig von derselben Art sein.*

Die nach Voraussetzung voneinander verschiedenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ mögen die Ordnungen $i_1, i_2, \cdots, i_g$ haben. Wir bilden das kleinste gemeinsame Vielfache von $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$. Da $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen sind, deren linke Seiten sich nicht nur um einen bloß von x abhängigen Faktor unterscheiden, so haben sie kein Integral gemeinsam. Mithin wird ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, das mit $M_2 = 0$ bezeichnet sei, eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $i_1 + i_2$. Der lineare homogene Differentialausdruck M_2 ist sowohl durch J_1 als auch durch J_2 teilbar; daher existiert ein linearer homogener Differentialausdruck A_2 mit Koeffizienten aus Σ von der Ordnung i_2, so daß:

$$M_2 = A_2 J_1$$

wird.

Da $V = 0$ das kleinste gemeinsame Vielfache von

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$$

ist und die Ordnung $i_1 + i_2 + \cdots + i_g$ hat, so wird das kleinste gemeinsame Vielfache $M_2 = 0$ von $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ durch kein Integral von $J_3 = 0$ erfüllt. Wir suchen das kleinste gemeinsame Vielfache der zwei linearen homogenen Differentialausdrücke M_2 und J_3 und bezeichnen es mit M_3; dann wird $M_3 = A_3 M_2$.

Hierbei sind $M_3 = 0$ und $A_3 = 0$ lineare homogene Differentialgleichungen der Ordnungen $i_1 + i_2 + i_3$ bez. i_3 mit Koeffizienten aus Σ.

Wir fahren auf diesem Wege fort und bilden schließlich das kleinste gemeinsame Vielfache von $M_{g-1}=0$ und $J_g=0$; wir werden dann V selbst erhalten. Es wird

$$V = A_g M_{g-1};$$

hierbei ist $A_g=0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung i_g mit Koeffizienten aus Σ.

Ersetzt man $M_{g-1}, M_{g-2}, \cdots, M_2$ durch ihre Werte, so gewinnt man für V die Darstellung:

$$V = A_g A_{g-1} \cdots A_2 J_1.$$

Nach Voraussetzung ist $J_1'=0$ eine von $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_g=0$ verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ erfüllen. Da $J_1=0$ und $J_1'=0$ in ihren linken Seiten sich nicht um eine bloße Funktion von x unterscheiden, so wird wegen der Irreduzibilität der zwei Gleichungen kein Integral von $J_1'=0$ der Differentialgleichung $J_1=0$ genügen.

Da $J_1'=0$ eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung ist, so wird entweder kein Integral von $J_1'=0$ oder es werden sämtliche Integrale von $J_1'=0$ der linearen homogenen Differentialgleichung

$$M_2 \equiv A_2 J_1 = 0$$

genügen. Sollte kein Integral von $J_1'=0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $M_2=0$ genügen, so betrachten wir die lineare homogene Differentialgleichung $M_3 \equiv A_3 M_2 = 0$; entweder wird sie durch kein oder alle Integrale von $J_1'=0$ befriedigt. Fährt man auf diese Weise fort, so muß man sicher einmal zu einer linearen homogenen Differentialgleichung $M_{f-1}=0$ gelangen, die durch kein Integral von $J_1'=0$ befriedigt wird, wohingegen sämtliche Integrale von $J_1'=0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $M_f \equiv A_f M_{f-1} = 0$ genügen. Dies folgt aus dem Umstande, daß die lineare homogene Differentialgleichung $M_g=0$, deren linke Seite wir mit V bezeichnen können, nach Voraussetzung durch alle Integrale von $J_1'=0$ erfüllt wird.

Sei $y_1, y_2, \cdots, y_{i_f}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_f=0$. Da sämtliche Integrale von $J_f=0$ die Differentialgleichung $M_f=0$ befriedigen, schließen wir aus der Zerlegung $M_f = A_f M_{f-1}$, daß die lineare homogene Differentialgleichung $A_f=0$ die Funktionen

$$M_{f-1}(y_1),\ M_{f-1}(y_2),\ \cdots\ M_{f-1}(y_{i_f})$$

zu Integralen hat. Diese i_f Funktionen sind linear unabhängig. Aus einer Relation:

$$\lambda_1 M_{f-1}(y_1) + \lambda_2 M_{f-1}(y_2) + \cdots + \lambda_{i_f} M_{f-1}(y_{i_f}) = 0,$$

wobei die λ nicht ausnahmslos verschwindende Konstanten sind, würde nämlich:

$$M_{f-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{i_f} y_{i_f}) = 0$$

folgen, d. h. $J_f = 0$ und $M_{f-1} = 0$ hätten gegen die Voraussetzung ein Integral gemeinsam. Da $A_f = 0$ und $J_f = 0$ von der gleichen Ordnung sind, bilden die Funktionen $M_{f-1}(y_1), M_{f-1}(y_2), \cdots, M_{f-1}(y_{i_f})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $A_f = 0$, d. h. $A_f = 0$ ist mit $J_f = 0$ von derselben Art. Aus der Irreduzibilität von $J_f = 0$ folgt nach dem im § 2 angeführten Fuchsschen Satze, daß $A_f = 0$ auch eine in bezug auf den Rationalititätsbereich Σ irreduzible lineare homogene Differentialgleichung ist.

Sei $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_1' = 0$. Da sämtliche Integrale von $J_1' = 0$ die lineare homogene Differentialgleichung $M_f = 0$ erfüllen, kann aus der Zerlegung $M_f = A_f M_{f-1}$ der Schluß gezogen werden, daß die lineare homogene Differentialgleichung $A_f = 0$ die Funktionen $M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$ zu Integralen hat. Diese Funktionen sind linear unabhängig; denn sonst hätte $J_1' = 0$ mit $M_{f-1} = 0$ entgegen unserer obigen Festsetzung ein Integral gemein. Da wir von $A_f = 0$ i_1' linear unabhängige Integrale kennen, ist $A_f = 0$ mindestens von derselben Ordnung wie $J_1' = 0$.

