Ueber ternäre Formen dritten Grades.

Von P. Gordan in Giessen.

§. 1.

Stellung der Aufgabe. Begriff der Combination. Moduln.

In einem demnächst zu publicirenden Aufsatze, dessen wesentliche Resultate in den Comptes Rendus veröffentlicht sind, habe ich die binären Formen untersucht und von ihnen nachgewiesen, dass es zu jeder binären Form ein endliches System von Covarianten giebt, welches ich vollständiges System nenne und welches die Eigenschaft besitzt, dass jede Covariante sich als ganze Function der Formen des Systems mit numerischen Coefficienten darstellen lässt. In ähnlicher Weise will ich hier die ternären Formen zu untersuchen und die damals angewandten Methoden auf dieselben auszudehnen versuchen. Die Schwierigkeit, welche dieser Untersuchung hierbei unmittelbar entgegentritt, ist die grössere Mannichfaltigkeit von Formen, welche bei Transformation der gegebenen Form sich nicht ändern. Während die binären Formen nur Invarianten und Covarianten besitzen, haben die ternären Formen ausserdem noch zugehörige und Zwischenformen, welche ausser den ursprünglichen Variabeln $x_1\, x_2\, x_3$ noch die Variabeln $u_1\, u_2\, u_3$ enthalten, welche den ersteren contragredient sind.

Die gegebene Form, welche untersucht werden soll, sei symbolisch:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^n \ldots$$
$$= a_x^n = b_x^n = c_x^n \ldots .$$

Ihre Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen will ich kurz die zu f gehörigen Formen nennen.

Von allen diesen Formen hat Herr Clebsch in Crelles Journal Bd. 59. p. 1 fgg. nachgewiesen, dass sie lineare Functionen mit numerischen Coefficienten (Aggregate) von Formen P sind, welche sich symbolisch als Producte der Form darstellen lassen:

$$P = a_x\, b_x\, c_x \ldots (abu)\,(acu)\,(bcu) \ldots (abc)\,(abd)\,(acd) \ldots .$$

Hierbei bedeuten die Symbole (abu) und (abc) die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die Anzahl der Factoren $a_x, b_x, c_x, \ldots$ (unter denen auch mehrere gleich sein können) nenne ich den Grad der Form P; die Anzahl der Factoren $(abu), (acu) \ldots$ ihre Classe; die Anzahl der verschiedenen Symbole $a, b, c, \ldots$ oder was derselbe ist, ihren Grad in den Coefficienten von f, ihre Ordnung, die Summe von Grad und Classe endlich ihren Rang.

Ich kann nun die Frage stellen, in welcher Weise die Form P, deren Ordnung m sein möge, aus einer Form $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entstehen kann. Demgemäss entferne ich die Factoren a_x und ersetze die symbolischen Factoren $(bau), (cau), (dau), \ldots,$ in denen sowohl der Buchstabe a als auch der Buchstabe u vorkommt, $b_x, c_x, d_x \ldots,$ endlich ersetze ich die symbolischen Factoren $(bca), (bda), (cda), \ldots,$ in denen zwar der Buchstabe a, aber nicht der Buchstabe u vorkommt, durch $(bcu), (bdu), (cdu), \ldots$.

Ich gelange durch dieses Verfahren zu einem symbolischen Product F, welches den Buchstaben a nicht mehr enthält, also von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. In dieser Weise kann ich j e d e s symbolische Product mit Formen niederer Ordnung in Beziehung setzen.

Umgekehrt will ich mir jetzt die Frage vorlegen, wie man das symbolische Product P bilden kann, wenn die Form

$$F = b_x c_x d_x \ldots (bcu)(bdu)(cdu) \ldots (abc)(abd)(cde)(cef) \ldots$$

gegeben ist. Man kann dieselbe auch folgendermassen schreiben:

$$F = r_x^{(1)} r_x^{(2)} r_x^{(3)} \ldots r_x^{(p)} u_{s_1} u_{s_2} u_{s_3} \ldots u_{s_q} \,.\, S,$$

wobei $r_x^{(1)}, r_x^{(2)} \ldots$ die Factoren $b_x, c_x, d_x, u_{s_1}, u_{s_2}, \ldots$ die Factoren $(bcu), (bdu), \ldots$ darstellen, das Zeichen S endlich bedeutet das Product $(bcd)(bde)(cde) \ldots$. Es versteht sich nach dieser Bezeichnung von selbst, dass mehrere der Factoren r_x oder u_s unter einander übereinstimmen können. Der Grad von F ist hier p, die Classe q, der Rang $p+q$, die Ordnung endlich $m-1$.

Um nun P aus F abzuleiten, muss man in einigen (etwa λ) Factoren, $b_x, c_x, d_x, \ldots,$ oder was dasselbe ist, $r_x^{(1)}, r_x^{(2)}, \ldots r_x^{(\lambda)}$ durch $(bau), (cau), (dau), \ldots,$ resp. $(r^{(i)}au)$ ersetzen, ferner einige, etwa $\varkappa$ der Factoren $(bcu), (bdu), \ldots,$ resp. $u_{s_1}, u_{s_2}, \ldots$ durch (bca), $(bda), \ldots,$ resp. a_{s_i} ersetzen und die so erhaltenen Formen mit $a_x^{n-\varkappa-\lambda}$ multipliciren.

Dieses ganze Verfahren will ich im Folgenden so ausdrücken:

Die Form P entsteht aus der Form F mittelst einer Combination, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzt.

Durch die Moduln ist eine Combination noch keineswegs bestimmt; es giebt vielmehr eine Anzahl von Combinationen, welche dieselben Moduln besitzen, ohne deshalb übereinzustimmen. Man erhält alle diese Combinationen dadurch, dass man je λ der p Factoren $r_x^{(i)}$ in $(r^{(i)}au)$ und je $\varkappa$ der q Factoren u_{s_i} in a'_{s_i} verwandelt; die Anzahl aller dieser Combinationen ist:

$$Z = \frac{p!}{(p-\lambda)!\,\lambda!} \cdot \frac{q!}{(q-\varkappa)!\,\varkappa!}.$$

Einige von ihnen werden übereinstimmen, andere wieder verschieden sein, je nachdem die Factoren r_x und u_s unter einander gleich oder von einander verschieden sind.

Man sieht, dass alle symbolischen Producte m^{ter} Ordnung mittelst Combinationen aus den Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hervorgehen; ebenso gehen diese wieder durch Combination aus Formen $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hervor u. s. w., so dass man alle nur denkbaren symbolischen Producte durch wiederholte Combination aus der Form f erhalten kann.

Um sämmtliche symbolischen Producte m^{ter} Ordnung zu erhalten, bilde man sich also vorerst das System

$$F_1\,,\ F_2\,,\ F_3 \,\ldots\ldots$$

aller Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Hierauf stelle man alle Modularsysteme auf, das heisst alle Werthepaare $(\varkappa, \lambda)$, die jedoch stets so gewählt werden müssen, dass die Summe $\varkappa + \lambda$ die Zahl n nicht übersteigt; jedem dieser Modularsysteme entspricht eine Anzahl Combinationen.

Wendet man alle diese Combinationen auf die Formen F an, so erhält man nach und nach alle symbolischen Producte φ.

Die Anordnung der Modularsysteme $\varkappa$, λ will ich hierbei in der folgenden Weise festsetzen.

Das erste Modularsystem ist dasjenige, für welches die Summe $\varkappa + \lambda$ verschwindet, mithin auch sowohl $\varkappa$ wie λ verschwindet.

Dann kommen die Systeme, für welche $\varkappa + \lambda = 1$ ist; dann diejenigen, für welche diese Summe $\varkappa + \lambda$ die Werthe 2, 3, 4, ... besitzt.

Die Systeme, für welche $\varkappa + \lambda$ denselben Werth hat, werden nach den Werthen von $\varkappa$ so geordnet, dass man dem Modul $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... ertheilt.

Demgemäss enthält das zweite Modularsystem die Moduln $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$; das dritte die Moduln $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$; das vierte (0, 2), das fünfte (1, 1); das sechste (2, 0) u. s. w.

Die Systeme, welche bei dieser Anordnung früher erscheinen, nenne ich niedere Modularsysteme, die später auftretenden höhere Modularsysteme; desgleichen nenne ich die niederen Modularsystemen entsprechenden Combinationen niedere Combinationen. Entsprechen 2 Combinationen A und B, die man auf eine Form:

$$F = r_x^{(1)} r_x^{(2)} r_x^{(3)} \ldots r_x^{(p)} u_{s_1} u_{s_2} \ldots u_{s_q} S$$

anwendet, demselben Modularsystem, d. h. haben sie dieselben Moduln $\varkappa$ und λ, so nenne ich sie dann benachbart, wenn die Factoren von F, welche durch sie verändert werden, bis auf einen übereinstimmen.

Es können hierbei zwei Fälle eintreten, je nachdem die nicht übereinstimmenden Factoren die Form r_x oder u_s haben.

Ich bin jetzt im Stande, die symbolischen Producte φ von der m^{ten} Ordnung zu gruppiren, wobei ich folgendermassen verfahre:

Zuerst kommen die Formen, deren Rang 0 ist, nämlich die Invarianten, dann die Formen, die den Rang 1 besitzen, dann die mit dem Rang 2, 3, 4, ... Die Formen φ, welche denselben Rang besitzen, ordne ich wieder nach den Modularsystemen, denen die Combinationen entsprechen, durch welche die Formen φ aus den Formen F entstehen.

Die in dieser Anordnung früher auftretenden Formen φ nenne ich frühere Formen, die später auftretenden spätere Formen, während diejenigen Formen, welche denselben Rang haben und ausserdem durch Combinationen mit gleichen Moduln entstehen, als gleichzeitige angesehen werden mögen.

Nachdem nun gezeigt worden ist, wie man nach und nach alle symbolischen Producte m^{ter} Ordnung erhalten kann, liegt die Frage nahe, eine Anzahl von Formen m^{ter} Ordnung zu finden, durch welche sich alle diese Formen linear mit numerischen Coefficienten darstellen lassen.

Ehe ich jedoch die eigentliche Beantwortung dieser Frage beginne, will ich vorerst einige Beziehungen zwischen den Formen φ entwickeln, deren ich dabei bedarf.

§. 2.

Ableitung der Formen aus dem Processe der Uebereinanderschiebung.

Es ist zuerst der folgende Satz, den ich beweisen will:

Entstehen die Formen φ_1 und φ_2 aus der Form

$$F = r_x^{(1)} r_x^{(2)} r_x^{(3)} \ldots r_x^{(p)} u_{s_1} u_{s_2} \ldots u_{s_q} S$$

durch zwei benachbarte Combinationen A und B, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzen, dann ist die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ eine lineare Function von früheren Formen, in deren Coefficienten die Variabeln u und x nur noch in der Verbindung u_x vorkommen.

Beweis. Sind diejenigen symbolischen Factoren von F, welche durch die Combinationen A und B nicht übereinstimmend geändert werden, $r_x^{(1)}$ und $r_x^{(2)}$, so hat die Differenz der Formen φ_1 und φ_2 ausser den gemeinsamen Factoren dieser Formen noch den Factor:

$$r_x^{(2)}\,(r^{(1)}au) - r_x^{(1)}\,(r^{(2)}au) = a_x\,(r^{(1)}\,r^{(2)}\,u) - u_x\,(r^{(1)}\,r^{(2)}\,a).$$

Sie ist die Differenz zweier Formen φ' und $u_x\varphi''$, von denen die letztere φ'' den Factor u_x, also einen Rang hat, der um 2 Einheiten kleiner ist, als der Rang von φ_1 und φ_2.

Die erstere Form φ' entsteht aus der Form F_1, welche aus F dadurch hervorgeht, dass man das symbolische Product $r_x^{(1)}\,r_x^{(2)}$ durch $(r^{(1)}\,r^{(2)}\,u)$ ersetzt, durch eine Combination, welche die Moduln $\varkappa, \lambda - 1$ besitzt, also einem niederen Modularsystem entspricht.

Die Formen φ' und φ'' sind also frühere Formen als φ_1 und φ_2, und es ist in diesem Falle der Satz erwiesen.

Im zweiten Falle mögen durch die Combinationen A und B die Factoren u_{s_1} und u_{s_2} nicht übereinstimmend geändert werden. Die Form $\varphi_1 - \varphi_2$ enthält hier ausser den gemeinsamen Factoren von φ_1 und φ_2 den Factor:

$$u_{s_2}\,a_{s_1} - u_{s_1}\,a_{s_2} = (s_1\,s_2\,(au)).$$

Sie entsteht aus der Form F_2, welche aus F dadurch hervorgeht, dass man das Product $u_{s_1}\,u_{s_2}$ durch $(s_1\,s_2\,x)$ ersetzt; durch eine Combination, deren Moduln $\varkappa - 1$, $\lambda + 1$ sind, also einem niederen Modularsystem entspricht. Somit ist auch in diesem Falle der Satz erwiesen.

Der eben bewiesene Satz kann in folgender Art und Weise ausgedehnt werden:

Entstehen die Formen φ_1 und φ_2 aus der Form

$$F = r_x^{(1)}\,r_x^{(2)}\,\ldots\,r_x^{(p)}\,u_{s_1}\,u_{s_2}\,\ldots\,u_{s_q}\,S$$

mittelst der Combinationen A_1 und A_2, welche dieselben Moduln besitzen, dann ist die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ eine lineare Function von früheren Formen ψ derselben Ordnung, deren Coefficienten L die Variabeln u und x nur in der Verbindung u_x enthalten. Es wird: $\varphi_1 - \varphi_2 = \Sigma_i\,L_i\,\psi_i$.

Beweis. Da A_1 und A_2 dieselben Moduln haben, so kann man stets solche Combinationen $A_{11}\,A_{12}\,A_{13}\,\ldots\,A_{1r}$ bestimmen, dass in der Reihe

$$A_1\,A_{11}\,A_{12}\,\ldots\,A_{1r}\,A_2$$

je zwei aufeinander folgende Combinationen in dem obigen Sinne benachbart sind.

Bezeichne ich nun die durch diese Combinationen aus F entstehenden Formen durch:

$$\varphi_1\,\varphi_{11}\,\varphi_{12}\,\varphi_{13}\,\ldots\,\varphi_{1r}\,\varphi_2;$$

so ist die Differenz:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_{11}) + (\varphi_{11} - \varphi_{12}) + (\varphi_{1r} - \varphi_2).$$

Also eine Summe von Formen, deren jede ein Aggregat von früheren Formen ist. Somit ist die Behauptung erwiesen.

Wir wollen von jetzt ab eine neue symbolische Ausdrucksweise einführen, und die Form F, welche den Grad p und die Classe q hat, symbolisch durch $\varrho_x^p\ u_\sigma^q$ bezeichnen, so dass die Identität stattfindet:

$$F = \varrho_x^p\ u_\sigma^q = r_x^{(1)}\ r_x^{(2)} \ldots r_x^{(p)}\ u_{s_1} u_{s_2} \ldots u_{s_q}\ S.$$

Ersetze ich in der Form:

$$F = \varrho_x^p\ u_\sigma^q$$

λ der Factoren ϱ_x durch $(\varrho a u)$ und $\varkappa$ der Factoren u_σ durch a_σ, und multiplicire dann mit $a_x^{n-\varkappa-\lambda}$, so erhalte ich eine neue Form:

$$\psi = \varrho_x^{p-\lambda}\ u_\sigma^{q-\varkappa}\ (\varrho a u)^\lambda\ a_\sigma^\varkappa\ a_x^{n-\varkappa-\lambda},$$

welche eine lineare homogene Function der Coefficienten von F ist.

Diesen Process will ich in der Folge so ausdrücken:

Die Form ψ entsteht aus der Form F durch eine Uebereinanderschiebung, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzt.

Die Uebereinanderschiebung unterscheidet sich wesentlich dadurch von der Combination, dass, während einem Modularsysteme viele Combinationen entsprechen, die Uebereinanderschiebung durch die Moduln genau bestimmt ist. Die Anordnung der durch Uebereinanderschiebung aus den Formen F entstehenden Formen möge in derselben Weise geschehen, wie die der durch Combination entstandenen.