Um den Nachweis zu führen, daß $A_f = 0$ keine lineare homogene Differentialgleichung höherer Ordnung als $J_1' = 0$ ist, bilden wir die lineare homogene Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} u & M_{f-1}(z_1) & M_{f-1}(z_2) & \cdots & M_{f-1}(z_{i_1'}) \\ \frac{du}{dx} & \frac{dM_{f-1}(z_1)}{dx} & \frac{dM_{f-1}(z_2)}{dx} & \cdots & \frac{dM_{f-1}(z_{i_1'})}{dx} \\ \vdots & & & & \\ \frac{d^{i_1'-1}u}{dx^{i_1'-1}} & \frac{d^{i_1'-1}M_{f-1}(z_1)}{dx^{i_1'-1}} & \frac{d^{i_1'-1}M_{f-1}(z_2)}{dx^{i_1'-1}} & \cdots & \frac{d^{i_1'-1}M_{f-1}(z_{i_1'})}{dx^{i_1'-1}} \\ \frac{d^{i_1'}u}{dx^{i_1'}} & \frac{d^{i_1'}M_{f-1}(z_1)}{dx^{i_1'}} & \frac{d^{i_1'}M_{f-1}(z_2)}{dx^{i_1'}} & \cdots & \frac{d^{i_1'}M_{f-1}(z_{i_1'})}{dx^{i_1'}} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir dividieren durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung in u. Die Division durch den Koeffizienten von $\frac{d^{i_1'}u}{dx^{i_1'}}$ ist gestattet; denn dieser Koeffizient ist die Wronskische Determinante der i_1' linear unabhängigen Funktionen $M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$ und hat daher einen von Null verschiedenen Wert. Nach der Division durch den Faktor von $\frac{d^{i_1'}u}{dx^{i_1'}}$ werden die Faktoren von $u, \frac{du}{dx}, \cdots, \frac{d^{i_1'-1}u}{dx^{i_1'-1}}$ Determinantenquotienten. Da M_{f-1} nur Koeffizienten aus Σ hat, so sind die Determinantenquotienten erstens rationale Funktionen von $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ und deren Ableitungen mit Koeffizienten aus Σ. Zweitens sind sie auch symmetrische Funktionen von $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$. Ersichtlich ist nämlich, falls $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i_1'}$ Konstante bedeuten, für den linearen homogenen Differentialausdruck M_{f-1}:

$$\lambda_1 \frac{d^k M_{f-1}(z_1)}{d x^k} + \lambda_2 \frac{d^k M_{f-1}(z_2)}{d x^k} + \cdots + \lambda_{i_1'} \frac{d^k M_{f-1}(z_{i_1'})}{d x^k}$$
$$= \frac{d^k}{d x^k} M_{f-1}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_{i_1'} z_{i_1'}).$$

Bei jeder linearen homogenen Transformation der $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ mit konstanten Koeffizienten transformieren sich mithin die linearen homogenen Differentialausdrücke $M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$ und deren Ableitungen kogredient mit $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$. Folglich multipliziert sich bei jeder linearen Substitution der Funktionen $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ Zähler und Nenner der fraglichen Determinantenquotienten mit der Substitutionsdeterminante der Funktionen $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$; jeder Determinantenquotient selbst bleibt also ungeändert. Er gehört mithin als rationale symmetrische Funktion eines Fundamentalsystems von Integralen $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ der linearen homogenen Differentialgleichung $J_1' = 0$ mit Koeffizienten aus Σ nach dem Appellschen Satze dem Rationalitätsbereiche Σ an.

Wir haben daher eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ gewonnen, für welche die Integrale

$$M_{f-1}(z_1),\ M_{f-1}(z_2),\ \cdots,\ M_{f-1}(z_{i_1'})$$

der linearen homogenen Differentialgleichung $A_f = 0$ ein Fundamentalsystem bilden. Infolge der oben nachgewiesenen Irreduzibilität der linearen homogenen Differentialgleichung $A_f = 0$ kann sich der Differentialausdruck A_f nur um einen Faktor, der bloße Funktion von x ist, von der linken Seite der soeben gewonnenen Differentialgleichung unterscheiden. Folglich bilden $M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $A_f = 0$. Mithin ist $A_f = 0$ mit $J_1' = 0$ von derselben Art, und zwar sind infolge der gleichen Ordnungen beide Gleichungen gegenseitig von derselben Art. Auch $A_f = 0$ und $J_f = 0$ waren gegenseitig von derselben Art; folglich sind auch $J_f = 0$ und $J_1' = 0$ gegenseitig von derselben Art. Hiermit ist der aufgestellte Satz I erwiesen.

Wir beweisen jetzt Satz II:

Ist $V = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, die das kleinste gemeinsame Vielfache der in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen

Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *ist, und soll auch nur eine einzige von* $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung* $J_1' = 0$ *mit Koeffizienten aus* Σ *existieren, deren Integrale* $V = 0$ *genügen, so müssen wenigstens zwei der Differentialgleichungen* $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *gegenseitig von derselben Art sein.*

Nach dem voraufgehenden Satze ist infolge der Existenz von $J_1' = 0$ unter den linearen homogenen Differentialgleichungen

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0,\ \cdots,\ J_g = 0$$

wenigstens eine, die mit $J_1' = 0$ von derselben Art ist. Wir denken uns die linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ derartig bezeichnet, daß $J_1 = 0$ mit $J_1' = 0$ von derselben Art ist. In genau der gleichen Weise wie auf S. 96 bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache von $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ und gewinnen auf diese Weise $M_2 = 0$; dann bilden wir als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $M_2 = 0$ und $J_3 = 0$ die Differentialgleichung $M_3 = 0$, usw., bis wir schließlich $V = 0$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $M_{g-1} = 0$ und $J_g = 0$ erhalten. $J_1 = 0$ und $J_1' = 0$ haben als zwei nach Voraussetzung verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen kein Integral gemeinsam, hingegen genügt jedes Integral von $J_1' = 0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$. In genau derselben Weise wie auf S. 97 schließen wir, daß unter den linearen homogenen Differentialgleichungen $M_2 = 0$, $M_3 = 0, \cdots, M_{g-1} = 0$, $M_g \equiv V = 0$ eine vorhanden sein muß, wir bezeichnen sie mit $M_f = 0 (2 \leqq f \leqq g)$, so daß $M_f = 0$ durch sämtliche Integrale von $J_1' = 0$ erfüllt wird, während kein Integral von $J_1' = 0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $M_{f-1} = 0$, die $M_f = 0$ unmittelbar voraufgeht, genügt. Offenbar ist $M_1 \equiv J_1$. Bei Verwendung der gleichen Bezeichnung wie auf S. 97 haben wir die Zerlegung

$$M_f = A_f M_{f-1}.$$

Aus ihr schließen wir genau wörtlich wie auf S. 97—99, daß die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_f = 0$ und $J_1' = 0$ gegenseitig von derselben Art sind. Die zwei irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$ und $J_1' = 0$ waren nach dem Anfang des Beweises gegenseitig von derselben Art. Folglich müssen $J_1 = 0$ und $J_f = 0$ gegenseitig von derselben Art sein; denn jede dieser Gleichungen ist mit der irreduziblen Gleichung $J_1' = 0$ von derselben Art. Hiermit ist Satz II bewiesen.