Zuerst kommen die Invarianten und dann der Reihe nach die Formen, deren Rang die Werthe $1, 2, 3 \ldots n$ hat.

Die Formen desselben Ranges werden nach den Modularsystemen geordnet, denen die Uebereinanderschiebungen entsprechen, mittelst denen sie aus den F hervorgehen, sowie nach diesen Formen selbst, so dass hier keine gleichzeitigen Formen auftreten, sondern jede Form ihren festen Platz einnimmt.

Man kann die durch Uebereinanderschiebung entstehende Form ψ leicht durch Formen darstellen, die durch Combination entstehen. Zu dem Ende setze ich in der Identität für $x : x + \mu y$ und für $u : u + \nu v$ und vergleiche dann auf beiden Seiten die Coefficienten von $\mu^\lambda \nu^\varkappa$. Ersetze ich in der so entstehenden Gleichung die Symbole ϱ_y und $r_y^{(i)}$ durch $(\varrho a u)$ und $(r^{(i)} a u)$ und ebenso ϑ_σ und ϑ_{s_i} durch a_σ und a_{s_i}, und multiplicire dann mit $a_x{}^{n-\varkappa-\lambda}$, so gelange ich zu der Identität:

$$\frac{p!\ q!}{(p-\lambda)!\ \lambda!\ (q-\varkappa)!\ \varkappa!}\ \psi = \Sigma\, \varphi_i,$$

auf deren rechten Seite die Summation über alle Formen φ_i auszudehnen ist, welche durch die

$$\frac{p!\,q!}{(p-\lambda)!\,\lambda!\,(q-\varkappa)!\,\varkappa!}$$

Combinationen entstehen, die dem Modularsystem $\varkappa, \lambda$ entsprechen.

Bedeutet φ eine dieser Formen, so können wir unserer Gleichung die Form geben:

$$\varphi - \psi = \frac{(p-\lambda)!\,\lambda!\,(q-\varkappa)!\,\varkappa!}{p!\,q!}\,\Sigma(\varphi-\varphi_i).$$

Die Differenz $\varphi - \varphi_i$ ist, wie oben bewiesen wurde, eine Function $\Sigma L \varphi'$ von früheren Formen φ', mithin auch die rechte Seite, es ist:

$$\varphi = \psi + \Sigma L \varphi'$$

wo die L die Variabeln x und u nur in der Verbindung u_x, die Coefficienten von f aber gar nicht enthalten. Im Falle φ die früheste Form m^{ter} Ordnung ist, verschwinden die Formen φ' und man hat:

$$\varphi = \psi.$$

Der nämliche Fall tritt ein, wenn φ eine Invariante ist.

Die Formel $\varphi = \psi + \Sigma L \varphi'$ kann man leicht in die folgende transformiren:

$$\varphi = \psi + \Sigma M \psi',$$

in welcher die ψ' frühere durch Uebereinanderschiebung entstandene Formen ψ bedeuten und die Coefficienten M wieder die Variabeln x und u nur in der Verbindung u_x, die Coefficienten von f aber nicht enthalten.

Um diesen Satz nachzuweisen, kann ich, da er für die früheste der Formen φ gilt, die Annahme machen, er sei für alle Formen φ' nachgewiesen, welche in der Anordnung der durch Combination entstandenen Formen vor φ stehen; dass alle diese also in die Form gebracht werden können:

$$\varphi' = \psi' + \Sigma M \psi''$$

Trägt man diese Werthe in die Formel $\varphi = \psi + \Sigma L \varphi'$ ein, so erhält man die Gleichung:

$$\varphi = \psi + \Sigma L \psi' + \Sigma L M \psi'',$$

welche die verlangte Form besitzt.

Man sieht somit, dass alle Formen m^{ter} Ordnung sich linear aus solchen Formen zusammensetzen lassen, welche aus den Formen F durch Uebereinanderschiebung entstehen, dass diese letzteren also ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung bilden. Dieses System ist jedoch keineswegs das kleinste volle System der Formen m^{ter} Ordnung; ein solches wird vielmehr erst dadurch erhalten, dass man von den oben gebildeten Formen alle diejenigen weglässt, welche durch frühere Formen linear dargestellt werden können.

Alle diese wegzulassenden Formen zu erkennen, ist im Allgemeinen sehr schwer, jedoch erhalten wir durch den folgenden Satz eine grosse Anzahl derselben.

Da nämlich die aus den Formen F durch Uebereinanderschiebung entstehenden Formen homogene lineare Functionen der Coefficienten der Form F sind, so verschwinden oder lassen sich durch frühere Formen ausdrücken alle diejenigen Formen ψ, welche aus Formen F entstehen, die diese Eigenschaft besitzen.

Somit erhält man ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung, das weniger Formen enthält als das obige, indem man von irgend einem vollen System

$$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \ldots$$

von Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeht, und auf die Formen derselben alle Uebereinanderschiebungen anwendet.

Man kann dieses System durch ein anderes ersetzen, welches ebenso viel Formen enthält und zu dem man dadurch gelangt, dass man auf die Formen F Combinationen der Art anwendet, dass jedem Modularsysteme eine einzige Combination entspricht.

§. 3.

Grundlage für den Beweis, dass das vollständige System aus einer endlichen Anzahl von Formen besteht.

Den Nachweis, dass das so entstehende System ein volles System ist, werde ich dadurch führen, dass ich zeige, wie jede Form des obigen Systems der ψ sich linear durch die Formen dieses Systems, welche ich K nennen will, ausdrücken lässt. Für die erste Form ψ ist dies unmittelbar klar, da sie nach §. 2. gleich der ersten Form K ist. Um den Satz für eine andere Form ψ nachzuweisen, mache ich die Annahme, er wäre für alle früheren Formen ψ erwiesen; man könne ihnen also die Form geben:

$$\psi' = \Sigma L' K'$$

wo wieder die Coefficienten L' nur von dem Ausdruck u_x abhängen. Ersetze ich dann in der Formel $\varphi = \psi + \Sigma M \psi'$ (§. 2.) die Form φ durch K und trage für die ψ' ihre Werthe ein, so wird:

$$\psi = K + \Sigma L K',$$

wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Um aus dem vollen Systeme der Formen F der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu dem Systeme der Formen K m^{ter} Ordnung zu gelangen, muss man mithin folgendes Verfahren einschlagen.

Zuerst bilde man sich eine Tafel aller denkbaren Modularsysteme etwa in folgender Art:

No. d. Mod. S.	u in a	x in au
1	0 mal	0 mal
2	0 -	1 -
3	1 -	0 -
4	0 -	2 -
5	1 -	1 -
6	2 -	0 -
7	0 -	3 -
8	1 -	2 -
9	2 -	1 -
10	3 -	0 -
11	0 -	4 -
12	1 -	3 -
. . .	. . .	. . .

Sodann wende man auf jede der Formen F die Combinationen

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots$$

an, welche der Reihe nach so gewählt werden müssen, dass sie den Modularsystemen entsprechen, A_1 dem ersten, A_2 dem zweiten u. s. w.

Da man unter den Formen K diejenigen auslassen kann, welche verschwinden oder lineare Functionen von früheren sind, so wird man, um ein möglichst kleines Formensystem zu erhalten, die Combinationen A so auswählen, dass dieser Fall möglichst oft eintritt.

Diesen Zweck wird man besonders dann erreichen, wenn es eine Combination A der Art giebt, dass die durch sie entstehende Form K aus irgend einer andern Form m^{ter} Ordnung F durch eine niedere Combination zu gleicher Zeit entsteht. Sie kann dann aus dem Formengebiete der Form F weggelassen werden.

Ebenso, wie man nämlich aus der Form K zu der Form F, aus welcher sie durch die Combination A entstanden ist, dadurch gelangt, dass man nach Weglassung der Factoren a_x die Factoren (bau), (cau) $\ldots$, (bca), (bda) $\ldots$ in b_x, c_x, $\ldots$ (bcu), (bdu), $\ldots$ verwandelt, kann man auch aus K eine andere Form F' bilden, indem man nach Weglassung der Factoren b_x die Factoren (abu), (cbu), $\ldots$, (cab), (cdb), (adb), $\ldots$ durch a_x, c_x $\ldots$ (cau), (cdu), (adu), $\ldots$, ersetzt. Aus dieser Form F' entsteht dann K durch eine Combination A'. In ähnlicher Weise kann man mit den Symbolen c, d, $\ldots$ verfahren, so dass K durch eine Reihe von Combinationen aus den Formen F'', $F^{(3)}$, $\ldots$ ensteht.

Nachdem diejenigen aus F entstehenden Formen entfernt sind, welche durch frühere linear ausdrückbar sind, will ich die übrigen „zu F gehörige Formen“ nennen. Es gilt dann der folgende Satz:

Bilden die Formen:

$$F_1,\ F_2,\ F_3\ \ldots$$

ein volles System von Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, dann bilden die zu ihnen gehörigen Formen ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung.

Die Bedeutung eines vollen Systems von Formen m^{ter} Ordnung ist somit festgestellt und gezeigt, wie man zu einem solchen gelangen kann; ich gehe nun zu der allgemeinen Untersuchung über, wie man alle Covarianten, Invarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen von f, durch eine möglichst geringe Anzahl von Formen ausdrücken kann.

Ich nenne ein System von Formen:

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3,\ \ldots$$

ein vollständiges Formensystem, wenn alle Formen von f ganze Functionen der ϑ mit numerischen Coefficienten sind.

Unter diesen Formen müssen sich natürlich auch die einfachsten f und u_x befinden.

Die Frage, die ich nun untersuchen will, ist, nothwendige und hinreichende Merkmale der vollständigen Systeme zu finden und sodann für die cubische ternäre Form $f = a_x^3$ ein endliches System aufzustellen, welches diese Merkmale besitzt.

Zu dem Ende bilde ich 1) die zu den ϑ gehörigen Formen; 2) die zu den Producten der ϑ, unter welche ich auch die Potenzen und ihre Producte rechne, gehörigen Formen; sind alle dieselben ganze Functionen der ϑ mit numerischen Coefficienten, so behaupte ich, dass die Formen ϑ ein volles Formensystem bilden.

Beweis. Die einzige Form 0^{ter} Ordnung ist u_x, für diese gilt der Satz.

Ich mache daher die Annahme, dass der Satz für die Formen:

$$1^{\text{ter}}\ 2^{\text{ter}}\ 3^{\text{ter}} \ldots\ldots (m-1)^{\text{ter}}$$

Ordnung erwiesen sei, und will ihn für die Formen m^{ter} Ordnung beweisen.

Da nach Annahme alle Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ganze Functionen der ϑ sind, so lassen sie sich linear durch diejenigen Formen ϑ und diejenigen Producte darstellen, welche von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Diese letzteren bilden mithin ein volles System von Formen $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung und die zu ihnen gehörigen Formen ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung.

Diese letzteren Formen sind nun nach Voraussetzung ganze Functionen der Formen ϑ, mithin sind es auch alle Formen m^{ter} Ordnung, da sie sich aus ihnen linear zusammensetzen lassen. Ist ϑ ein Factor des Productes P, so nenne ich die zu P gehörigen Formen, zu ϑ uneigentlich gehörige Formen, während ich die zu ϑ gehörigen Formen eigentlich zugehörige Formen nennen will. Die zu P gehörigen Formen gehören mithin uneigentlich zu den verschiedenen Factoren von P.

Um nachzuweisen, dass das System der ϑ ein vollständiges System ist, muss man für jedes einzelne ϑ mithin zeigen, dass die zu ihm eigentlich und uneigentlich gehörigen Formen durch die ϑ ausdrückbar sind.

Um dies zu sehen, bilde ich mir die Tafel aller Modularsysteme und wende für jedes derselben eine Combination auf die Form ϑ und das Product $H = \vartheta P$ an, in dem P irgend ein Product der ϑ bedeuten möge. Ich werde diese Form P symbolisch durch $u_\sigma^\nu\ \varrho_x^\mu$ bezeichnen und bemerke hierbei, dass die Exponenten μ und ν beliebige Werthe (auch den Werth 0) besitzen können.

Bei der Anwendung der Combinationen auf H muss man die Factoren von ϑ zuerst verändern und erst, wenn diese nicht mehr ausreichen, darf man die übrigen Factoren ϱ_x und u_σ verwandeln. Würde man mit diesen beginnen, so wären die Combinationen nicht auf Formen anwendbar, für die μ und ν kleine Werthe haben, die Resultate also nicht allgemein gültig.

Denjenigen Modularsystemen, denen Combinationen entsprechen, welche auf die Form ϑ anwendbar sind, werden solche Combinationen entsprechen, die auf die Producte H angewandt nur die Factoren von ϑ ändern. Die durch dieselben aus H entstehenden Formen enthalten den Factor P, sind also durch Formen niederer Ordnung, mithin auch durch die ϑ ausdrückbar, wir brauchen sie nicht weiter zu untersuchen. Von den übrigen will ich diejenigen Modularsysteme zu ϑ gehörig nennen, deren entsprechende Combinationen auf H angewandt zu H gehörige Formen erzeugen.

Die dem Modularsystem M entsprechenden Combinationen brauche ich daher nur auf Producte solcher Formen ϑ anzuwenden, zu denen das System M gehört.

Aber auch von diesen Producten hat man nur eine geringe Anzahl zu untersuchen nöthig. Zunächst können diejenigen Producte der ϑ unberücksichtigt bleiben, welche einen so niedrigen Grad oder eine so niedrige Classe besitzen, dass die M entsprechenden Combinationen sich nicht darauf anwenden lassen. Bei Weitem wichtiger ist indess eine andere Art von Producten der ϑ, denen man unmittelbar ansieht, dass sie sich auf Formen von niedrigerer Ordnung, also auch auf Formen ϑ zurückführen lassen. Es entstehen dieselben aus allen denjenigen Producten:

$$H = \vartheta_1\, \vartheta_2\, \vartheta_3 \ldots,$$

welche als Factor R ein Product der ϑ von niedrigerer Ordnung besitzen, so dass man also eine Identität der Form hat:

$$H = RS,$$

und wo die dem Systeme M entsprechende Combination, welche auf H anzuwenden ist, so gewählt werden kann, dass nur die Factoren von R sich ändern; die resultirende Form besitzt dann immer den Factor S, ist also auf Formen niedrigerer Ordnung reducirbar.

Wenn man diese beiden Arten von Producten auslässt, so bleibt nur noch eine endliche Anzahl von Producten P übrig, von denen nachgewiesen werden muss, dass sie durch Anwendung von passenden Combinationen Formen hervorbringen, welche sich durch die Formen ϑ darstellen lassen. Diese übrigbleibenden Producte nenne ich zu dem Modularsystem M gehörige Producte.

Der Beweis, dass ein gegebenes Formensystem der ϑ ein vollständiges System ist, kann hiernach in folgende 4 Abschnitte eingetheilt werden:

1) Nachweis, dass die den ϑ eigentlich zugehörigen Formen ganze Functionen derselben sind.
2) Aufsuchung der zu jedem ϑ gehörigen Modularsysteme.
3) Aufsuchung der jedem Modularsystem M entsprechenden Producte P.
4) Nachweis, dass es für alle Modularsysteme M entsprechende Combinationen giebt, die, auf die zu ihm gehörigen Producte P angewandt, zu Formen führen, welche sich durch die ϑ darstellen lassen.

§. 4.

Beweis der Endlichkeit des vollständigen Systems für ternäre cubische Formen.

Nachdem ich nun allgemein gezeigt habe, an welchen Merkmalen man ein vollständiges Formensystem erkennen kann, will ich für die cubische Form $f = a_x^3$ den Nachweis liefern, dass die folgenden 34 Formen ϑ ein solches vollständiges System bilden.