Satz III. *Ist die vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung* $V = 0$ *mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche* Σ *kleinstes gemeinsames Vielfaches der in bezug auf* Σ *irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen* $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *mit Koeffizienten aus* Σ

und sind irgend $f \geqq 2$ *unter den linearen homogenen Differentialgleichungen* $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *gegenseitig von derselben Art, so können diese auf unendlich viele Weisen durch* f *andere irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus* Σ *ersetzt werden. Die neuen Differentialgleichungen sind sowohl untereinander als auch mit den Differentialgleichungen, die sie ersetzen, von derselben Art. Die Differentialgleichung* $V = 0$ *ist dann auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus* Σ.

Da der Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen $V = 0$ unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ numeriert sind, so seien diese zum Zwecke des Beweises derartig bezeichnet, daß die f Gleichungen, die nach Voraussetzung untereinander von derselben Art sind, die ersten f Gleichungen: $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ werden ($f \leqq g$). Infolge der Irreduzibilität der Gleichungen genügt die Voraussetzung, daß $J_1 = 0$ mit jeder der Differentialgleichungen $J_2 = 0$, $J_3 = 0, \cdots, J_f = 0$ von derselben Art ist; dann sind zwei beliebige der f Gleichungen stets gegenseitig von derselben Art. $t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}$ sei ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung $J_1 = 0$. Da $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ von derselben Art sind, so gibt es einen linearen homogenen Differentialausdruck B_2 mit Koeffizienten aus Σ von $i_1 - 1^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung, daß $B_2(t_1)$, $B_2(t_2), \cdots, B_2(t_{i_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_2 = 0$ bilden. Da $J_1 = 0$ mit $J_3 = 0$, $J_4 = 0, \cdots, J_f = 0$ von derselben Art ist, existieren in gleicher Weise lineare homogene Differentialausdrücke $B_3, B_4, \cdots, B_f$ mit Koeffizienten aus Σ höchstens $i_1 - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, daß die Funktionen $B_3(t_1)$, $B_3(t_2), \cdots, B_3(t_{i_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_3 = 0$, die Funktionen

$$B_4(t_1),\ B_4(t_2), \cdots, B_4(t_{i_1})$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_4 = 0$, usw., schließlich die Funktionen $B_f(t_1)$, $B_f(t_2), \cdots, B_f(t_{i_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_f = 0$ bilden.

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ seien f willkürliche Konstante, die dem Rationalitätsbereiche Σ angehören sollen. Wir definieren durch sie die i_1 neuen Funktionen:

$$C(t_k) = \lambda_1 t_k + \lambda_2 B_2(t_k) + \lambda_3 B_3(t_k) + \cdots + \lambda_f B_f(t_k),$$
$$k = 1, 2, \cdots, i_1.$$

Da die Koeffizienten von $B_2, B_3, \cdots, B_f$ ebenso wie die Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ dem Rationalitätsbereiche Σ angehören, hat der lineare homogene Differentialausdruck C nur Koeffizienten aus Σ. Der lineare homogene Differentialausdruck C von $i_1 - 1^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung kann für keine Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$, die nicht ausnahmslos Null sind, verschwinden. Denn würde C identisch Null werden, so würde

$$\lambda_1 t_k + \lambda_2 B_2(t_k) + \lambda_3 B_3(t_k) + \cdots + \lambda_f B_f(t_k) = 0$$

sein, d. h. die Funktionen $t_k, B_2(t_k), \cdots, B_f(t_k)$ würden in Dependenz stehen. Die genannten Funktionen sind aber linear unabhängig; denn sie gehören zu den Elementen von Fundamentalsystemen von Integralen von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ und können daher auch als zu den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen von $V = 0$, das kleinstes gemeinsames Vielfaches von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ $(g \geqq f)$ ist, zugehörig angesehen werden. Folglich kann C für konstante Werte

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$$

nur verschwinden, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0$ ist.

Wir bilden die Wronskische Determinante der i_1 Funktionen

$$C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$$

und behaupten, sie kann auch für kein konstantes Wertsystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ des Rationalitätsbereiches Σ, ausgenommen $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0$, verschwinden. Angenommen die Wronskische Determinante von

$$C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$$

sei für konstante Werte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ des Rationalitätsbereiches Σ Null; dann müssen Konstante $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{i_1}$ existieren, die nicht ausnahmslos verschwinden, so daß:

$$\sigma_1 C(t_1) + \sigma_2 C(t_2) + \cdots + \sigma_{i_1} C(t_{i_1}) = 0$$

oder

$$C(\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2 + \cdots + \sigma_{i_1} t_{i_1}) = 0$$

wird, d. h. $J_1 = 0$ würde mit einer linearen homogenen Differentialgleichung $C = 0$ von $i_1 - 1^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ das Integral $\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2 + \cdots + \sigma_{i_1} t_{i_1}$ gemein haben; dieses kann auch nicht etwa Null sein, denn es ist aus dem Fundamentalsystem $t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}$ von Integralen von $J_1 = 0$ komponiert. Der lineare homogene Differentialausdruck C existiert, ausgenommen für

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0,$$

wirklich; denn wir zeigten ja, daß zu seinem Verschwinden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0$$

erforderlich ist. Die irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1 = 0$ von der Ordnung i_1 kann mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung $C = 0$ niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus dem

Rationalitätsbereiche Σ ein Integral gemeinsam haben. Hieraus folgt, daß die Wronskische Determinante von $C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$ für jedes konstante Wertsystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ aus Σ (ausgenommen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0)$$

von Null verschieden ist.

Wir bilden die lineare homogene Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} t & C(t_1) & C(t_2) \cdots C(t_{i_1}) \\ \frac{dt}{dx} & \frac{dC(t_1)}{dx} & \frac{dC(t_2)}{dx} \cdots \frac{dC(t_{i_1})}{dx} \\ \frac{d^2t}{dx^2} & \frac{d^2C(t_1)}{dx^2} & \frac{d^2C(t_2)}{dx^2} \cdots \frac{d^2C(t_{i_1})}{dx^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \frac{d^{i_1}t}{dx^{i_1}} & \frac{d^{i_1}C(t_1)}{dx^{i_1}} & \frac{d^{i_1}C(t_2)}{dx^{i_1}} \cdots \frac{d^{i_1}C(t_{i_1})}{dx^{i_1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir können durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung von t, der als Wronskische Determinante der Funktionen $C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$ von Null verschieden ist, dividieren. Nach der Division durch den Faktor von $\frac{d^{i_1}t}{dx^{i_1}}$ werden die Koeffizienten von $t, \frac{dt}{dx}, \cdots, \frac{d^{i_1-1}t}{dx^{i_1-1}}$ Determinantenquotienten, die als rationale symmetrische Funktionen des Fundamentalsystems $t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}$ von $J_1 = 0$ mit Koeffizienten aus Σ dem Rationalitätsbereiche Σ angehören müssen. Der Nachweis ist genau analog wie auf S. 99 zu führen. Je nach der Wahl von $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ kann man aus $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ unendlich viele lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ herleiten, die $C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen haben. Eine Differentialgleichung, die wir auf die angegebene Weise aus $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ herleiten, sei mit $\bar{J} = 0$ bezeichnet. Die lineare homogene Differentialgleichung $\bar{J} = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ist, da sie $C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen besitzt, mit $J_1 = 0$ von derselben Art. Infolge der Irreduzibilität von $J_1 = 0$ ist auch $\bar{J} = 0$ eine in bezug auf den Rationalitätsbereich Σ irreduzible Gleichung. Da die Integrale einer jeden dieser unendlich vielen irreduziblen Differentialgleichungen $\bar{J} = 0$ lineare homogene Kombinationen der Integrale von