0te Ord.	u_x
1te „	$f = a_x^3$
2te „	$a_x\, b_x\, (abu)^2$
3te „	$a_x\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)$; $\quad \alpha_x^3 = a_x\, b_x\, c_x\, (abc)^2$; $u_s^3 = (abc)\, (abu)\, (acu)\, (bcu)$
4te „	$a_x^2\, \alpha_x^2\, (a\alpha u)$; $\quad u_s^2\, a_s\, a_x^2$; $\quad S = a_s^3$; $(abu)^2\, (cdu)^2\, (bcu)\, (adu) = u_p^6$

5te Ord.	$u_s^2 a_s a_x b_x^2 (abu)$; $u_s a_s b_s a_x^2 b_x^2$; $u_s^2 a_s b_x (abu)^2$; $a_s b_s u_s (abu)^2 = u_t^3$;
6te „	$u_s a_s b_s a_x^2 b_x c_x^2 (bcu)$; $u_s^2 a_s c_x^2 (abu)^2 (bcu)$; $u_t^2 a_t a_x^2$; $a_t^3 = T$;
7te „	$u_s^2 u_p^5 (spx)$; $u_t^2 a_t a_x b_x^2 (abu)$; $a_t b_t u_t a_x^2 b_x^2$; $a_t u_t^2 b_x (abu)^2$;
8te „	$a_t b_t u_t a_x^2 b_x c_x^2 (bcu)$; $q_x^6 = a_t b_t c_t a_x^2 b_x^2 c_x^2$; $a_t u_t^2 c_x^2 (abu)^2 (bcu)$; $u_s^2 u_t^2 (stx)$;
9te „	$a_x^2 q_x^5 (aqu)$; $u_p^5 u_t^2 (ptx)$; $u_s^2 u_t a_t a_x^2 (stx)$;
10te „	$a_x^2 b_x^2 u_s^2 a_t b_t (stx)$; $u_s^2 u_t a_t b_x (stx) (abu)^2$;
11te „	$a_x^2 q_x^5 (\alpha q u)$;
12te „	$a_x^2 \alpha_x^2 q_x^5 (a \alpha q)$; $u_s^2 u_t^2 u_p^5 (spt)$.

Um die zu diesen 34 Formen eigentlich zugehörigen Formen aufzustellen und dieselben durch diese Formen selbst auszudrücken, bilde ich mir zuerst die Tafel aller hier möglichen Modularsysteme:

No. d. Mod. S.	u in a	x in au
0	0mal	0mal
1	0 -	1 -
2	1 -	0 -
3	0 -	2 -
4	1 -	1 -
5	2 -	0 -
6	0 -	3 -
7	1 -	2 -
8	2 -	1 -
9	3 -	0 -

und wende diesen Systemen entsprechende Combinationen auf jede der Formen ϑ an.

Das 0te Modularsystem brauche ich hierbei nie zu berücksichtigen, da durch die einzige demselben entsprechende Combination jede Form H in das Product fH übergeht, also unmittelbar durch Formen niederer Ordnung ausdrückbar ist.

Es ist also nur nöthig Combinationen, welche den übrigen Modularsystemen entsprechen, auf die Formen ϑ anzuwenden. Um dieses Verfahren übersichtlicher zu machen, stelle ich 33 Tafeln auf, denen ich die folgende Einrichtung geben will.

An der Spitze der Tafel steht die Form ϑ, deren eigentlich zugehörige Formen ich berechnen will; auf dem linken Rande dann die Ordnungszahlen aller derjenigen Modularsysteme, die den auf die Form ϑ angewandten Combinationen entsprechen; alsdann folgen daneben die durch diese passend gewählten Combinationen entstehenden Formen. Diese aus den Formen ϑ entstehenden Formen Q sind keineswegs sämmtlich ihre zugehörigen Formen; viele derselben werden aus anderen Formen R durch niedere Combinationen entstehen, als aus derjenigen Form ϑ, in deren Tafel sie sich befinden. Tritt dieser Fall ein, so will ich es dadurch andeuten, dass ich rechts unten an die Form Q das Zeichen $+$ mache Q_+, alsdann das Zeichen : folgen lasse und dahinter die Form R setze, aus welcher Q durch eine niedere Combination als aus ϑ entsteht $Q_+ : R$.

Die so bezeichneten Formen Q brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Von den andern muss nachgewiesen werden, dass sie sich auf frühere Formen zurückführen lassen; dieser Nachweis wird mit symbolischer Rechnung geführt werden, und zwar werde ich mich meistentheils der folgenden beiden Identitäten bedienen:

I. $$c_x (abd) - d_x (abc) = b_x (acd) - a_x (bcd).$$

II. $$c_x d_x (abc)(abd) = \tfrac{1}{2}\left\{c_x^2 (abd)^2 + d_x^2 (abc)^2 - b_x^2 (acd)^2 - a_x^2 (bcd)^2 + 2 a_x b_x (acd)(bcd)\right\},$$

welche ich schlechthin als Identität I. und Identität II. citiren will.

Da ferner die symbolischen Buchstaben $a\, b\, c$ dieselbe Bedeutung haben, so wird eine Form F ihren Werth nicht ändern, wenn man sie durch die Form F' ersetzt, in welche sie durch Vertauschung der Buchstaben unter einander übergeht; in diesem Falle werde ich F durch $\frac{F+F'}{2}$ ersetzen.

Endlich wird F verschwinden, wenn es durch Vertauschung der symbolischen Buchstaben unter einander sein Zeichen ändert. Ich kann in diesem Falle ohne Weiteres $F = 0$ setzen.

Tafel I.

$$f = a_x^3.$$

1. $a_x^2 b_x^2 (abu) = 0.$
2. $a_x b_x (abu)^2.$
3. $(abu)^3 = 0.$

Tafel II.

$$a_x b_x (abu)^2.$$

1. $a_x c_x^2 (bcu)(abu)^2.$
2. $a_x b_x (abu)(abc) c_x^2 = \frac{1}{3} a_x b_x c_x \{c_x (abu) + a_x (bcu) - b_x (acu)\}$
   $= \frac{1}{3} u_x (abc)^2.$ Id. I.
3. $c_x (acu)(bcu)(abu)^2$
   $= \frac{1}{3} (acu)(bcu)(abu) \{c_x (abu) + a_x (bcu) - b_x (acu)\}$
   $= \frac{1}{3} u_x (abc)(acu)(bcu)(abu).$ Id. I.
4. $c_x a_x (bcu)(abu)(abc) = 0.$
5. $a_x b_x c_x (abc)^2.$
7. $(acu)(bcu)(abu)(abc).$
8. $a_x (bcu)(abc)^2 = 0.$

Tafel III.

$$a_x\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu).$$

1. $a_x\, c_x\, (abu)^2\, (bcu)\, d_x^2\, (cdu)$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_x\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (cdu)\, \{d_x\, (bcu) - c_x\, (bdu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_x\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (cdu)\, \{u_x\, (bcd) - b_x\, (cdu)\}$$
2. $a_x\, c_x^2\, d_x^2\, (abu)^2\, (bcd) = 0.$
3. $c_x\, d_x\, (adu)\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcu) = 0.$
4. $c_x^2\, d_x\, (adu)\, (abu)^2\, (bcd)_+ : d_x\, (adu)\, (abu)^2\, (bdu).$
5. $c_x^2\, a_x\, d_x\, (abd)^2\, (bcu)_+ : a_x\, d_x\, (abd)^2\, b_x.$
6. $(adu)\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu).$
7. $c_x\, (adu)\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcd)_+ : (adu)\, d_x\, (abu)^2\, (bdu).$
8. $c_x^2\, (adu)\, (abd)^2\, (bcu)_+ : (adu)\, (abd)^2\, b_x.$
9. $a_x\, c_x^2\, (abd)^2\, (bcd)_+ : a_x\, (abd)^2\, (bdu).$

Tafel IV.

$$u_s^3 = (abc)\, (abu)\, (acu)\, (bcu).$$

1. $u_s^2\, a_x^2\, a_s.$
2. $u_s\, a_s^2\, a_x = d_x\, (abc)\, (abu)\, (acd)\, (bcd)$
$$= \tfrac{1}{3}\, (abc)\, (acd)\, (bcd)\, \{d_x\, (abu) + a_x\, (bdu) - b_x\, (adu)\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\, u_x\, (abc)\, (acd)\, (acd)\, (bcd) = \tfrac{1}{3}\, S\, u_x.$$
3. $a_s^3.$

Die Identität $u_s\, a_x\, a_s^2 = \tfrac{1}{3}\, S\, u_x$ lehrt uns, dass alle Formen, die den symbolischen Factor a_s^2 enthalten, die Invariante S als wirklichen Factor besitzen.

Tafel V.

$$\alpha_x^3 = (abc)^2\, a_x\, b_x\, c_x.$$

1. $a_x^2\, \alpha_x^2\, (a\alpha u).$
3. $a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = a_x\, d_x\, (abc)^2\, (bdu)\, cdu)$
$$= a_x\, (abc)\, (bdu)\, (cdu)\, \{a_x\, (bcd) - b_x\, (acd) - c_x\, (abd)\}. \text{ Id. I.}$$

Der erste Theil dieser Summe ist $u_s^2\, a_x^2\, a_s$, die beiden anderen einander gleich, es ist daher:
$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 - u_s^2\, a_s\, a_x^2 = -2\, a_x\, b_x\, (abc)\, (bdu)\, (cdu)\, (acd).$$

Durch Vertauschung der Buchstaben a und b und sodann von b und d erhält man die Gleichungen:
$$a_x\alpha_x\, (a\alpha u)^2 - u_s^2 a_s a_x^2 = -a_x b_x (abc)(cdu)\, \{(bdu)\, (acd) - (adu)\, (bcd)\}$$
$$= -a_x\, b_x\, (abc)\, (cdu)^2\, (abd).$$
$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 - u_s^2\, a_s\, a_x^2 = -(abc)\, (acd)\, (bdu)\, a_x\, \{b_x\, (cdu) + d_x\, (bcu)\}$$
$$= -(abc)\, (acd)\, (bdu)\, a_x \{u_x\, (bcd) - c_x\, (bdu)\},$$

und durch Addition:

$$2\,a_x\,\alpha_x\,(a\alpha u)^2 - 2u_s^2\,a_s\,a_x^2 = -u_x\,.\,a_x\,(abc)\,(acd)\,(bcd)\,(bdu)$$
$$= -u_x\,a_x\,a_s^2\,u_s = -\tfrac{1}{3}\,S\,u_x^2. \qquad \text{(s. Taf. IV.)}$$
$$a_x\,\alpha_x\,(a\alpha u)^2 = a_x^2\,u_s^2\,a_s - \tfrac{1}{6}\,S\,u_x^2.$$

6. $(a\alpha u)^3 = (abc)^2\,(adu)\,(bdu)\,(cdu)$
$$= (abc)\,(adu)\,(bdu)\,\{(bcd)\,(acu) - (bcu)\,(acd)\}$$
$$= 2\,(abc)\,(adu)\,(bdu)\,.\,(bcd)\,(acu) = 0.$$

Tafel VI.

$$a_x^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u).$$

1. $\alpha_x^2\,a_x\,b_x^2\,(abu)\,(a\alpha u) = \frac{1}{2}\,\alpha_x^2\,a_x\,b_x\,(abu)\,\{b_x\,(a\alpha u) - a_x\,(b\alpha u)\}$
$$= \tfrac{1}{2}\,\alpha_x^2\,a_x\,b_x\,(abu)\,\{\alpha_x\,(abu) - u_x\,(ab\alpha)\}$$
2. $a_x^2\,b_x^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha b) = 0.$
3. $a_x\,b_x\,\alpha_x^2\,(abu)\,(b\alpha u)\,(a\alpha u) = 0.$
4. $b_x\,a_x^2\,\alpha_x\,(b\alpha u)\,(a\alpha b)_+ \,:\, \alpha_x\,(b\alpha u)^2\,b_x.$
6. $a_x\,(abu)\,(b\alpha u)^2\,(a\alpha u)_+ \,:\, b_x\,\alpha_x\,(b\alpha u)^2.$
7. $a_x^2\,(b\alpha u)^2\,(a\alpha b)_+ \,:\, (b\alpha u)^3.$

Tafel VII.

$$u_s^2\,a_x^2\,a_s.$$

1. $u_s^2\,a_s\,a_x\,b_x^2\,(abu).$
2. $u_s\,a_s\,b_s\,a_x^2\,b_x^2.$
3. $u_s^2\,a_s\,b_x\,(abu)^2.$
4. $u_s\,a_s\,b_s\,a_x\,b_x\,(abu) = 0.$
5. $b_s^2\,a_x^2\,a_s\,b_{x+} : b_s^2\,u_s\,b_x.$
7. $b_s\,u_s\,(abu)^2\,a_s.$
8. $b_s^2\,a_x\,a_s\,(abu)_+ \,:\, b_s^2\,u_s\,b_x.$

Tafel VIII.

$$u_p^6 = (abu)^2\,(cdu)^2\,(adu)\,(bcu).$$

2. $u_p^5\,a_p\,a_x^2 = (abu)^2\,(cdu)\,(adu)\,(bcu)\,(cde)\,e_x^2$
$$= (abu)\,(cdu)\,(adu)\,(bcu)\,(cde)\,e_x$$
$$\{b_x\,(aeu) - a_x\,(beu) + u_x\,(abe)\} \qquad \text{Id. I.}$$
$$= 2\,(abu)\,(cdu)\,(adu)\,(bcu)\,(cde)\,b_x\,e_x\,(aeu)$$
$$+ u_x\,.\,e_x\,(abu)\,(cdu)\,(adu)\,(bcu)\,(cde)\,(abe).$$

Das zweite Glied hat den Factor u_x, lässt sich also auf niedere Formen reduciren, das erste hat den Werth:

$$(adu)\,(aeu)\,(cde)\,.\,(abu)\,(bcu)\,b_x\,\{e_x\,(cdu) - d_x\,(ceu)\}$$
$$= (adu)\,(aeu)\,(cde)\,.\,(abu)\,(bcu)\,b_x\,\{u_x\,(cde) - c_x\,(deu)\}.$$

Das erste Glied kann man wieder vernachlässigen und das zweite durch die Summe ersetzen:

$$-\tfrac{1}{3}(adu)(aeu)(deu)\,.\,b_x\,c_x\,(bcu)\,\{(cde)(abu)$$
$$-(cda)(ebu)-(cae)(dbu)\}=+\tfrac{1}{3}u_s^3\,.\,b_x\,c_x\,(bcu)^2$$

5. $(abu)^2\,(cde)^2\,(adu)\,(bcu)\,e_x=(abu)^2\,(a\alpha u)\,(b\alpha u)\,\alpha_x$

$$=(abu)(a\alpha u)(b\alpha u)\,\{b_x\,(a\alpha u)-a_x\,(b\alpha u)+u_x\,(ab\alpha)\}.$$

Das erste und zweite Glied entstehen durch niedere Combinationen aus der Form $a_x\,\acute{a}_x\,(a\alpha u)^2$, das dritte hat den Factor u_x.

9. $(abu)^2\,(cde)^2\,(ade)\,(bcu)=0.$

Tafel IX.

$$u_s^2\,a_s\,a_x\,b_x^2\,(abu).$$

1. $u_s^2\,a_s\,a_x\,b_x\,c_x^2\,(abu)\,(bcu)=\tfrac{1}{2}u_s^2\,a_s a_x b_x c_x\,(bcu)\,\{c_x\,(abu)-b_x\,(acu)\}$
$=\tfrac{1}{2}u_s^2\,a_s a_x b_x c_x\,(bcu)\,\{u_x\,(abc)-a_x\,(bcu)\}$
2. $u_s^2\,a_s\,a_x\,b_x^2\,c_x^2\,(abc)=0.$
3. $u_s^2\,a_s\,(abu)\,(acu)\,(bcu)\,b_x\,c_x=0.$
4. $u_s^2\,a_s\,(acu)\,b_x^2\,c_x\,(abc)_+ : u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,c_x.$
5. $c_s^2\,a_s\,a_x\,b_x^2\,c_x\,(abu)_+ : c_s^2\,a_s\,a_x^2\,c_x.$
6. $u_s^2\,a_s\,(acu)\,(bcu)^2\,(abu)=\tfrac{1}{3}u_s^2\,(acu)\,(bcu)\,(abu)$
$\{a_s\,(bcu)-b_s\,(acu)+c_s\,(abu)\}=\tfrac{1}{3}u_s^3\,.\,u_{s_1}^3.$
7. $u_s\,c_s\,a_s\,(acu)\,(bcu)\,b_x\,(abu)=0.$
8. $c_s^2\,a_s\,(acu)\,b_x^2\,(abu)_+ : c_s^2\,a_s\,(acu)\,a_x.$
9. $c_s^2\,a_s\,a_x\,b_x^2\,(abc)_+ : c_s^2\,a_s\,a_x\,(acu).$

Tafel X.

$$u_s\,a_s\,b_s\,a_x^2\,b_x^2.$$

1. $u_s\,a_s\,b_s\,a_x^2\,b_x\,c_x^2\,(bcu).$
2. $a_s\,b_s\,c_s\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2.$

Diese Form kann, da nach Tafel V $u_s^2\,c_s\,c_x^2=c_x\,\alpha_x\,(c\alpha u)^2+\frac{S}{6}\,u_x^2$ ist auf die folgende Form zurückgeführt werden:

$$a_x^2\,b_x^2\,c_x\,\alpha_x\,(c\alpha a)\,(c\alpha b)=\tfrac{1}{2}\,a_x\,b_x\,c_x\,\alpha_x\,\{a_x^2\,(bc\alpha)^2+b_x^2\,(ac\alpha)^2$$
$$-c_x^2\,(ab\alpha)^2-\alpha_x^2\,(abc)^2+2\,c_x\,\alpha_x\,(abc)\,(ab\alpha)\}.\ \text{Id. II.}$$
$$=\tfrac{1}{2}\,a_x\,b_x\,c_x\,\alpha_x\,\{a_x^2\,(bc\alpha)^2-\alpha_x^2\,(abc)^2+$$
$$\tfrac{2}{3}\,\alpha_x\,(abc)\,\{c_x\,(ab\alpha)-b_x\,(ac\alpha)+a_x\,(bc\alpha)\}\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\,a_x b_x c_x \alpha_x\,\{a_x^2(bc\alpha)^2-\alpha_x^2(abc)^2+\tfrac{2}{3}\alpha_x^2(abc)^2\}.\ \text{Id. I.}$$

3. $u_s\,a_s\,b_s\,a_x^2\,c_x\,(bcu)^2_+ : u_s^2\,b_s\,c_x\,(bcu)^2.$
4. $c_s\,a_s\,b_s\,a_x^2\,b_x\,c_x\,(bcu)=0.$
6. $u_s\,a_s\,b_s\,a_x\,(acu)\,(bcu)^2_+ : u_s^2\,b_s\,c_x\,(bcu)^2.$
7. $a_s\,b_s\,c_s\,a_x^2\,(bcu)^2_+ : u_s\,b_s\,c_x\,(bcu)^2.$

Tafel XI.

$$u_s^2\; a_s\; b_x\; (abu)^2.$$

1. $u_s^2\; a_s\; (bcu)\; (abu)^2\; c_x^2$.

2. $u_s^2\; a_s\; b_x\; c_x^2\; (abu)\; (abc) = \frac{1}{2}\, u_s^2\; a_s\; b_x\; c_x\; (abc)\; \{c_x\; (abu) - b_x\; (acu)\}$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, a_s b_x c_x\; (abc) \{u_x (abc) - a_x (bcu)\} \quad \text{Id. I.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_x . u_s^2 \alpha_s \alpha_x^2 - \tfrac{1}{6}\, u_s^2\, a_x b_x c_x\; (abc)\; \{a_s\; (bcu) - b_s\; (acu) + c_s\, (abu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_x . u_s^2 \alpha_s \alpha_x^2 - \tfrac{1}{6}\, u_s^3 .\; a_x\; b_x\; c_x\; (abc)^2. \quad \text{Id. I.}$$

4. $u_s^2\; a_s\; (bcu)\; (abu)\; (abc)\; c_x = \frac{1}{2}\, u_s^2\; (a_s c_x - c_s\; a_x)\; (bcu)\; (abu)\; (abc)$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\; [ac\; (sx)]\; (bcu)\; (abu)\; (abc)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\; u_{s_1}^2\; (s_1 s x) = 0.$$

5. $c_s^2\; a_s\; b_x\; c_x\; (abu)_+^2 : c_s^2\; a_s\; c_x\; a_x^2$.

8. $c_s^2\; a_s\; (bcu)\; (abu)_+^2 : c_s^2 . a_s\; c_x\; a_x^2$.

9. $c_s^2\; a_s\; b_x\; (abu)\; (abc)_+ : c_s^2\; a_s\; a_x\; (acu)$.

Tafel XII.

$$u_t^3 = a_s\; b_s\; u_s\; (abu)^2.$$

2. $u_t^2\; a_x^2\; a_t = \frac{1}{3}\, [a_s\; b_s\; c_s\; (abu)^2 + 2\; a_s\; b_s\; u_s\; (abu)\; (abc)]\; c_x^2$
$$= \tfrac{1}{3}\, c_x^2\, a_s b_s\; (abu) \{- a_s\; (cbu) + b_s\; (acu) + u_s\; (abc) + 2\; u_s\; (abc)\}.$$

Nun ist nach Tafel IV: $b_s^2\; b_x\; u_s = \dfrac{S}{3}\, u_x$; mithin
$$\frac{c_x^2}{3}\, a_s\; b_s^2\; (abu)\; (acu) = \frac{c_x^2}{3}\, a_s^2\; b_s\; (abu)\; (cbu)$$
$$= \frac{S}{9}\, c_x^2\, (aau)\; (acu) = 0.$$
$$u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_s\; c_x^2\; a_s\; b_s\; (abu)\; (abc) = a_s\; b_s\; c_x\; (abc)\; u_s \{u_x\; (abc) - a_x\; (bcu) + b_x\; (acu)\} \quad \text{Id. I.}$$
$$= u_x . a_s\; b_s\; c_x\; u_s\; (abc)^2 + 2\; a_s\; b_s\; b_x\; c_x\; (abc)\; (acu)\; u_s$$
$$= u_x . a_s b_s c_x u_s (abc)^2 + a_s b_x c_x u_s (abc) \{b_s (acu) - c_s (abu)\}$$
$$= u_x . a_s b_s c_x u_s (abc)^2 + a_s b_x c_x u_s (abc) \{a_s (bcu) - u_s (abc)\}$$

Die Form $a_s^2 b_x c_x u_s\, (abc)\; (bcu)$ hat (Taf. IV.) den Werth: $\dfrac{S}{3}\; b_x\; c_x\; (bcu)^2$ also:
$$u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_x . \alpha_s^2\, u_s\; \alpha_x + \frac{S}{3} \cdot b_x\; c_x\; (bcu)^2 - \alpha_s\; \alpha_x^2\; u_s^2.$$

Eine fernere Formel für $u_t^2\; a_t\; a_x^2$ ergiebt sich in folgender Weise:
$$u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_x . \alpha_s^2\; u_s\; \alpha_x + 2\; a_s\; b_s\; b_x\; c_x\; (abc)\; (acu)\; u_s$$
$$= u_s\; c_x^2\; a_s\; b_s\; (abu)\; (abc)$$
$$2\; u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_x . \alpha_s^2\; u_s\; \alpha_x + (abc)\; (abu)\; u_s\; (c_x a_s - a_x c_s)\; (c_x b_s - b_x c_s) - a_x\; b_x\; (abc)\; (abu)\; u_s\; c_s^2$$
$$= u_x . \alpha_s^2\; u_s\; \alpha_x + u_s\; u_{s_1}\; (s\; s_1\; x)^2 - \frac{S}{3}\, a_x\; b_x\; (abu)^2.$$

Um endlich eine dritte Formel für $u_t^2\, a_t\, a_x^2$ zu erlangen, gehe ich von der Gleichung aus:

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = a_x^2\, u_s^2\, a_s - \frac{S}{6}\, u_x^2. \qquad \text{Tafel V.}$$

Nach ihr wird:

$$u_t^2\, a_t\, a_x^2 = u_s\, c_x^2\, a^s\, b_s\, (abu)\,(abc) = (a\alpha u)\, c_x^2\, (a\alpha b)\,(abc)\,(\alpha b u)$$

und

$$\begin{aligned} u_t^2\, a_t\, a_x^2 &= u\;.\, u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + 2\, a_s\, b_s\, u_s\, b_x\, c_x\, (abc)\,(acu) \\ &= u_x . u_s\, \alpha^2\, \alpha_x + 2\,(a\alpha b)\,(a\alpha u)\, b_x\, c_x\, (abc)\,(\alpha c u) \\ &\qquad + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\, u_t^2\, a_t\, a_x^2 &= u_x . u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2 + (a\alpha u)\, c_x\, (abc)\,(b\alpha u) \\ &\qquad \left\{c_x\,(ab\alpha) - b_x\,(ac\alpha) + a_x\,(bc\alpha)\right\} \\ &= u_x . u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2 + c_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)\,(abc)^2\,(b\alpha u) \\ &= u_x . u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2 + \alpha_x\, \beta_x\, (\alpha\beta u)^2. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} u_t\, a_t^2\, a_x &= \tfrac{1}{3}\, a_s\, b_s\, (abc)\,\left\{2\, c_s\,(abu) + u_s\,(abc)\right\}\, c_x \\ &= \tfrac{1}{3}\, a_s\, b_s\, (abc)\, c_x\, \{2\, c_s\,(abu) + c_s\,(abu) + a_s\,(bcu) \\ &\qquad - b_s\,(acu)\} \qquad \text{Id. I.} \\ &= a_s\, b_s\, c_s\, (abc)\, c_x\, (abu) + \frac{2\,S}{9}\,(bbc)\, c_x\, (bcu) \qquad \text{(Tafel IV.)} \\ &= \tfrac{1}{3}\, a_s\, b_s\, c_s\, (abc)\, [c_x\,(abu) + a_x\,(bcu) - b_x\,(acu)] \\ &= \tfrac{1}{3}\, u_x\, .\, a_s\, b_s\, c_s\, (abc)^2 = \tfrac{1}{3}\, u_x\, T. \qquad \text{Id. I.} \end{aligned}$$

Für $u_t\, a_t^2\, a_x$ kann man noch eine andere Formel entwickeln, es ist:

$$\begin{aligned} u_t\, a_t^2\, a_x &= \tfrac{1}{3}\, a_s b_s (abc)\left\{2 u_s (abc) + 2 b_s (acu) - 2\, a_s (bcu) + u_s (abc)\right\} c_x \\ &= a_s\, b_s\, u_s\, c_x\, (abc)^2 + \tfrac{4}{3}\, a_s\, b_s^2\, (abc)\,(acu), \end{aligned}$$

und da das zweite Glied verschwindet:

$$u_t\, a_t^2\, a_x = \alpha_s^2\, \alpha_x\, u_s = \tfrac{1}{3}\, T\, u_x.$$

9. a_t^3.

Tafel XIII.

$$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu).$$

1. $$\begin{aligned} u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, (bcu)\,(cdu)\, d_x^2 &= \tfrac{1}{2}\, u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu) \\ &\qquad \left\{d_x\,(bcu) - c_x\,(bdu)\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\, u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu) \\ &\qquad \left\{u_x\,(bcd) - b_x\,(cdu)\right\}. \qquad \text{Id. I.} \end{aligned}$$

2. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, d_x^2\, (bcd) = 0.$

3. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, c_x\, d_x\, (cdu)\,(bcu) = 0.$

4. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, c_x^2\, d_x\, (bcu) + : d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, d_x\, b_x.$

5. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, d_x + : d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, (bdu)\, d_x.$

6. $u_s\, a_s\, b_s\, (adu)^2\, (bdu)\, c_x^2\, (bcu)_+ \,:\, u_s\, a_s\, b_s\, (adu)^2\, (bdu)\, b_x.$
7. $d_s\, a_s\, b_s\, (adu)^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)_+ \,:\, d_s\, a_s\, b_s\, (adu)^2\, b_x^2.$
8. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, c_x^2\, (bcd)_+ \,:\, d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)^2.$

Tafel XIV.

$u_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu).$

1. $$u_s^2\, a_s\, c_x\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, d_x^2 = \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, a_s\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (cdu) \left\{d_x\, (bcu) - c_x\, (bdu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, a_s\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (cdu) \left\{u_x\, (bcd) - b_x\, (cdu)\right\}. \qquad \text{Id. I.}$$
2. $u_s^2\, a_s\, c_x^2\, d_x^2\, (abu)^2\, (bcd) = 0.$
3. $u_s^2\, a_s\, d_x\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu) = \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (a_s\, d_x - d_s\, a_x)\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu).$
   Diese Form kann leicht auf die Form $u_s^2\, u_p^5\, (spx)$ zurückgeführt werden. Es ist nämlich:
$$u_s^2\, u_p^5\, (psx) = u_s^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu) \left\{\tfrac{1}{3}\, (cdu)\, [ad\, (sx)] + \tfrac{2}{3}\, (adu)\, [cd\, (sx)]\right\}$$
$$= u_s^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu) \left\{\tfrac{1}{3}\, (cdu)\, [ad\, (sx)] + \tfrac{2}{3}\, [(cdu)\, [ad\, (sx)] + [du\, (sx)]\, (cda)\right\} \qquad \text{Id. I.}$$
$$= u_s^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu) \left\{(cdu)\, (a_s\, d_x - d_s a_x) + \tfrac{2}{3}\, (cda)\, (d_s\, u_x - u_s\, d_x)\right\}.$$
4. $d_s\, u_s\, a_s\, c_x\, (cdu)\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)_+ \,:\, u_s\, d_s\, a_s\, d_x^2\, (abu)^2\, b_x.$
5. $d_x\, d_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)_+ \,:\, d_x\, d_s^2\, a_s\, (abu)^2\, b_x.$
7. $d_s\, u_s\, a_s\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)_+ \,:\, d_s\, u_s\, a_s\, d_x^2\, (abu)^2\, b_x.$
8. $d_s^2\, a_s\, c_x\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcu)_+ \,:\, d_s^2\, a_s\, d_x\, (abu)^2\, b_x.$
9. $d_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)\, (abd)\, (bcu)_+ \,:\, d_s^2\, a_s\, (abu)\, (abd)\, b_x.$

Tafel XV.

$u_t^2\, a_t\, a_x^2.$

1. $u_t^2\, a_t\, (abu)\, a_x\, b_x^2.$
2. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x^2.$
3. $u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2.$
4. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x\, b_x\, (abu) = 0.$
5. $b_t^2\, a_t\, a_x^2\, b_{x+} \,:\, b_t^2\, u_t\, b_x.$
7. $u_t\, a_t\, b_t\, (abu)^2.$
   Mit Hülfe der Formel:
$$u_t^2\, b_t\, b_x^2 = \frac{T}{3}\, u_x^2 + \frac{S}{3}\, c_x\, d_x\, (cdu)^2 - \alpha_s\, \alpha_x^2\, u_s^2. \qquad \text{Tafel. XII.}$$
   gelange ich für die Form $u_t\, a_t\, b_t\, (abu)^2$ leicht zu dem Ausdruck:
$$u_t\, a_t\, b_t\, (abu)^2 = \frac{S}{3}\, (acd)\, (cdu)\, (acu)\, (adu) - u_s\, a_s\, \alpha_s\, (a\alpha u)^2,$$
   welcher, da:

$$a_x\,\alpha_x\,(a\alpha u)^2 = a_s\,u_s^2\,a_x^2 + \frac{S}{6}\,u_x^2 \qquad \text{Tafel V.}$$

ist, in folgenden übergeht:

$$u_t\,a_t\,b_t\,(abu)^2 = \frac{S}{3}\cdot u_s^3 - u_s\,a_s^2\,u_{s_1}^2\,a_{s_1} + \frac{S}{6}\,u_s^3,$$

der nach Tafel V. den Factor S besitzt.