$$J_1 = 0, \; J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$$

mit konstanten Koeffizienten sind, so hat jede der unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J} = 0$ ihre Integrale mit $V = 0$ gemeinsam. Sind also zwei oder mehr der linearen homogenen irreduziblen Differentialgleichungen $J_1 = 0, \; J_2 = 0, \; \cdots, \; J_g = 0$, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches $V=0$ ist, von derselben Art, so gibt es unendlich viele verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ befriedigen.

Wir behalten unsere Voraussetzung bei, daß die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1=0$, $J_2=0, \cdots, J_f=0$ von derselben Art sind. Den Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ legen wir jetzt f verschiedene Wertsysteme

$$\begin{aligned}&\lambda_{11}, \lambda_{21}, \cdots, \lambda_{f1},\\ &\lambda_{12}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{f2},\\ &\vdots\\ &\lambda_{1f}, \lambda_{2f}, \cdots, \lambda_{ff}\end{aligned}$$

aus dem Rationalitätsbereiche Σ bei. Wir bilden mit diesen f Wertsystemen die $\bar{J}=0$ entsprechenden f irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die man für

$$\lambda_1=\lambda_{1l},\ \lambda_2=\lambda_{2l}, \cdots, \lambda_f=\lambda_{fl} \quad (l=1,2,\cdots,f)$$

erhält und die mit $\bar{J}_1=0$, $\bar{J}_2=0, \cdots, \bar{J}_f=0$ bezeichnet seien. Es hat $\bar{J}_1=0$ das Fundamentalsystem von Integralen:

$$\begin{aligned}&\lambda_{11}t_1+\lambda_{21}B_2(t_1)+\lambda_{31}B_3(t_1)+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_1),\\ &\lambda_{11}t_2+\lambda_{21}B_2(t_2)+\lambda_{31}B_3(t_2)+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_2),\\ &\vdots\\ &\lambda_{11}t_{i_1}+\lambda_{21}B_2(t_{i_1})+\lambda_{31}B_3(t_{i_1})+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_{i_1}).\end{aligned}$$

Wir bezeichnen diese Funktionen mit

$$C_1(t_1),\quad C_1(t_2), \cdots, C_1(t_{i_1}).$$

Verstehen wir unter $C_l(t_k)$ die Funktion:

$$C_l(t_k)=\lambda_{1l}t_k+\lambda_{2l}B_2(t_k)+\lambda_{3l}B_3(t_k)+\cdots+\lambda_{fl}B_f(t_k),$$
$$l=1,2,\cdots,f;\quad k=1,2,\cdots,i_1,$$

so hat die lineare homogene irreduzible Differentialgleichung $\bar{J}_l=0$ die i_1 Funktionen $C_l(t_1)$, $C_l(t_2), \cdots, C_l(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen.

Die f^2 Konstanten λ_{jl} ($j=1,2,\cdots,f$; $l=1,2,\cdots,f$) seien derartig aus dem Rationalitätsbereiche Σ gewählt, daß die Determinante $|\lambda_{jl}|$ von Null verschieden ist. Dann lassen sich die Gleichungen, die ich im folgenden noch mit (C) zitiere,

$$\begin{aligned}C_1(t_k)&=\lambda_{11}t_k+\lambda_{21}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_k),\\ C_2(t_k)&=\lambda_{12}t_k+\lambda_{22}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{f2}B_f(t_k),\\ C_3(t_k)&=\lambda_{13}t_k+\lambda_{23}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{f3}B_f(t_k),\\ &\vdots\\ C_f(t_k)&=\lambda_{1f}t_k+\lambda_{2f}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{ff}B_f(t_k)\end{aligned}$$

nach t_k, $B_2(t_k), \cdots, B_f(t_k)$ auflösen, und t_k, $B_2(t_k), \cdots, B_f(t_k)$ ergeben sich als lineare homogene Funktionen von $C_1(t_k)$, $C_2(t_k), \cdots, C_f(t_k)$. Hierbei kann k die Werte $1, 2, \cdots, i_1$ annehmen. Da die lineare homogene irreduzible Differentialgleichung $\bar{J}_l = 0$ $(l = 1, 2, \cdots, f)$ mit Koeffizienten aus Σ die i_1 Funktionen $C_l(t_1)$, $C_l(t_2), \cdots, C_l(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen hat, folgt, daß sich für $|\lambda_{jl}| \neq 0$ sämtliche Integrale von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ durch die von $\bar{J}_1 = 0$, $\bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen lassen.

Wir bilden das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$, die alle von der gleichen Ordnung i_1 sind, und bezeichnen diese lineare homogene Differentialgleichung mit $M_f = 0$. Dann muß $M_f = 0$ von der Ordnung $i_1 f$ sein; denn das kleinste gemeinsame Vielfache von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$, die Differentialgleichung $V = 0$, hat die Summe der Ordnungen von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ als Ordnungszahl. $M_f = 0$ wird auch durch alle Integrale von $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ befriedigt; denn infolge der Art und Weise, wie wir die eben genannten Differentialgleichungen konstruierten, drücken sich alle ihre Integrale linear und homogen mit konstanten Koeffizienten durch diejenigen von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ aus.