8. $b_t^2\,a_t\,a_x\,(abu)_+ \,:\, b_t^2\,u_t\,b_x$.

Tafel XVI.

$$u_s^2\,u_p^5\,(spx).$$

1. $u_s^2\,u_p^5\,a_x^2\,[sp\,(au)] = u_s^2\,u_p^5\,a_x^2\left\{a_s\,u_p - u_s\,a_p\right\}$
2. $u_s\,a_s\,u_p^5\,a_x^2\,(spx)$.

Diese Form lässt sich leicht mit Hülfe der Formel:

$$A\cdots\left\{\begin{aligned} u_s^2\,u_p^5\,(spx) &= 2\,u_s^2\,(abu)^2\,(cdu)^2\,(bcu)\,a_s\,d_x \\ &\quad - \tfrac{2}{3}\,u_s^3\,.\,(abu)^2\,(bcu)\,(cdu)\,d_x \\ &\quad - u_x\,.\,d_s\,u_s^2\,(abu)^2\,(bcu)\,(cdu). \end{aligned}\right. \qquad \text{Tafel XIV.}$$

auf die Form zurückführen:

$$a_s\,u_s^2\,(abu)^2\,(cdu)\,(bcu)\,(cde)\,e_x^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\,u_s^2\,(abu)^2\,a_s\,(bcu)\,(cde)\,d_x\,e_x\left\{e_x\,(cdu) - d_x\,(ceu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,u_s^2\,a_s\,(abu)^2\,(bcu)\,(cde)\,d_x\,e_x\left\{u_x\,(cde) - c_x\,(deu)\right\}.$$

Der erste Theil hat den Factor u_x, der letztere den Werth:

$$-\tfrac{1}{6}\,u_s^2\,a_s\,(abu)^2\,c_x\,d_x\,e_x\,(cde)$$
$$\left\{(bcu)\,(deu) - (bdu)\,(ceu) + (beu)\,(cdu)\right\} = 0. \qquad \text{Id. I.}$$

4. $u_s\,a_s\,u_p^5\left\{a_s\,u_p - u_s\,a_p\right\}$.

Da diese Form von der 8ten Ordnung ist, so darf ich hier die Annahme machen, dass alle Formen niederer Ordnung durch die Formen ϑ darstellbar seien.

Es muss sich also auch die Form $u_p^5\,a_p\,a_x^2$ durch frühere Formen ausdrücken lassen, also ein Aggregat der Form sein:

$$u_p^5\,a_p\,a_x^2 = C_1\,u_s^3\,.\,a_x\,b_x\,(abu)^2 + C_2\,u_x^2\,u_t^3 + C_3\,u_x\,u_s^2\,a_s\,b_x\,(abu)^2,$$

worin die C numerische Constanten bedeuten.

Hieraus folgt leicht die Gleichung:

$$2\,u_p^5\,a_p\,a_x\,a_s\,u_s^2 = 2\,C_1\,u_s^3\,a_x\,b_{s_1}\,u_{s_1}^2\,(abu)^2 + 2\,C_2\,u_x\,.\,u_s^3\,.\,u_t^3$$
$$+ C_3\,u_s^3\,.\,u_s^2\,a_s\,b_x\,(abu)^2 + C_4\,u_x\,.\,u_s^2\,u_s^2\,a_s\,b_s\,(abu)^2.$$

5. $a_s^2\,u_p^5\,a_x\,(spx)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

8. $a_s^2\,u_p^5\left\{a_s\,u_p - u_s\,a_p\right\}$ hat den Factor S.

9. $a_s^2\,a_p\,u_p^4\,(spx)$ hat den Factor S.

Tafel XVII.

$u_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, (abu)$.

1. $u_t^2 a_t a_x b_x (abu)(bcu) c_x^2 = \frac{1}{2} u_t^2\, a_t\, a_x\, b_x\, c_x\, (bcu) \{ c_x\, (abu) - b_x\, (acu) \}$
$= \frac{1}{2}\, u_t^2\, a_t\, a_x\, b_x\, c_x\, (bcu) \{ u_x\, (abc) - a_x\, (bcu) \}$. Id. I.

2. $u_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, c_x^2\, (abc) = 0$.

3. $u_t^2\, a_t\, (acu)\, (bcu)\, b_x\, c_x\, (abu) = 0$.

4. $u_t\, c_t\, a_t\, (acu)\, b_x^2\, (abu)\, c_{x+} \,:\, u_t\, c_t\, a_t\, (acu)\, a_x\, c_x$.

5. $c_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, c_x\, (abu)_+ \,:\, c_t^2\, a_t\, a_x^2\, c_x$.

6. $u_t^2\, a_t\, (acu)\, (bcu)^2\, (abu) = \frac{1}{3}\, u_t^2\, (acu)\, (bcu)\, (abu)$
$\{ a_t\, (bcu) - b_t\, (acu) + c_t\, (abu) \}$
$= \frac{1}{3}\, u_t^3\, .\, u_{t_1}^3$. Id. I.

7. $u_t\, a_t\, c_t\, (acu)\, b_x\, (bcu)\, (abu) = 0$.

8. $c_t^2\, a_t\, (acu)\, b_x^2\, (abu)_+ \,:\, c_t^2\, a_t\, (acu)\, a_x$.

9. $c_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, (abc)_+ \,:\, c_t^2\, a_t\, a_x\, (acu)$.

Tafel XVIII.

$u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x^2$.

1. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)$.

2. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x^2$.

3. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, c_x\, (bcu)^2_+ \,:\, u_t^2\, b_t\, (bcu)^2\, c_x$.

4. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, c_x\, b_x\, (bcu) = 0$.

6. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x\, (acu)\, (bcu)^2_+ \,:\, u_t^2\, b_t\, c_x\, (bcu)^2$.

7. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, (bcu)^2_+ \,:\, b\;\; c_t\, u_t\, (bcu)^2$.

Tafel XIX.

$a_t\, b_x\, u_t^2\, (abu)^2$.

1. $a_t\, u_t^2\, c_x^2\, (bcu)\, (abu)^2$.

2. $a_t\, b_x\, c_x^2\, u_t^2\, (abu)\, (abc) = \frac{1}{2}\, a_t u_t^2 b_x c_x\, (abc) \{ c_x\, (abu) - b_x\, (acu) \}$
$= \frac{1}{2}\, a_t u_t^2 b_x c_x\, (abc) \{ u_x\, (abc) - a_x\, (bcu) \}$. Id. I.

Das erste Glied hat den Factor u_x, das zweite den Werth:
$- \frac{1}{6}\, u_t^2\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)\, \{ a_t\, (bcu) - b_t\, (acu) + c_t\, (abu) \}$
$= - \frac{1}{6}\, u_t^3\, .\, \alpha_x^3$. Id. I.

4. $a_t\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, c_x = \frac{1}{2}\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, [ac\, (tx)]$
$= \frac{1}{2}\, u_t^2\, u_s^2\, (stx)$.

5. $a_t\, c_t^2\, b_x\, c_x\, (abu)^2_+ \,:\, a_t\, c_t^2\, c_x\, a_x^2$.

8. $a_t\, c_t^2\, (bcu)\, (abu)^2_+ \,:\, a_t\, c_t^2\, c_x\, a_x^2$.

9. $a_t\, b_x\, c_t^2\, (abu)\, (abc)_+ \,:\, a_t\, a_x\, c_t^2\, (acu)$.

Tafel XX.

$$a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)\,.$$

1. $a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, (cdu)\; d_x^2\, (bcu)$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu)\, \{d_x (bcu) - c_x (bdu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu)\, \{u_x (bcd) - b_x\, (cdu)\}\,.$$
2. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)\; d_{x+}^2 \;:\; a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x^2\, d_x^2\,.$
3. $a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, (bdu)\; c_x\, d_x\, (cdu)\, (bcu) = 0\,.$
4. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, (bdu)\; d_x\, c_x^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, (bdu)\; d_x\, b_x\,.$
5. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\; d_{x+} \;:\; a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, d_x\, (bdu)\,.$
6. $a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, (bdu)\, (cdu)^2\, (bcu)_+ \;:\; u_t^2\, b_t\, (bdu)\, (cdu)^2\, (bcu)\,.$
7. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, (cdu)^2\, (bcu)_+ \;:\; u_t\, b_t\, d_t\;\; b_x\, (cdu)^2\, (bcu)\,.$
8. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, (cdu)\, (bcd)_+ \;:\; u_t\, b_t\, d_t\;\; b_x\, c_x\, (cdu)\, (bcd)\,.$

Tafel XXI.

$$q_x^6 = a_x^2\, b_x^2\, c_x^2\;\; a_t\, b_t\, c_t\,.$$

1. $a_x^2\, q_x^5\, (aqu)\,.$
3. $a_x^2\, b_x^2\, d_x\, (cdu)^2\;\; a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; a_x^2\, d_x\, (cdu)^2\;\; a_t\, c_t\, u_t\,.$
6. $a_x^2\, b_x\, (bdu)\, (cdu)^2\;\; a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; b_x\, (bdu)\, (cdu)^2\;\; u_t\, b_t\, c_t\,.$

Tafel XXII.

$$a_t\, u_t^2\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)\,.$$

1. $a_t\, u_t^2\, c_x\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, d_x^2$
$$= a_t\, u_t^2\, c_x\, d_x\, (cdu)\, (abu)^2\, \{d_x\, (bcu) - c_x\, (bdu)\}$$
$$= a_t\, u_t^2\, c_x\, d_x\, (cdu)\, (abu)^2\, \{u_x\, (bcd) - b_x\, (cdu)\}\,. \qquad \text{Id. I.}$$
2. $a_t\, u_t^2\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcd)\, d_x^2 = 0\,.$
3. $a_t\, u_t^2\, (cdu)^2\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)\,.$

Diese Form lässt sich (vrgl. Tafel XIV.) leicht auf die Form $u_t^2\, u_p^5\, (tpx)$ zurückführen. Es ist nämlich:

$$u_t^2\, u_p^5\, (tpx) = u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, \{\tfrac{2}{3}\, [cd(tx)]\, (adu) + \tfrac{1}{3}\, (cdu)\, [ad(tx)]\}$$
$$= u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, \{(cdu)\, [ad\, (tx)] + \tfrac{2}{3}\, (cda)\, [du\, (tx)]\}$$
$$= u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)^2\, \{a_t\, d_x - d_t\, a_x\}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\, u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cda)\, \{d_t\, u_x - u_t\, d_x\}\,.$$

Der zweite Theil ist eine ganze Function der ϑ, der erste hat den Werth:

$$2\, a_t\, u_t^2\, (cdu)^2\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)\,.$$

4. $a_t\, u_t\, d_t\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)_+ \;:\; a_t\, u_t\, d_t\;\; d_x^2\, (abu)^2\, b_x\,.$
5. $a_t\, d_t^2\;\; c_x^2\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t^2\;\; d_x\, (abu)^2\, b_x^2\,.$
7. $a_t\, d_t\, u_t\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t\, u_t\;\; d_x^2\, (abu)^2\, b_x\,.$
8. $a_t\, d_t^2\;\; c_x\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t^2\;\; d_x\, (abu)^2\, b_x\,.$
9. $a_t\, d_t^2\;\; c_x^2\, (abu)\, (abd)\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t^2\;\; (abu)\, (abd)\, b_x\,.$

Tafel XXIII.

$u_s^2\, u_t^2\, (s\,t\,x)$.

1. $u_s^2\, u_t^2\, a_x^2\, (a_s\, u_t - u_s\, a_t)$.
2. $u_s^2\, u_t\, a_x^2\, a_t\, (stx)$.
4. $u_s^2\, u_t\, a_t\, a_x\, (a_s\, u_t - u_s\, a_t)$.

Der zweite Theil ist unmittelbar das Produkt von Formen niederer Ordnung; um den ersten Theil zu reduciren, benutze ich die Formel:

$$u_t^2\, a_t\, a_x^2 = \frac{T}{6}\, u_x^2 + \frac{1}{2}\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s_1\, s_2\, x)^2 - \frac{S}{6}\, a_x\, b_x\, (abu)^2\,,$$

aus welcher die Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} u_s^2\, u_t^2\, a_s\, a_t\, a_x &= \frac{T}{6}\, u_s^3 \,.\, u_x + \frac{1}{2}\, u_s^2\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s\, s_1 s_2)\, (s_1 s_2 x) \\ &\quad - \frac{S}{6}\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \qquad \text{(Tafel XII.)} \\ &= \frac{T}{6}\, u_x \,.\, u_s^3 - \frac{S}{6}\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\, u_s u_{s_1} u_{s_2} (s s_1 s_2) \left\{ u_s (s_1 s_2 x) - u_{s_1} (s s_2 x) + u_{s_2} (s s_1 x) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ T u_x \,.\, u_s^3 - S\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 + u_s u_{s_1} u_{s_2} u_x\, (s s_1 s_2)^2 \right\}. \end{aligned}$$

5. $a_s^2\, u_t^2\, (stx)\, a_x$ hat den Factor S. (Tafel IV.)
8. $a_s^2\, u_t^2\, (a_s\, u_t - u_s\, a_t)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)
9. $a_s^2\, u_t\, a_t\, (stx)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Tafel XXIV.

$a_x^2\, q_x^5\, (aqu)$.

1. $a_x\, q_x^5\, (aqu)\, (abu)\, b_x^2 = \frac{1}{2}\, a_x\, b_x\, (abu)\, q_x^5 \left\{ b_x\, (aqu) - a_x\, (bqu) \right\}$
$= \frac{1}{2}\, a_x\, b_x\, (abu)\, q_x^5 \left\{ q_x\, (abu) - u_x\, (abq) \right\}$.
2. $a_x^2\, b_x^2\, (aqb)\, q_x^5 = 0$.
3. $a_x^2\, q_x^3\, b_x\, (bqu)^2\, (aqu)_+ : q_x^4\, b_x\, (bqu)^2$.
4. $b_x\, a_x^2\, q_x^4\, (bqu)\, (aqb)_+ : q_x^4\, b_x\, (bqu)^2$.
6. $a_x^2\, (bqu)^3\, q_x^2\, (aqu)_+ : q_x^3\, (bqu)^3$.
7. $a_x^2\, (bqu)^2\, q_x^3\, (aqb)_+ : q_x^3\, (bqu)^3$.

Tafel XXV.

$u_t^2\, u_p^5\, (tpx)$.

1. $u_t^2\, u_p^5\, (a_t\, u_p - u_t\, a_p)\, a_x^2$.
2. $u_t\, a_t\, u_p^5\, a_x^2\, (tpx)$.

Zur Untersuchung dieser Form bediene ich mich der Formel (Tafel XXII.):

$$\begin{aligned} u_t^2\, u_p^5\, (tpx) &= 2\, a_t\, u_t^2\, d_x\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu) \\ &\quad + \tfrac{2}{3}\, u_t^2\, (abu)^2\, (cda)\, (bcu) \left\{ d_t\, u_x - u_t\, d_x \right\}, \end{aligned}$$

welche zeigt, dass die Form $u_t\, a_t\, u_p^5\, a_x^2\, (tpx)$ sich auf die Form reduciren lässt:

$$a_t u_t^2 (abu)^2 (cdu) (cde) e_x^2 d_x (bcu)$$
$$= \tfrac{1}{2} a_t u_t^2 (abu)^2 (bcu) (cde) d_x e_x \left\{e_x (cdu) - d_x (ceu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} a_t u_t^2 (abu)^2 (bcu) (cde) d_x e_x \left\{u_x (cde) - c_x (deu)\right\}.$$

Das erste Glied dieser Summe hat den Factor u_x, das zweite den Werth:

$$-\tfrac{1}{6} c_x d_x e_x (cde) \,.\, u_t^2 a_t (abu)^2 \left\{(bcu)(deu) - (bdu)(ceu) - (beu)(dcu)\right\}$$
$$= 0. \qquad \text{Id. I.}$$

4. $u_t\, a_t\, a_x\, u_p^5 \left\{a_p\, u_t - u_p\, a_t\right\}$.