Wir bilden ferner noch die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch alle Integrale der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots$, $\bar{J}_f = 0$, die sämtlich die gleiche Ordnung i_1 haben, erfüllt wird. Diese lineare homogene Differentialgleichung, die wir mit $\bar{M}_f = 0$ bezeichnen, muß von der Ordnung $i_1(f - f_1)$ sein, wobei f_1 einen der Werte $0, 1, 2, \cdots, f - 1$ bezeichnet.*) Ist $|\lambda_{jl}| \neq 0$, so drücken sich, wie wir zeigten,

*) Um $\bar{M}_f = 0$ zu finden, sucht man zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache von $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$; diese lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ sei mit $\bar{M}_2 = 0$ bezeichnet. Haben $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$ kein Integral gemeinsam, so hat $\bar{M}_2 = 0$ als Ordnungszahl $2 i_1$, nämlich die Summe der Ordnungen von $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$. Haben $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$ ein Integral gemeinsam, so haben sie infolge ihrer Irreduzibilität alle Integrale gemeinsam, die linken Seiten von $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$ unterscheiden sich dann nur um einen Faktor, der bloße Funktion von x aus dem Rationalitätsbereiche Σ ist, und für $\bar{M}_2 = 0$ kann entweder $\bar{J}_1 = 0$ oder $\bar{J}_2 = 0$ gewählt werden. In diesem Falle hat $\bar{M}_2 = 0$ die Ordnung i_1. Dann sucht man das kleinste gemeinsame Vielfache der linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{M}_2 = 0$ und $\bar{J}_3 = 0$. Diese lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ sei mit $\bar{M}_3 = 0$ bezeichnet. Entweder hat $\bar{M}_3 = 0$ die Summe der Ordnungszahlen von $\bar{M}_2 = 0$ und $\bar{J}_3 = 0$ zur Ordnungszahl, oder man kann $\bar{M}_3 = 0$ mit $\bar{M}_2 = 0$ zusammenfallen lassen, indem $\bar{J}_3 = 0$ mit $\bar{M}_2 = 0$ ein Integral und folglich wegen der Irreduzibilität alle Integrale gemeinsam hat. Die lineare homogene Differentialgleichung $\bar{M}_3 = 0$ hat entweder $3 i_1$ oder $2 i_1$ oder i_1 als Ordnungszahl. Auf diese Art ist fortzufahren, bis man zu der linearen homogenen Differentialgleichung $\bar{M}_f = 0$

alle Integrale von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten durch die von $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ aus. Folglich genügen, wenn $|\lambda_{jl}| \neq 0$ ist, alle Integrale von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ auch der linearen homogenen Differentialgleichung $\bar{M}_f = 0$, und mithin hat für $|\lambda_{jl}| \neq 0$ die Differentialgleichung $\bar{M}_f = 0$ die Ordnung $i_1 f$ und wird durch alle Integrale von $M_f = 0$ befriedigt. $M_f = 0$ und $\bar{M}_f = 0$ können sich daher in ihren linken Seiten nur um einen unwesentlichen Faktor, der eine bloße Funktion von x aus dem Rationalitätsbereiche ist, unterscheiden, und $M_f = 0$ kann, falls $|\lambda_{jl}| \neq 0$ ist, sowohl als kleinstes gemeinsames Vielfaches der f irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ als auch der ursprünglichen Gleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ angesehen werden. Im Falle $|\lambda_{jl}| \neq 0$ können daher die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ die Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ vertreten. Die Konstanten λ_{jl} $(j = 1, 2, \cdots, f;\ l = 1, 2, \cdots, f)$ lassen sich aus Σ auf unendlich viele Weisen so wählen, daß $|\lambda_{jl}| \neq 0$ ist. Mithin kann man $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ auf unendlich viele Weisen durch $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ ersetzen und $V = 0$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0, J_{f+1} = 0, J_{f+2} = 0, \cdots, J_g = 0$ ansehen. Da jede der irreduziblen Gleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ mit Koeffizienten aus Σ mit $J_1 = 0$ von derselben Art ist, wie aus der Form der Integrale hervorgeht, sind diese f Gleichungen auch untereinander von derselben Art. Hiermit ist der Satz III bewiesen.

Verschwindet die Determinante $|\lambda_{jl}|$, so folgt aus den Gleichungen (C) auf Seite 104, daß die Funktionen $C_1(t_k), C_2(t_k), \cdots, C_f(t_k)$ in Dependenz stehen. Dann werden die f Gleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ durch weniger als $i_1 f$ linear unabhängige Funktionen befriedigt. Mithin wird die Gleichung $\bar{M}_f = 0$ von niedrigerer als $i_1 f^{\text{ter}}$ Ordnung, und die Gleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ können die Gleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ nicht mehr vertreten.

Als Schlußsatz geben wir an:

Satz IV. *Eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist entweder nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differential-*

---

mit Koeffizienten aus Σ gelangt, die durch alle Integrale von $\bar{M}_{f-1} = 0$ und $\bar{J}_f = 0$ erfüllt wird. Hat $\bar{J}_f = 0$ mit $\bar{M}_{f-1} = 0$ ein Integral gemeinsam, so wird $\bar{M}_{f-1} = 0$ durch alle Integrale von $\bar{J}_f = 0$ erfüllt, und man kann $\bar{M}_f = 0$ mit $\bar{M}_{f-1} = 0$ zusammenfallen lassen; sonst hat $\bar{M}_f = 0$ als Ordnungszahl die Summe der Ordnungszahlen von $\bar{M}_{f-1} = 0$ und $\bar{J}_f = 0$. Die Ordnung von $\bar{M}_f = 0$ ergibt sich daher auf jeden Fall, wie im Texte angegeben wurde.

gleichungen. Ist die vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ kleinstes gemeinsames Vielfaches von g in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, so ist notwendig und hinreichend, damit $V = 0$ auf unendlich viele Weisen als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ aufgefaßt werden kann, daß wenigstens zwei der g Gleichungen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches $V = 0$ ist, gegenseitig von derselben Art sind.

Der Beweis des Satzes IV ergibt sich leicht auf folgende Weise: Ist $V = 0$ kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ und gibt es keine von diesen verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1' = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V = 0$ genügen, so ist offenbar $V = 0$ nur auf eine einzige Weise kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Soll $V = 0$ auf mehr als eine Weise kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ sein, so gibt es wenigstens eine von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1' = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V = 0$ genügen. Nach Satz II existieren dann unter den Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ wenigstens zwei, die gegenseitig von derselben Art sind. Diese können nach Satz III auf unendlich viele Arten durch zwei lineare homogene irreduzible Differentialgleichungen, die mit diesen zwei von derselben Art sind, ersetzt werden, und $V = 0$ kann als kleinstes gemeinsames Vielfaches der zwei neuen Differentialgleichungen und der übrigen $g - 2$ angesehen werden. $V = 0$ ist also nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Hiermit ist Satz IV erwiesen.

§ 4.

Die zu einer linearen homogenen Differentalgleichung zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Nicht jede lineare homogene Differentialgleichung

$$Q \equiv q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)y = 0$$

mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ ist vollständig reduzibel. Z. B. ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat, falls man als Rationalitätsbereich den aller reellen und imaginären Konstanten wählt, nie vollständig reduzibel. Dies ist eine unmittelbare Folge der in meiner Arbeit*) „Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen“ auf Seite 441 angegebenen Betrachtungen von Herrn Stickelberger. Infolgedessen empfiehlt es sich, den Begriff der *größten vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung, die zu einer vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung* $Q=0$ *mit Koeffizienten aus* Σ *gehört,* einzuführen.