Das zweite Glied ist durch Formen niederen Grades ausdrückbar; um das erste zu reduciren, gehe ich von der Form (Tafel XVI.) aus:

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

und folgere daraus die Gleichung:

$$u_p^5\, a_p\, a_x\, a_t\, u_t^2 = C_1\, u_s^3 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_t^3\, u_x\, u_t^3$$
$$+ \tfrac{1}{2} C_3 \left\{u_t^3 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 + u_x \,.\, u_s^2\, a_s\, u_t^2\, b_t\, (abu)^2\right\}.$$

5. $u_p^5\, a_t^2\, a_x\, (ptx)$ hat den Factor T. (Tafel XII.)

8. $u_p^5\, a_t^2\, (a_t\, u_p - u_t\, a_p)$ hat den Factor T. (Tafel XII.)

9. $u_p^4\, a_p\, a_t^2\, (ptx)$ hat den Factor T. (Tafel XII.)

Tafel XXVI.

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, a_x^2\, (stx).$$

1. $u_s^2\, u_t\, a_t\, a_x^2\, b_x^2 \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\}$.
2. $u_s^2\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x^2\, (stx)$.
3. $u_s^2\, u_t\, a_t^2\, b_x\, (abu)^2\, (stx)$.
4. $u_s^2\, a_t\, b_t\, a_x\, b_x\, (abu)\, (stx) = 0$.
5. $b_s^2\, u_t\, a_t\, a_x^2\, b_x\, (stx) + : b_s^2\, u_t^2\, b_x\, (stx)$.
6. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (abu)^2 \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\}$.

Zur Reduction dieser Form bedarf ich einer Hülfsformel, welche ich mir durch folgende, schon oben gemachte Betrachtung ableiten will. Da ich mich hier nämlich mit der Untersuchung der Formen 10^{ter} Ordnung beschäftige, so kann ich die Annahme machen, dass alle Formen niederer Ordnung ganze Functionen der ϑ seien. Diese Annahme, auf die Formen $u_s\, u_t\, (stx)^2$ und $(stx)^3$ angewandt, zeigt, dass zwei Formeln folgender Form existiren müssen:

$$u_s\, u_t\, (stx)^2 = C_1\, S \,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, T \,.\, u_x^2$$
$$(stx)^3 = 0.$$

Hieraus sieht man, dass jede Form, welche zwei Factoren der Form (stx) hat, in die Form $S\varphi + T\psi$ gebracht, also auf niedere Systeme reducirt werden kann.

Die Form:

$$u_s\, u_t\, (abu)^2 \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\} \left\{a_s\, u_t - u_s\, a_t\right\}$$
$$= u_s\, u_t\, (abu)^2 \left\{a_s\, b_s\, u_t^2 + a_t\, b_t\, u_s^2 - 2\, a_s\, b_t\, u_s\, u_t\right\}$$

lässt sich also auf niedere Formen zurückführen und somit auch die hier behandelte Form: $u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2\, a_s\, b_t$.

7. $u_s^2\, b_t\, a_t\, a_x\, (abu) \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\}$.

Das zweite Glied ist ein Product von Formen niederer Ordnung, das erstere entsteht aus: $u_s^2\, b_t\, u_t^2\, b_x\, b_s$ durch eine niedere Combination.

8. $b_s^2\, u_t\, a_t\, a_x\, (abu)\, (stx)_+ \,:\, b_s^2\, u_t^2\, b_x\, (stx)$.

9. $b_s^2\, b_t\, a_t\, a_x^2\, (stx)_+ \,:\, b_s^2\, b_t\, u_t\, (stx)$.

Tafel XXVII.

$$a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx).$$

1. $a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, c_x^2 \left\{c_s\, u_t - u_s\, c_t\right\}$.

2. $a_x^2\, b_x^2\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)\, c_x^2$.

Aus der Gleichung $u_s^2\, c_s\, c_x^2 = (c\alpha u)^2\, c_x\, \alpha_x$ (Tafel IV.) folgt, dass
$a_x^2\, b_x^2\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)\, c_x^2 = a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t \left\{c_x\, \alpha_t - \alpha_x\, c_t\right\}$.

Ferner können wir aus der Annahme, dass alle Formen 8ter Ordnung ganze Functionen der ϑ sind, die Identität folgern:

$$u_t^2\, \alpha_t\, \alpha_x^2 = C_1\, S^2\, u_x^2 + C_2\, T\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_3\, S\, a_s\, u_s^2\, a_x^2,$$

welche zeigt, dass jede Form, die den Factor α_t besitzt, mithin auch unser erstes Glied, in die Form $S\varphi + T\psi$ gebracht, also auf niedere Formen reducirt werden kann. Das zweite Glied unseres Ausdrucks hat den Werth:

$$\alpha_x^2\, q_x^5\, (q\alpha u), \text{ ist also eine Form } \vartheta.$$

3. $a_x^2\, c_x\, (bcu)^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \,:\, c_x\, (bcu)^2\, u_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

4. $a_x^2\, b_x\, (bcu)\, c_x\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \,:\, b_x\, (bcu)\, c_x\, u_s\, c_s\, u_t\, b_t\, (stx)$.

5. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, c_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \,:\, b_x^2\, c_x\, c_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

6. $a_x\, (acu)\, (bcu)^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \,:\, c_x\, (bcu)^2\, u_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

7. $a_x^2\, (bcu)^2\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \,:\, (bcu)^2\, u_s\, c_s\, u_t\, b_t\, (stx)$.

8. $a_x^2\, b_x\, (bcu)\, c_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \,:\, b_x\, (bcu)\, c_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

Tafel XXVIII.

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2.$$

1. $u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \left\{u_s\, c_t - c_s\, u_t\right\} c_x^2$.

2. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (stx)\, b_x\, c_x^2\, (abu)\, (abc)$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, c_x\, (abc)\, (stx) \left\{c_x\, (abu) - b_x\, (acu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, c_x\, (abc)\, (stx) \left\{u_x\, (abc) - a_x\, (bcu)\right\}. \quad \text{Id. I.}$$

Das erste Glied hat den Factor u_x, das zweite den Werth:

$$-\tfrac{1}{6}\, u_s^2\, u_t\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)\, (stx) \left\{a_t\, (bcu) - b_t\, (acu) - c_t\, (bau)\right\}$$
$$= -\tfrac{1}{6}\, u_s^2\, u_t^2\, (stx)\,.\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)^2. \quad \text{Id. I.}$$

3. $u_s^2\, u_t\, a_t\, c_x\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{u_s\, c_t - c_s\, u_t\right\}$

$$= u_s^3\,.\, u_t\, a_t\, c_x\, c_t\, (bcu)\, (abu)^2 - u_s^2\, u_t^2\, a_t\, c_x\, (bcu)\, (abu) \left\{u_s\, (abc) + b_s\, (acu) - a_s\, (bcu)\right\}.$$

Die ersten beiden Glieder haben den Factor u_s^3; ebenso lässt sich das dritte Glied leicht in die Form bringen:

$$-\tfrac{1}{6}\, u_s^2\, u_t^2\, (stx)\,.\,(bcu)\,(abu)\,(acu)\,(bac)\,.$$

Etwas schwieriger ist die Reduction der Form

$$u_s^2\, u_t^2\, a_t\, a_s\, c_x\, (bcu)^2\, (abu)\,;$$

um sie zu bewerkstelligen, gehe ich von der Identität aus (Tafel XII.):

$$2\, u_t^2\, a_t\, a_x^2 = \frac{T}{3}\, u_x^2 + u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s_1\, s_2\, x)^2 - \frac{S}{3}\, a_x\, b_x\, (abu)^2\,,$$

mittelst deren diese Form auf die folgende reducirt wird:

$$u_s^2\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s\, s_1\, s_2)\, c_x\, (bcu)^2\, [s_1\, s_2\, (bu)]$$
$$= \tfrac{1}{3} u_s u_{s_1} u_{s_2} (s s_1 s_2)\,.\,c_x\,(bcu)^2 \left\{u_s\,[s_1 s_2 (bu)] - u_{s_1}[s s_2 (bu)] - u_{s_2}[s_1 s (bu)]\right\}$$
$$= 0\,. \qquad \text{Id. I.}$$

4. $u_t^2\, c_t\, a_t\, b_x\, (abu)^2\, c_x\, \{u_s\, c_t - c_s\, u_t\}$.

Das erste Glied hat den Factor u_s^3, das zweite entsteht aus der Form: $u_s^2\, c_t\, a_t\, a_x^2\, c_x\, c_s\, u_t$ durch eine niedere Combination.

5. $c_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, c_x\, (stx)\, (abu)^2{}_+ \;:\; c_s^2\, u_t\, a_t\, c_x\, (stx)\, a_x^2$.

7. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2\, \{c_s\, u_t - u_s\, c_t\}$.

Das zweite Glied hat den Factor u_s^3, das erste entsteht aus der Form: $u_s^2\, c_t\, a_t\, c_x\, a_x^2\, c_s\, u_t$ durch eine niedere Combination.

8. $c_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (stx)\, (abu)^2{}_+ \;:\; c_s^2\, u_t\, a_t\, c_x\, (stx)\, a_x^2$.

9. $c_s^2\, c_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2{}_+ \;:\; c_s^2\, c_t\, a_t\, (stx)\, a_x^2$.

Tafel XXIX.

$$q_x^5\, \alpha_x^2\, (q\alpha u) = a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x^2\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t\, c_t\,.$$

1. $q_x^4\, \alpha_x^2\, a_x^2\, (q\alpha u)\, (qau)$
$$= \tfrac{1}{2}\, q_x^4\, a_x\, \alpha_x \left\{ \begin{array}{l} u_x^2\, (qa\alpha)^2 + 2\, u_x\, q_x\, (qa\alpha)\, (a\alpha u) - q_x^2\, (a\alpha u)^2 \\ \qquad + a_x^2\, (q\alpha u)^2 + \alpha_x^2\, (qau)^2. \end{array} \right\} \text{Id. II.}$$

2. $q_x^5\, \alpha_x^2\, a_x^2\, (q\alpha a)$.

3. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, d_x\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, d_x\, (c\alpha u)\, b_t\, c_t\, u_t$.

4. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, d_x\, \alpha_x\, (c\alpha d)\, a_t\, b_t\, c_t\, (d\alpha u)_+ \;:\; b_x^2\, c_x\, d_x\, (c\alpha d)\, \alpha_x\, b_t\, c_t\, u_t\, (d\alpha u)$.

6. $a_x^2\, b_x^2\, (cdu)\, (d\alpha u)^2\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; b_x^2\, (cdu)\, (c\alpha u)\, (d\alpha u)^2\, u_t\, b_t\, c_t$.

7. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, (c\alpha d)\, a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, (c\alpha d)\, u_t\, b_t\, c_t$.

Tafel XXX.

$$a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\, \alpha\, q)\,.$$

1. $a_x \alpha_x^2 q_x^5 b_x^2 (a\alpha q)(abu) = \tfrac{1}{2}\, a_x b_x (abu) \alpha_x^2 q_x^5 \{b_x (a\alpha q) - a_x (b\alpha q)\}$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_x b_x (abu)\, \alpha_x^2 q_x^5 \{\alpha_x (abq) - q_x (ab\alpha)\}.\ \text{Id. I.}$$

3. $a_x^2\, (b\alpha u)^2\, b_x\, q_x^5\, (a\alpha q)_+ \;:\; (b\alpha u)^2\, b_x\, q_x^5\, (q\alpha u)$.

6. $a_x^2\, \alpha_x^2\, (qbu)^3\, q_x^2\, (a\alpha q)_+ \;:\; \alpha_x^2\, q_x^2\, (q\alpha u)\, (qbu)^3$.

Tafel XXXI.

$$u_s^2\ u_t^2\ u_p^5\ (stp)\,.$$

2. $u_s^2\ u_t^2\ u_p^4\ a_x^2\ a_p\ (stp)\,.$

Mittelst der Identität (Tafel XVI.)

$$u_p^5\ a_p\ a_x^2 = C_1\ u_s^3\ .\ a_x\ b_x\ (abu)^2 + C_2\ u_x^2\ u_t^3 + C_3\ u_x\ u_s^2\ a_s\ b_x\ (abu)^2$$

erhalten wir die Gleichung:

$$5\ u_s^2\ u_t^2\ u_p^4\ a_x^2\ a_p\ (stp) =$$

$$= 3\ C_1\ .\ u_s^2 u_t^2 u_{s_1}^2 (ss_1t)\ .\ a_x b_x (abu)^2 + 2\ C_1\ u_{s_1}^3\ .\ u_s^2 u_t^2\ a_x b_x\ (abu)\ [ab\,(st)]$$
$$+ C_2 \{2\, u_{t_1}^3 . u_x u_s^2 u_t^2 (stx) + 3\, u_x^2 u_{t_1}^2\, u_s^2 u_t^2\, (st t_1)\} + C_3 \{u_s^2 a_s b_x (abu)^2 . u_s^2 u_t^2 (stx)\}$$
$$+ 2\, u_x \{u_s^2\, u_t^2\, u_{s_1}^2\, a_{s_1} b_x (abu)\ [a b\,(st)] + u_s^2\, u_t^2\, u_{s_1} a_{s_1} b_x (abu)^2 (st s_1)\}\,.$$

5. $a_s^2\ a_x\ u_t^2\ u_p^5\ (spt)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)
9. $a_s^2\ a_t\ u_t\ u_p^5\ (spt)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Es ist somit der Nachweis geführt, dass alle Formen, welche zu den Formen ϑ eigentlich gehören, ganze Functionen derselben sind; hierbei hat es sich herausgestellt, dass es für jede Form ϑ Modularsysteme giebt, deren entsprechende Combinationen auf ϑ nicht anwendbar sind.

Combinationen, welche diesen Modularsystemen entsprechen, wende ich auf die Produkte $H = \vartheta\, u_\sigma^\lambda\, \varrho_x^\mu$ an und lasse von den so entstehenden Formen alle auf frühere Formen reducirbare weg; die Modularsysteme, deren entsprechende Combinationen die dann übrig bleibenden Formen erzeugen, sind die zu ϑ gehörigen Systeme. Um dieselben zu erhalten, werde ich, analog den früheren Tafeln, Supplementartafeln bilden und in jeder derselben die Modularsysteme verwenden, die sich bei der Tafel für die ϑ selbst nicht vorfinden. Selbstverständlich lasse ich hierbei diejenigen 4 Formen weg, auf die sich für alle Modularsysteme Combinationen anwenden liessen, so dass es nur 27 Supplementartafeln giebt.

Supplementartafel I.

$$a_x^3\ u_\sigma^\nu\ \varrho_x^\mu\,.$$

2. $a_x^3\ .\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\ b_\sigma\ b_x^2\,.$
4. $a_x^2\ (abu)\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\ b_\sigma\ b_{x+}\ :\ b_x^2\ b_\sigma\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\,.$
5. $a_x^3\ .\ u_\sigma^{\nu-2}\ \varrho_x^\mu\ b_\sigma^2\ b_x\,.$
7. $a_x\ (abu)^2\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\ b_{\sigma+}\ :\ b_x^2\ b_\sigma\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\,.$
8. $a_x^2\ (abu)\ u_\sigma^{\nu-2}\ \varrho_x^\mu\ b_{\sigma+}^2\ :\ b_x\ b_\sigma^2\ u_\sigma^{\nu-2}\ \varrho_x^\mu\,.$
9. $a_x^3\ .\ u_\sigma^{\nu-3}\ b_\sigma^3\ \varrho_x^\mu\,.$

Zu f gehört mithin kein Modularsystem.

Supplementartafel II.

$$a_x\, b_x\, (abu)^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^\mu$$

6. $(acu)\,(bcu)\,(abu)^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho cu)$
$= \frac{1}{3}\, u_\sigma^\nu \varrho_x^{\mu-1} (abu)(bcu)(acu)\left\{(abu)(\varrho cu) - (cbu)(\varrho au) - (acu)(\varrho bu)\right\}$
$= 0\,.$ Id. I.

9. $a_x\, b_x\, (abc)^2\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, c_{\sigma+} \,:\, b_x\, (bcu)^2\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, c_\sigma\,.$

Zu $a_x\, b_x\, (abu)^2$ gehört kein Modularsystem.

Supplementartatel III.

$$u_s^3\,.\,u_\sigma^\nu\,\varrho_x^\mu\,.$$

1. $u_s^3\,.\,a_x^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho au)\,.$
4. $u_s^2\, a_s\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho au)\, a_x$
6. $u_s^3\,.\,u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-3}\,(\varrho au)^3\,.$
7. $u_s^2\, a_s\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-2}\,(\varrho au)^2\,.$

Mittelst der Formel (Tafel V.):

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = u_s^2\, a_s\, a_x^2 - \frac{S}{6}\, u_x^2$$

lässt sich diese Form auf die Form $(a\alpha u)^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-2}\,(a\varrho u)\,(\alpha\varrho u)$ zurückführen, welche aus der Form $\alpha_x^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho\alpha u)$ durch eine niedere Combination entsteht.

8. $u_s\, \alpha_s^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho au)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Zu der Form u_s^3 gehört das vierte Modularsystem.

Supplementartafel IV.

$$\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu = a_x\, b_x\, c_x\, (abc)^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

2. $\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, a_\sigma\, a_x^2\,.$
4. $\alpha_x^2\,(a\alpha u)\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, a_\sigma\, a_x\,.$
5. $\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, a_\sigma^2\, a_x\,.$
7. $a_x\,(bdu)\,(cdu)\,(abc)^2\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_{\nu+} \,:\, (bdu)\,(cdu)\,(bcu)^2\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\nu\,.$
8. $a_x\, b_x\,(cdu)\,(abc)^2\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, d_{\nu+}^2 \,:\, b_x\,(cdu)\,(bcu)^2\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, d_\nu^2\,.$
9. $\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-3}\, a_\sigma^3\,.$

Zu der Form α_x^3 gehört das vierte Modularsystem.

Supplementartafel V.

$$a_x^2\, \alpha_x^2\,(a\alpha u)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

5. $a_x^2\, \alpha_x^2\,(a\alpha b)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\, b_{x+} \,:\, \alpha_x^2\,(b\alpha u)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\, b_x\,.$
8. $a_x^2\, \alpha_x\,(b\alpha u)\,(a\alpha b)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_{\sigma+} \,:\, \alpha_x\,(b\alpha u)^2\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\,.$
9. $a_x^2\, \alpha_x^2\,(a\alpha b)\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, b_{\sigma+}^2 \,:\, \alpha_x^2\,(b\alpha u)\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, b_\sigma^2\,.$

Zu der Form $a_x^2\, \alpha_x^2\,(a\alpha u)$ gehört kein System.

Supplementartafel VI.

$$u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

6. $u_s^2\, a_s\, (abu)^2\, (\varrho b u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu .$

9. $b_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_{\sigma\,+} \,:\, b_s^2\, u_s\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma .$

Zu der Form $u_s^2\, a_s\, a_x^2$ gehört das sechste System.

Supplementartafel VII.

$$u_p^6 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

1. $u_p^6 \,.\, (\varrho a u)\, a_x^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu .$

4. $u_p^5\, a_p\, a_x\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho a u)\, u_\sigma^\nu .$

Aus der Formel (Tafel XVI.):

A. $$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2 \,.\, u_t^3 + C_3\, u_x\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

folgt die Gleichung:

$$u_p^5\, a_p\, a_x\, (a\varrho u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \equiv C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, (b\varrho u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + \tfrac{1}{2}\, C_3\, u_x \,.\, u_s^2\, a_s\, (b\varrho u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \dots .$$

6. $u_p^6 \,.\, \varrho_x^{\mu-3}\, u_\sigma^\nu .$

7. $u_p^5 a_p \,.\, \varrho_x^{\mu-2} u_\sigma^\nu (\varrho a u)^2 \equiv \varrho_x^{\mu-2} u_\sigma^\nu C_1 u_s^3 . (a\varrho u)(b\varrho u)(abu)^2 \dots$ (Gleichung *A.*)

8. $u_p^4\, a_p^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, (\varrho a u) .$

Zur Untersuchung dieser Form, deren Ordnung grösser als 5 ist, machen wir die nämliche Annahme, wie früher, dass nämlich alle Formen bis zur 5ten Ordnung ganze Functionen der ϑ seien; nach derselben muss $u_p^4\, a_p^2\, a_x$ in der Form enthalten sein:

$$u_p^4\, a_p^2\, a_x = C_1\, u_x\, u_t^3 + C_2\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

und somit die Relation stattfinden:

$$u_p^4\, a_p^2\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \equiv C_2\, u_s^2\, a_s\, (b\varrho u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \dots ,$$

welche letztere Form aus $u_s^2 a_s \varrho_x^\mu a_x^2 u_\sigma^\nu$ durch eine niedere Combination entsteht.

Supplementartafel VIII.

$$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

5. $a_s\, b_s\, c_s\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \varrho_x^\mu\, c_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}{}_+ \,:\, u_s\, b_s\, c_s\, b_x^2\, c_x\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma .$

8. $a_s\, b_s\, c_s\, a_x^2\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_{\sigma\,+} \,:\, u_s\, b_s\, c_s\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma .$

9. $c_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_{\sigma\,+}^2 \,:\, u_s\, b_s\, c_s\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_\sigma^2 .$

Zu der Form $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2$ gehört kein Modularsystem.

Supplementartafel IX.

$$u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

3. $u_s^2\, a_s\, (bcu)\, (abu)^2\, c_x\, (\varrho cu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \,.$
6. $u_s^2\, a_s\, (bcu)\, (abu)^2\, (\varrho cu)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu \,.$
7. $u_\sigma^2\, a_s\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, (\varrho cu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, \{a_s\, (\varrho cu) - c_s\, (\varrho au)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, \{\varrho_s\, (acu) - u_s\, (ac\varrho)\} \quad \text{Id. I.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, \varrho_s \,.\, u_{s_1}^3 - \tfrac{1}{2}\, u_s^3 \,.\, u_{s_1}^2\, \varrho_{s_1}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu = 0 \,.$$

Zu der Form $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$ gehören das dritte und das sechste System.

Supplementartafel X.

$$u_t^3 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

1. $u_t^3 \,.\, (\varrho au)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, a_x^2 \,.$
3. $u_t^3 \,.\, (\varrho au)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, a_x \,.$
4. $a_t\, u_t^2 \,.\, (\varrho au)\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, a_x \,.$
6. $u_t^3 \,.\, (\varrho au)^3\, \varrho_x^{\mu-3}\, u_\sigma^\nu \,.$
7. $a_t\, u_t^2 \,.\, (\varrho au)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu \,.$
8. $a_t^2\, u_t\, (\varrho au)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$ hat den Factor T. (Tafel XII, Form 8.)

Zu der Form u_t^3 gehören das vierte und das siebente Modularsystem.

Supplementartafel XI.

$$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu) \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

9. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_{\sigma+}^1 : d_s\, u_s\, b_s\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma^1 \,.$

Zu der Form $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XII.

$$u_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

9. $u_s^2\, a_s\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-1} \cdot (\varrho du)\, u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, \{a_s\, (\varrho du) + d_s\, (a\varrho u)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, \{\varrho_s\, (adu) - u_s\, (ad\varrho)\} \,.$$

Zu der Form $u_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XIII.

$$u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

6. $u_t^2\, a_t\, (abu)^2\, (\varrho bu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \,.$
9. $b_t^2\, a_t\, a_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_{\sigma+} : b_t^2\, u_t\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma \,.$

Zu der Form $u_t^2\, a_t\, a_x^2$ gehört das sechste System.

Supplementartafel XIV.

$$u_s^2\, u_p^5\, (spx) \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

3. $u_s^2\, u_p^5 \left\{a_s\, u_p - u_s\, a_p\right\} a_x\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \,.$
6. $u_s^2\, u_p^5 \left\{a_s\, u_p - u_s\, a_p\right\} (\varrho a u)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu \,.$
7. $u_s^2\, u_p^4\, a_p \left\{a_s\, u_p - u_s\, a_p\right\} (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \,.$

Der zweite Theil hat den Factor u_s^3, der erste Theil nimmt mittelst der Formel (Tafel XVI.)

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

die Form an:

$$C_1\, u_{s_1}^3 \,.\, u_s^2\, a_s\, (\varrho b u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + \tfrac{1}{2}\, C_3\, u_s^3 \,.\, u_{s_1}^2\, a_{s_1}\, (\varrho b u)(abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \ldots .$$

Zu der Form $u_s^2\, u_p^5\, (spx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XV.

$$a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

5. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\, c_{x+} : u_t\, b_t\, c_t\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\, c_x \,.$
8. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_{\sigma+} : u_t\, b_t\, c_t\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma \,.$
9. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_{\sigma+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_\sigma^2 \,.$

Zu der Form $a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x^2$ gehört kein System.

Supplementartafel XVI.

$$a_t\, u_t^2\, b_x\, (abu)^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

3. $a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, c_x\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho c u)\, u_\sigma^\nu \,.$
6. $a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-2}\, (\varrho c u)^2\, u_\sigma^\nu \,.$
7. $a_t\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, (\varrho c u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{a_t\, (\varrho c u) - c_t\, (\varrho a u)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{\varrho_t\, (acu) - u_t\, (ac\varrho)\right\} .$$

Zu der Form $a_t\, u_t^2\, b_x\, (abu)^2$ gehören das dritte und das sechste System.

Supplementartafel XVII.

$$a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu) \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

9. $a_t\, b_t\, d_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x^2\, (bcd) \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_{\sigma+} : u_t\, b_t\, d_t\, b_x^2\, c_x^2\, (bcd)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\, d_\sigma \,.$

Zu der Form $a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XVIII.

$$\varrho_x^\mu u_\sigma^\nu \cdot q_x^6 = a_x^2 b_x^2 c_x^2 a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

2. $q_x^6 \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} c_\sigma c_x^2 .$
4. $a_x^2 b_x^2 c_x (cdu) a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma d_{x+} : b_x^2 c_x (cdu) u_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma d_x .$
5. $q_x^6 \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} a_\sigma^2 a_x .$
7. $a_x^2 b_x^2 c_x (cdu) a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} d_{\sigma+}^2 : b_x^2 c_x (cdu) u_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} d_\sigma^2 .$
8. $a_x^2 b_x^2 (cdu)^2 a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_{\sigma+} : b_x^2 (cdu)^2 u_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma .$
9. $q_x^6 \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-3} a_\sigma^3 .$

Zu der Form q_x^6 gehört kein Modularsystem.

Supplementartafel XIX.

$$a_t u_t^2 c_x^2 (abu)^2 (bcu) \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

6. $a_t u_t^2 (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) (\varrho du) \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2} u_t^2 (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \left\{a_t (\varrho du) - d_t (\varrho au)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} u_t^2 (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \left\{\varrho_t (adu) - u_t (ad\varrho)\right\} .$$

Zu der Form $a_t u_t^2 c_x^2 (abu)^2 (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XX.

$$u_s^2 u_t^2 (stx) \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

3. $u_s^2 u_t^2 \left\{a_s u_t - u_s a_t\right\} a_x \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu (\varrho au) .$
6. $u_s^2 u_t^2 \left\{a_s u_t - u_s a_t\right\} \varrho_x^{\mu-2} u_\sigma^\nu (\varrho au)^2 .$
7. $a_s u_s u_t^2 \left\{a_s u_t - u_s a_t\right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu (\varrho au) .$

Der erste Theil hat den Factor u_t^3, der zweite geht durch die Formel (Tafel XII.):

$$a_t u_t^2 a_x^2 = \frac{T}{6} u_x^2 + \tfrac{1}{2} u_{s_1} u_{s_2} (s_1 s_2 x)^2 - \frac{S}{6} a_x b_x (abu)^2$$

in den Ausdruck über:

$$\tfrac{1}{2} u_s^2 u_{s_1} u_{s_2} (s_1 s_2 s) \left\{\varrho_{s_1} u_{s_2} - u_{s_1} \varrho_{s_2}\right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu - \frac{S}{6} u_s^2 a_s (b\varrho u) (abu)^2 \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \ldots .$$

Der zweite Theil hat den Factor S, der erste und zweite verschwindet.

Zu der Form $u_s^2 u_t^2 (stx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXI.

$$a_x^2 q_x^5 (aqu) \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

5. $a_x^2 q_x^5 (aqb) b_x \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_{\sigma+} : q_x^5 (bqu) b_x \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_\sigma .$
8. $a_x^2 q_x^4 (qbu) (aqb) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_{\sigma+} : q_x^4 (qbu)^2 \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_\sigma .$
9. $a_x^2 q_x^5 (qab) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} b_{\sigma+}^2 : q_x^5 (qbu) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} b_\sigma^2 .$

Zu der Form $a_x^2 q_x^5 (aqu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXII.

$$u_p^5\, u_t^2\, (ptx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

3. $u_p^5\, u_t^2\, a_x \left\{ a_p\, u_t - u_p\, a_t \right\} \varrho_x^{\mu-1} (\varrho a u)\, u_\sigma^\nu .$
6. $u_p^5\, u_t^2 \left\{ a_p\, u_t - u_p\, a_t \right\} \varrho_x^{\mu-2} (\varrho a u)^2\, u_\sigma^\nu .$
7. $u_p^4\, a_p\, u_t^2 \left\{ a_p\, u_t - u_p\, a_t \right\} \varrho_x^{\mu-1} (\varrho a u)\, u_\sigma^\nu .$

Der erste Theil hat den Factor u_t^3, der zweite geht durch die Formel (Tafel XVI.):

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x\, a_x\, b_s\, u_s^2\, (abu)^2$$

in folgenden Ausdruck über:

$$C_1\, u_s^3\, a_t\, u_t^2\, (\varrho b u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + \tfrac{1}{2}\, C_3\, u_t^3 \,.\, (\varrho a u)\, b_s\, u_s^2\, (abu)^2 \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \ldots$$

Zu der Form $u_p^5\, u_t^2\, (ptx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXIII.

$$a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

9. $a_x^2\, b_x^2\, c_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_{\sigma+} : b_x^2\, c_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma .$

Zu der Form $a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXIV.

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

6. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{ c_s\, u_t - u_s\, c_t \right\} (\varrho c u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu .$

Da wir hier die eine Form höherer Ordnung untersuchen, so ist die Annahme gestattet, dass die Form 5ter Ordnung

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{ c_s\, u_t - u_s\, c_t \right\} c_x$$

eine ganze Function der ϑ sei. Demgemäss muss sie sich in folgende Gestalt bringen lassen:

$$u_s^2 u_t a_t (bcu) (abu)^2 \left\{ c_s u_t - u_s c_t \right\} c_x = C_1\, S u_s^2 u_p^5 (spx) + C_2\, u_{s_1}^3 \,.\, u_s^2 u_t^2 (stx)$$

und wir erhalten die Formel:

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{ c_s\, u_t - u_s\, c_t \right\} (\varrho c u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu =$$
$$C_1 S u_s^2 \,.\, u_p^5 \left\{ u_s \varrho_p - \varrho_s u_p \right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu + C_2 u_{s_2}^3\; u_s^2 u_t^2 \left\{ u_s \varrho_t - \varrho_s u_t \right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu .$$

Zu der Form $u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2$ gehört kein System.