Ist $V=0$ *eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus* Σ, *deren sämtliche Integrale der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung* $Q=0$ *mit Koeffizienten aus* Σ *genügen, und existiert keine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus* Σ, *deren Integrale der Differentialgleichung* $Q=0$, *aber nicht* $V=0$ *genügen,* so sagen wir: $V=0$ *ist eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu* $Q=0$ *gehört.*

Ist $V=0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $Q=0$ gehört, und $f(x)$ eine beliebige, dem Rationalitätsbereiche Σ angehörige Funktion, so ist auch die durch Nullsetzen des linearen homogenen Differentialausdruckes $W=f(x)V$ entstehende Gleichung eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $Q=0$ gehört.

Es gilt nun der Satz I:

Irgend zwei zu einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ *unterscheiden sich in ihren linken Seiten nur um einen allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor, der eine dem Rationalitätsbereiche* Σ *angehörige Funktion ist.*

Seien $V=0$ und $W=0$ zwei größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die zu der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung $Q=0$ gehören. Da $W=0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung sein soll, so muß sich $W=0$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches gewisser irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_\mu=0$ mit Koeffizienten aus Σ auffassen lassen. Angenommen, eine der zuletzt angegebenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, etwa $J_i=0$, besitze ein Integral, das nicht $V=0$ genügt, dann befriedigt infolge der Irreduzibilität von $J_i=0$ nach dem Frobeniusschen Satz kein Integral von $J_i=0$ die Differentialgleichung $V=0$. Da alle Integrale

*) Math. Annalen, Bd. 59.

von $J_i = 0$ die zu $Q = 0$ gehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung $W = 0$ befriedigen, so genügen alle Integrale von $J_i = 0$ der Differentialgleichung $Q = 0$. Die Existenz einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $J_i = 0$ mit den nachgewiesenen Eigenschaften widerspricht aber der Tatsache, daß $V = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung sein soll, die zu $Q = 0$ gehört. Mithin genügen alle Integrale von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$ und daher alle Integrale von $W = 0$ auch der Differentialgleichung $V = 0$. Aus der Gleichberechtigung von $V = 0$ und $W = 0$ schließen wir, daß auch umgekehrt jedes Integral von $V = 0$ der Differentialgleichung $W = 0$ genügt. Hieraus folgt der angegebene Satz I.

Betrachtet man, wie wir dies auch bisher taten, alle linearen homogenen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die in ihren Integralen völlig übereinstimmen oder, anders ausgedrückt, deren linke Seiten sich nur um einen bloß von x abhängigen Faktor unterscheiden, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches ist, als *nicht verschieden*, so gelangt man zum Satz II:

Zu jeder linearen homogenen Differentialgleichung $Q = 0$ mit Koeffizienten aus Σ gibt es eine einzige wohlbestimmte zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ. Sie ist die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch jedes Integral von $Q = 0$ erfüllt wird, das einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ genügt.

Aus dem Satze II folgt unmittelbar der Satz III:

Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß dies für die zu ihr zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung zutrifft.

Wird eine lineare homogene Differentialgleichung $Q = 0$ mit Koeffizienten aus Σ durch die Integrale einer Anzahl verschiedener irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen befriedigt, bei denen die Summe der Ordnungen größer als die Ordnung von $Q = 0$ ist, so ist offenbar die zu $Q = 0$ zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, deren Ordnung gleich oder kleiner als die von $Q = 0$ ist, auf mehr als eine Weise und daher nach Satz IV des § 3 auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Aus dieser Bemerkung und Satz III dieses Paragraphen folgt:

Satz IV. *Gibt es für eine reduzible lineare homogene Differentialgleichung eine einzige oder eine endliche Anzahl verschiedener irreduzibler* *linearer homogener Differentialgleichungen, durch deren Integrale die vorgelegte reduzible lineare homogene Differentialgleichung befriedigt wird, so ist die Summe der Ordnungen dieser irreduziblen Differentialgleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung der reduziblen Differentialgleichung.*

Ferner ergeben sich aus Satz III und den Resultaten des vorigen Paragraphen:

Satz V. *Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß es wenigstens zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen gibt, deren Integrale der vorgelegten Differentialgleichung genügen und die gegenseitig von derselben Art sind.*

Satz VI. *Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so gibt es unter einer jeden beliebigen Anzahl derartiger irreduzibler Gleichungen, bei denen die Summe der Ordnungen gleich oder größer als die Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung ist, wenigstens zwei Differentialgleichungen, die von derselben Art sind.*

Die Sätze IV, V und VI habe ich auch in meiner Arbeit „Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen“ (Math. Ann., Bd. 56, S. 570 u. 575) bewiesen. Hingegen gilt *bei Zugrundelegung des in dem vorliegenden Aufsatze beschriebenen Rationalitätsbereiches Σ nicht* mehr der am angeführten Orte auf Seite 577 hergeleitete Satz:

Damit eine lineare homogene Differentalgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist notwendig und hinreichend, daß die vorgelegte Differentialgleichung außer einem Integral y_1, das auch einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung genügen muß, noch ein zweites Integral der Form:

$$b_0(x)y_1 + b_1(x)\frac{dy_1}{dx} + \cdots + b_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}y_1}{dx^{s-1}}$$

besitzt; dabei sollen $b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{s-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches und s die Ordnung der irreduziblen Differentialgleichung, der y_1 genügt, bedeuten. $b_0(x) = \text{Const}$, gleichzeitig

$$b_1(x) = b_2(x) = \cdots = b_{s-1}(x) = 0$$

ist natürlich ausgeschlossen; einige der Funktionen $b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{s-1}(x)$, jedoch nicht alle, können selbstverständlich verschwinden.

Der angegebene Satz gilt sicher, falls ein Rationalitätsbereich Σ, der alle reellen und imaginären Konstanten enthält, zugrunde gelegt wird.

In meinem früheren oben zitierten Aufsatz ist die Zugehörigkeit *aller* reellen wie imaginären Konstanten zum Rationalitätsbereiche vorausgesetzt. (Vgl. S. 574, Zeile 10 „wobei λ und μ willkürliche Konstante sind", Benützung der Rationalitätsgruppe, vgl. meinen Aufsatz „Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen", Math. Annalen, Bd. 59, Anmerkung auf S. 437, wo ich diesen Gegenstand schon zur Sprache brachte. In meiner zitierten Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 56 ist also der Rationalitätsbereich wie in dieser zu wählen, außerdem soll er noch alle Konstanten enthalten.) Daß der zuletzt angegebene Satz für einen Rationalitätsbereich, der nicht alle Konstanten enthält, nicht mehr zu gelten braucht, lehrt das mir von Herrn Landau in einem Briefe vom 4. Februar 1903 mitgeteilte Beispiel der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. Sie hat $y_1 = \sin x$, $\frac{dy_1}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ zu Integralen. Diese Differentialgleichung ist aber, wie man leicht zeigt, im Zahlenkörper aller reellen Zahlen irreduzibel; im Körper aller reellen wie imaginären Zahlen wird sie reduzibel. Der Grund, warum der fragliche Satz für einen Rationalitätsbereich Σ, der nicht alle reellen wie imaginären Konstanten enthält, versagen kann, liegt darin, daß zu seinem Beweise ein Satz von Herrn Frobenius*) benützt wurde, dem man folgende Fassung geben kann: Wird von dem unserer Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ vorausgesetzt, daß alle reellen wie imaginären Konstanten zum Rationalitätsbereiche gehören, so ist jede lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ reduzibel, wenn von zwei verschiedenen ihrer Integrale das eine ein linearer homogener Differentialausdruck des anderen mit Koeffizienten aus Σ ist.

Wie mir Herr Landau in einem Briefe vom 21. Februar 1903 mit Beweis mitgeteilt hat, gilt übrigens der eben angeführte Satz von Herrn Frobenius schon dann, wenn jede Wurzel jeder algebraischen Gleichung mit Zahlenkoeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche dem Rationalitätsbereiche angehört, also z. B. für den Rationalitätsbereich aller rationalen Funktionen von x, deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind. Daß aber der Frobeniussche Satz nicht auf den im § 1 definierten Rationalitätsbereich ausgedehnt werden kann, lehrt das Landausche Beispiel $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.**)

---

*) G. Frobenius, Journal f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76, S. 268.

**) Vgl. die Note von Herrn E. Landau in Archiv der Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 10, S. 45—50.

§ 5.

Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren.

Wir sagen: der lineare homogene Differentialausdruck

$$(1) \qquad Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2 V_1$$

mit Koeffizienten aus Σ ist in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt, wenn die Summe der Ordnungen der linearen homogenen Differentialgleichungen $V_\lambda = 0$, $V_{\lambda-1} = 0, \cdots, V_3 = 0$, $V_2 = 0$, $V_1 = 0$ mit Koeffizienten aus Σ gleich der Ordnung von $Q = 0$ ist, und wenn ferner $V_1 = 0$ eine größte vollständige reduzible zu $Q = 0$ gehörige lineare homogene Differentialgleichung ist, $V_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 = 0$ gehört, drittens $V_3 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 = 0$ gehört, usw., schließlich $V_\lambda = 0$ selbst eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist. $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_\lambda$ nennen wir *größte vollständig reduzibleFaktoren von Q*. Die geschilderte Zerlegung von Q ist nicht eindeutig, denn man kann offenbar einen beliebigen der Faktoren V_ϱ mit einer willkürlichen, dem Rationalitätsbereiche Σ angehörigen Funktion von x multiplizieren und dann die Kette (1) entsprechend nach links fortsetzen.

Unter Benutzung der im § 2 am Schluß eingeführten Bezeichnung „ähnliche Differentialgleichungen“ gilt folgender Satz:

Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt wird, so enthält jede Zerlegung gleich viele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind bei irgend zwei Zerlegungen der Reihe nach einander so zugeordnet, daß immer zwei durch Nullsetzen zugeordneter größter vollständig reduzibler Faktoren sich ergebende lineare homogene Differentialgleichungen ähnlich sind.

Sei neben

$$(1) \qquad Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 V_1$$

noch

$$(2) \qquad Q = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2 W_1$$

eine zweite Zerlegung von Q in größte vollständig reduzible Faktoren. Unser Satz behauptet, daß $\lambda = \lambda'$ sein muß, und $V_1 = 0$ und $W_1 = 0$, $V_2 = 0$ und $W_2 = 0, \cdots, V_\lambda = 0$ und $W_\lambda = 0$ ähnliche Differentialgleichungen sind. Beim Beweise des Satzes bedenken wir zunächst, daß

$W_1 = 0$ und $V_1 = 0$ größte vollständig reduzible zu $Q = 0$ gehörige Differentialgleichungen sind. Nach Satz I des § 4 wird mithin:

(3) $$W_1 = f(x) V_1,$$

wobei $f(x)$ eine Funktion aus dem Rationalitätsbereiche Σ ist. $W_1 = 0$ und $V_1 = 0$ haben infolge der Gleichung (3) genau dieselben Integrale, sind also sicher ähnliche Differentialgleichungen. Infolge der Gleichung (3) geht die Gleichung (2) über in:

(4) $$Q = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2 (f(x) V_1).$$

Man führe die durch das Symbol W_2 ausgedrückte Differentiationsoperation aus und ordne nach Ableitungen von V_1; auf diese Weise erhält man

(5) $$W_2(f(x) V_1) = X_2 V_1.$$

X_2 bedeutet einen linearen homogenen Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ.

Aus den Relationen (4) und (5) folgt:

(6) $$Q = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 V_1.$$

Wir setzen

(7) $$U = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2,$$

also:

(8) $$Q = U V_1.$$

Wir betrachten $X_2 = 0$ näher. Aus der Gleichung (5) folgt: Man findet durch Multiplikation mit $\frac{1}{f(x)}$ aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen von $W_2 = 0$ die entsprechenden eines Fundamentalsystems von $X_2 = 0$. Es sind also $W_2 = 0$ und $X_2 = 0$ ähnliche Differentialgleichungen. Bedenkt man, daß nach dem im § 2 angegebenen Fuchsschen Satze zwei ähnliche lineare homogene Differentialgleichungen gleichzeitig reduzibel oder irreduzibel sind, so folgt, da $W_2 = 0$ als vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen ist, daß dies auch für $X_2 = 0$ zutreffen muß. $X_2 = 0$ ist also auch eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Wir führen jetzt den Nachweis, daß $X_2 = 0$ eine *größte* vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist, die zu $U = 0$ gehört. Angenommen $X_2 = 0$ sei keine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $U = 0$ gehört. Es möge $\overline{X}_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ sein, die zu $U = 0$ gehört. $X_2 = 0$ ist infolge seiner vollständigen Reduzibilität als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen auffaßbar, ferner ist nach (7) jedes Integral von $X_2 = 0$ auch Integral von $U = 0$. Hieraus folgt nach Satz II des § 4, daß die lineare homogene Differentialgleichung $\overline{X}_2 = 0$, die nach Voraussetzung die größte vollständig reduzible lineare homogene zu $U = 0$ gehörige Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ ist, durch alle Integrale von $X_2 = 0$ befriedigt werden muß. Mithin läßt sich ein linearer homogener Differentialausdruck Z mit Koeffizienten aus Σ finden, so daß

$$(9) \qquad \overline{X}_2 = Z X_2$$

wird. Ist $X_2 = 0$ nicht größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $U = 0$ gehört, so wird $\overline{X}_2 = 0$ von höherer Ordnung als $X_2 = 0$.

Da $\overline{X}_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible zu $U = 0$ gehörige lineare homogene Differentialgleichung ist, kann man U so in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegen, daß die Zerlegung mit $\overline{X}_2$ schließt. Es sei also

$$(10) \qquad U = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 \overline{X}_2$$

eine Zerlegung in größte vollständig reduzible Faktoren.

Aus den Gleichungen (8), (9) und (10) folgt:

$$(11) \qquad Q = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 Z X_2 V_1.$$

Infolge der Gleichungen (5) und (3) geht (11) über in

$$(12) \qquad Q = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 Z W_2 W_1.$$

Wir führen den linearen homogenen Differentialausdruck $\overline{W}_2$ mit Koeffizienten aus Σ ein und verstehen hierunter:

$$(13) \qquad \overline{W}_2 = Z W_2.$$

Die Gleichung (12) kann jetzt auch in der Form:

$$(14) \qquad Q = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 \overline{W}_2 W_1$$

geschrieben werden.

Nach (5) ist

$$Z W_2(f(x) V_1) = Z X_2 V_1,$$

und mit Hilfe von (13) und (9) erhält man:

$$\overline{W}_2(f(x) V_1) = \overline{X}_2 V_1.$$

Die soeben gewonnene Gleichung lehrt, daß man aus einem Fundamentalsystem von Integralen von $\overline{X}_2 = 0$ eines von $\overline{W}_2 = 0$ durch Multiplikation mit $f(x)$ erhält. Folglich ist $\overline{W}_2 = 0$ ebenso wie $\overline{X}_2 = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Aus den Relationen (14) und (2) folgt:

$$X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 \overline{W}_2 = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2.$$

Da $\overline{W}_2 = 0$ und $W_2 = 0$ vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen sind und $W_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ ist, die zu $W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2$ gehört, so kann $\overline{W}_2 = 0$ nicht von höherer Ordnung als $W_2 = 0$ sein. Nach (13) sind $\overline{W}_2$ und W_2 durch $\overline{W}_2 = Z W_2$ verbunden; mithin kann der lineare homogene Differentialausdruck Z nur eine bloße dem Rationalitätsbereich Σ angehörige Funktion von x sein, sonst wäre ja $\overline{W}_2$ höherer Ordnung als W_2. Aus (9) folgt, daß sich auch $\overline{X}_2$ und X_2 nur um einen Faktor, der bloße Funktion von x allein ist, unterscheiden. $X_2 = 0$ ist also eine größte zu $U = 0$ gehörige vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Aus (6) und (1) kann man schließen:

$$W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2. \tag{15}$$

Da $X_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene zu

$$U \equiv W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 = 0$$

gehörige Differentialgleichung ist, haben wir in der Relation (15) eine Zerlegung eines Differentialausdruckes niedrigerer Ordnung, als die von Q ist, in größte vollständig reduzible Faktoren. Hierfür können wir unseren Satz als bewiesen annehmen. Unser Satz gilt ja sicher für eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung. Folglich sind $V_2 = 0$ und $X_2 = 0$ ähnliche lineare homogene Differentialgleichungen, und das gleiche gilt für $V_3 = 0$ und $W_3 = 0$, für $V_4 = 0$ und $W_4 = 0$, usw., schließlich ist $\lambda' = \lambda$, und $V_\lambda = 0$ und $W_\lambda = 0$ sind ähnliche Differentialgleichungen. $X_2 = 0$ und $V_2 = 0$ haben als größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, die zu derselben Differentialgleichung $U = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 = 0$ gehören, sogar alle Integrale gemeinsam. $X_2 = 0$ und $W_2 = 0$ waren, wie auf S. 113 gezeigt wurde, ähnliche Differentialgleichungen. Hieraus folgt, daß $V_2 = 0$ und $W_2 = 0$ ähnliche Differentialgleichungen sind. $V_1 = 0$ und $W_1 = 0$ haben als größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, die zu derselben Gleichung $Q = 0$ gehören, sogar alle Integrale gemeinsam. Hiermit ist unser Satz völlig bewiesen.

Die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes Q in größte vollständig reduzible Faktoren $Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 V_1$ kann nach Satz I und II des § 4 zu einer *völlig eindeutig bestimmten* gemacht werden, wenn man verlangt, daß als Koeffizient der höchsten Ableitung bei $V_1, V_2, \cdots, V_{\lambda-1}$ die Einheit und bei V_λ der Koeffizient der höchsten Ableitung von Q steht.

§ 6.

Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren.

Für die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes Q mit Koeffizienten aus dem im § 1 beschriebenen Rationalitätsbereiche Σ in irreduzible Faktoren gilt der

Satz I. *Auf welche Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung den Faktoren einer jeden anderen Zerlegung eineindeutig zuordnen, so daß immer die zwei durch Nullsetzen der zugeordneten Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art sind.*

Zum Beweise dieses Satzes wurden in meiner früheren Arbeit (Math. Ann. Bd. 56, S. 565) auch nur Sätze aus dem § 2 des vorliegenden Aufsatzes verwandt.

Oben wurde im § 3 auf S. 97 der vollständig reduzible lineare homogene Differentialausdruck V mit Koeffizienten aus Σ in irreduzible Faktoren zerlegt:

$$V = A_g A_{g-1} \cdots A_2 J_1.$$

Die lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ war hierbei als kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ angenommen, und es ergab sich, daß $A_f = 0$ und $J_f = 0$ $(f = 2, \cdots, g)$ zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen derselben Art waren. Unter Beachtung des Satzes I folgt:

Satz II. *Ist $V = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, die das kleinste gemeinsame Vielfache der in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ist, so sind bei jeder Zerlegung des Differentialausdruckes V in irreduzible Faktoren die durch Nullsetzen der g Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit den irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ in gewisser Reihenfolge von derselben Art.*

Hat man einen linearen homogenen Differentialausdruck Q mit Koeffizienten aus Σ in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt:

$$Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2 V_1 \qquad \text{(vgl. S. 112),} \tag{1}$$

so kann man durch weitere Zerlegung jedes Differentialausdruckes V in irreduzible Faktoren:

$$V = A_g A_{g-1} \cdots J_1$$

eine Zerlegung in irreduzible Faktoren herleiten. Durch Beachtung von Satz I und II ergibt sich:

Satz III. *Auf welche Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so sind die durch Nullsetzen der Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit denjenigen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen von derselben Art, die sich ergeben, wenn man den vorgelegten Differentialausdruck in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt und jeden vollständig reduziblen Faktor als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen auffaßt.*

März 1905.