Supplementartafel XXV.

$$a_x^2\, q_x^5\, (aqu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu = a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x^2\, (c\alpha u)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

5. $a_t\, b_t\, c_t\, d_x a_x^2 b_x^2 c_x\, (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma\, \alpha_{x+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, d_x\, b_x^2\, c_x\, (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma \alpha_x^2 .$
8. $a_t b_t c_t a_x^2 b_x^2 (cdu) (c\alpha d) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma \alpha_{x+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, (cdu)\, b_x^2\, (c\alpha d)\, \alpha_x^2 \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma .$
9. $a_t b_t c_t a_x^2 b_x^2 c_x \alpha_x^2 (c\alpha d) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2}\, d_{\sigma+}^2 : u_t b_t c_t\, a_x^2 b_x^2 c_x \alpha_x^2 (c\alpha d) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2}\, d_\sigma^2 .$

Zu der Form $\alpha_x^2\, q_x^5\, (\alpha q u)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXVI.

$$a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q)\, .\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^\mu\, .$$

2. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q)\, .\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, b_\sigma\, b_x^2\, .$
4. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^4\, (bqu)\, (a\alpha q)\, b_x\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu + \, : \, \alpha_x^2\, q_x^4\, (bqu)\, (\alpha qu)\, b_x\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, .$
5. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q)\, .\, b_x\, b_\sigma^2\, u_\sigma^{\nu-2}\, \varrho_x^\mu\, .$
7. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^3\, (a\alpha q)\, (bqu)^2\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu + \, : \, \alpha_x^2\, q_x^3\, (q\alpha u)\, (bqu)^2\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, .$
8. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^4\, (a\alpha q)\, (bqu)\, b_\sigma^2\, u_\sigma^{\nu-2}\, \varrho_x^\mu + \, : \, \alpha_x^2\, q_x^4\, (q\alpha u)\, (bqu)\, b_\sigma^2\, u_\sigma^{\nu-2}\, \varrho_x^\mu\, .$
9. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q)\, .\, u_\sigma^{\nu-3}\, \varrho_x^\mu\, b_\sigma^3\, .$

Zu der Form $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXVII.

$$u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\, .$$

1. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)\, .\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, a_x^2\, .$
3. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)\, .\, (\varrho a u)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, a_x\, .$
4. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^4\, a_p\, (stp)\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, a_x\, .$

Diese Form geht durch die Formel (Tafel XVI.):

$$u_p^5\, a_p\, .\, a_x^2 = C_1\, u_s^3\, .\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, .\, u_t^3 + C_3\, u_x\, .\, u_s^2\, a_x\, b_s\, (abu)^2$$

in die folgende über:

$$\frac{2\,C}{5} \left\{ u_s^2\, u_t^2\, (a\varrho u)\, b_x\, (abu)\, \left\{ a_s\, b_t - b_s\, a_t \right\} \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \right\} u_s^3$$
$$+ C_2\, u_s^2\, u_t^2\, \left\{ \varrho_s\, u_t - u_s\, \varrho_t \right\} \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, .\, u_x\, .\, u_t^3$$
$$+ \frac{C_3}{10} \left\{ \begin{aligned} & u_s^2\, u_t^2\, (stx)\, .\, u_s^2\, a_s\, (abu)^2\, (\varrho b u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \\ & \quad + u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2\, .\, u_s^2\, u_t^2\, \left\{ \varrho_s\, u_t - u_s\, \varrho_t \right\} \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \\ & \quad + 2\, u_x\, .\, u_s^2\, u_t^2\, u_{s_1}\, (sts_1)\, (\varrho a u)\, b_{s_1}\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \\ & \quad + 2\, u_x\, .\, u_s^2 u_t^2 u_{s_1}^2\, (\varrho a u) b_{s_1}\, (abu)\, \left\{ a_s b_t - b_s a_t \right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu\, . \end{aligned} \right.$$

6. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)\, .\, (\varrho a u)^3\, \varrho_x^{\mu-3}\, u_\sigma^\nu\, .$
7. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^4\, a_p\, (stp)\, .\, (\varrho a u)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, .$

Durch die eben benutzte Formel (A) geht diese Form in die folgende über:

$$\frac{2\,C_1}{5}\, u_s^3\, .\, u_s^2\, u_t^2\, (a\varrho u)\, (b\varrho u)\, (abu)\, (a_s\, b_t - b_s\, a_t)\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu$$
$$+ \frac{C_3}{10} \left\{ u_{s_1}^2\, a_{s_1}\, (abu)^2\, (b\varrho u)\, .\, u_s^2\, u_t^2\, \left\{ \varrho_s\, u_t - u_s\, \varrho_t \right\} \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu \right\} \ldots$$

8. $a_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)\, .\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Zu der Form $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)$ gehört kein System.

Die in den Supplementartafeln gefundenen Resultate lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Das dritte Modularsystem gehört zu den Formen:
$u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$ und $a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, b_x$,
2. das vierte zu den Formen:
u_s^3, u_t^3, α_x^3,
3. das sechste zu den Formen:
$u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$, $u_s^2\, a_s\, a_x^2$, $u_t^2\, u_t\, a_x^2$, $a_t\, u_t^2\, b_x\, (abu)^2$,
4. das siebente zu der Form:
u_t^3.

Man muss nun aus denjenigen Formen ϑ, zu denen ein Modularsystem gehört, solche Produkte σ bilden, dass es

1) Combinationen giebt, welche auf σ anwendbar sind und dem System entsprechen;
2) keine dem System entsprechende Combinationen giebt, welche auf einen Factor (resp. das Produkt mehrerer Factoren) von σ angewandt werden können.

Diese Produkte sind die zu dem Modularsystem gehörenden Produkte der Formen ϑ.

Dem dritten Modularsystem entsprechen die Produkte:

1. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x'(abu)^2$,
2. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
3. $u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$;

dem vierten die Produkte:

1. $u_s^3 \,.\, \alpha_x^3$,
2. $u_t^3 \,.\, \alpha_x^3$;

dem sechsten die Produkte:

1. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
2. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
3. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
4. $u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
5. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
6. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
7. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, a_x^2$,
8. $u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
9. $u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
10. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, a_x^2$,
11. $u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, a_x^2$.

Der letzte Theil der Untersuchung besteht darin, dass ich zeigen will, dass man für jedes Modularsystem entsprechende Combinationen auf die zu ihm gehörigen Produkte der Art anwenden kann, dass die so entstehenden Formen ganze Functionen der ϑ sind.

Bezeichne ich die Formen $a_s\, b_x\, u_s^2\, (abu)^2$ und $a_t\, b_x\, u_t^2\, (abu)^2$ kurz durch l_x und m_x, so muss also noch nachgewiesen werden, dass sich die folgenden Formen durch die ϑ ausdrücken oder sich auf frühere Formen zurückführen lassen.

1. $a_x\,(alu)^2$,	9. $(amu)^3$,
2. $a_x\,(alu)\,(amu)$,	10. $u_s^2\,a_s\,(abu)^2\,(alu)$,
3. $a_x\,(amu)^2$,	11. $u_s^2\,a_s\,(abu)^2\,(amu)$,
4. $a_x\,a_s\,u_s^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u)$,	12. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_{s_1}^2\,b_{s_1}\,(bcu)\,b_x$,
5. $a_x\,a_t\,u_t^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u)$,	13. $u_t^2\,a_t\,(abu)^2\,(alu)$,
6. $(alu)^3$,	14. $u_t^2\,u_t\,(abu)^2\,(amu)$,
7. $(alu)^2\,(amu)$,	15. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_t^2\,b_t\,(bcu)\,b_x$,
8. $(alu)\,(amu)^2$,	16. $u_t^2\,a_t\,(acu)^2\,u_{t_1}^2\,b_{t_1}\,(bcu)\,b_x$.

Ich beginne mit der Reduction der Form $a_x\,\alpha_x^2\,a_s\,u_s^2\,(a\alpha u)$, welche aus dem Produkt $\alpha_x^3\,u_s^3$ durch eine dem vierten Modularsystem entsprechende Combination entsteht; um sie zu bewerkstelligen, benutze ich die Identität (Tafel V.):

$$a_x\,\alpha_x\,(a\alpha u)^2 = u_s^2\,a_s\,\alpha_x^2 - \frac{S}{6}\,u_x^2,$$

aus der man die Formel ableiten kann:

$$a_x\alpha_x\,(a\alpha\,(sx))\,(a\alpha u)\,u_s^2 = u_{s_1}\,(s_1\,s\,x)\,\alpha_x^2\,u_s^2\,a_{s_1} - \frac{S}{6}\,u_s^2\,u_x\,(s\,x\,x),$$

$$a_x\,\alpha_x^2\,a_s\,(a\alpha u)\,u_s^2 = \alpha_x^2\,a_x\,\alpha_s\,(a\alpha u)\,u_s^2 + u_{s_1}\,u_s^2\,\alpha_x^2\,a_{s_1}\,(s_1\,sx).$$

Die beiden Formen der rechten Seite gehen durch niedere Combinationen aus den Formen $\alpha_x^2\,\alpha_s\,u_s^2$ und $u_s^2\,u_{s_1}^2\,(s s_1\,x)$ hervor.

In gleicher Weise kann man die Identität bilden:

$$a_x\,\alpha_x^2\,a_t\,(a\alpha u)\,u_t^2 = \alpha_x^2\,a_x\,\alpha_t\,(a\alpha u)\,u_t^2 + u_t\,u_s^2\,\alpha_x^2\,a_t\,(tsx),$$

welche lehrt, dass sich die Form $a_x\,\alpha_x^2\,a_t\,(a\alpha u)\,u_t^2$ auf zwei Formen reduciren lässt, die mittelst niederer Combinationen aus den Formen $\alpha_x^2\,\alpha_t\,u_t^2$ und $u_s^2\,u_t^2\,(stx)$ entstehen.

Die Formen:

12. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_{s_1}^2\,b_{s_1}\,(bcu)\,b_x$,
15. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_t^2\,b_t\,(bcu)\,b_x$,
16. $u_t^2\,a_t\,(acu)^2\,u_{t_1}^2\,b_{t_1}\,(bcu)\,b_x$,

welche hier aus den Produkten der Formen $u_s^2\,a_s\,a_x^2$ und $u_t^2\,a_t\,a_x^2$ durch Combinationen entstanden sind, die dem sechsten Modularsystem entsprechen, entstehen zugleich aus den Formen:

$$u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,c_x\,.\,u_s^3,$$
$$u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,c_x\,.\,u_t^3,$$
$$u_t^2\,a_t\,(acu)^2\,c_x\,.\,u_t^3$$

durch niedere Combinationen.

Die übrigen 11 Formen, welche noch durch die Formen ϑ ausgedrückt werden sollen, lassen sich aus den beiden Ausdrücken:

$$a_y\,(alu)\,(a\varrho u) \quad \text{und} \quad a_y\,(amu)\,(a\varrho u)$$

dadurch ableiten, dass man in denselben die Symbole y und ϱ passend ersetzt und dann mit passenden Symbolen multiplicirt. Anstatt sie einzeln umzuformen, will ich daher diese beiden Ausdrücke transformiren, da dadurch alle 11 Formen zu gleicher Zeit auf einfachere Formen zurückgeführt werden.

Die Form $a_y\,(alu)\,(a\varrho u)$ geht, wenn man für l seinen Werth setzt, in die folgende über:

$$\begin{aligned} & c_y\, a_s\,(bcu)\,u_s^2\,(abu)^2\,(c\varrho u) \\ = {} & c_y\,(bcu)\,u_s^2\,(abu)^2 \left\{c_s\,(a\varrho u) - \varrho_s\,(acu) + u_s(ac\varrho)\right\} \qquad \text{Id. I.} \\ = {} & c_y\, c_s\,(bcu)\,u_s^2\,(abu)^2\,(a\varrho u) - u_s^2\,\varrho_s\,.\,c_y\,(bcu)\,(abu)^2\,(acu) \\ & + u_s^3\,.\,c_y\,(bcu)\,(abu)^2\,(ac\varrho)\,. \end{aligned}$$

Da nun:

$$\begin{aligned} c_y\,.\,(abu)^2(acu)(bcu) &= \tfrac{1}{3}\,(abu)(acu)(bcu)\left\{c_y(abu) - b_y(acu) + a_y(bcu)\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}\,u_y\,u_s^3 \qquad \text{Id. I.} \end{aligned}$$

ist, so gilt die Identität:

$$1.\quad a_y\,(alu)\,(a\varrho u) = c_y\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(a\varrho u) - u_s^3\left\{\tfrac{1}{3}\,u_y\,.\,u_s^2\,.\,\varrho_s + c_y\,(abu)^2\,(bcu)\,(ac\varrho)\right\}.$$

In ähnlicher Weise gelangen wir für die Form $a_y\,(amu)\,(a\varrho u)$ zu der Formel:

$$2.\quad a_y\,(amu)\,(a\varrho u) = c_y\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(a\varrho u) - \tfrac{1}{3}\,u_s^3\,u_y\,.\,u_t^2\,\varrho_t - u_t^3\,c_y\,(abu)\,(bcu)\,(ac\varrho)\,.$$

Da hier in diesen Ausdrücken das zweite und das dritte Glied der rechten Seite die Factoren u_s^3 oder u_t^3 besitzen, so lassen sich die Formen $a_y\,(alu)\,(a\varrho u)$ und $a_y\,(amu)\,(a\varrho u)$ auf das je erste Glied ihrer Ausdrücke zurückführen.

Hierdurch kann man die 11 Formen:

$a_x\,(alu)^2$,	$u_t^2\,d_t\,(dcu)^2\,(clu)$,
$a_x\,(alu)\,(amu)$,	$a_x\,(amu)^2$,
$(alu)^3$,	$(amu)^3$,
$(alu)^2\,(amu)$,	$u_s^2\,d_s\,(dcu)^2\,(cmu)$,
$(alu)\,(amu)^2$,	$u_t^2\,d_t\,(dcu)^2\,(cmu)$
$u_s^2\,d_s\,(dcu)^2\,(clu)$,	

auf die folgenden 11 Formen zurückführen:

1. $c_x\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(alu)$,
2. $c_x\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
3. $(clu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(alu)$,
4. $(cmu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(alu)$,
5. $(cmu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
6. $u_{s_1}^2\,d_{s_1}\,(cdu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,
7. $u_t^2\,d_t\,(cdu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,
8. $c_x\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
9. $(cmu)\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
10. $u_s^2\,d_s\,(cdu)\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,
11. $u_{t_1}^2\,d_{t_1}\,(cdu)\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,

welche nacheinander durch die ϑ dargestellt werden sollen.

Die Form $c_x\, c_s\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (alu)$ geht, wenn man für das Symbol l seinen Werth einträgt, in die folgende über:

$$c_x\, c_s\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (adu)\, u_{s_1}^2\, e_{s_1}\, (deu)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, u_s^2\, u_{s_1}^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu)\, \{e_{s_1}\, (bcu) - b_{s_1}\, (ecu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, u_s^2\, u_{s_1}^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu)\, \{c_{s_1}\, (beu) - u_{s_1}\, (bec)\}\,.$$

I. $$c_x\, c_s\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (alu) = \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, c_{s_1}\, u_s^2\, u_{s_1}^2\, .\, u_p^6 - \tfrac{1}{2}\, u_s^3\, .\, c_x\, c_s\, u_s^2\, (abu)^2\, (deu)^2 (adu)\, (bec)\,.$$

In derselben Weise wird:

II. $$c_x\, c_t\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (alu) = \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, c_t\, u_t^2\, u_s^2\, .\, u_p^6 - \tfrac{1}{2}\, u_s^3\, .\, c_x\, c_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu)\, (bec)\,.$$

III. $$c_x\, c_t\, u_t^2 (bcu) (abu)^2 (amu) = \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_t\, c_{t_1}\, u_t^2\, u_{t_1}^2\, .\, u_p^6 - \tfrac{1}{2}\, u_t^3\, .\, c_x\, c_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu)\, (bec)\,.$$

Durch diese Formeln werden die Formen 1., 2. und 8. durch niedere Formen ausgedrückt. Ersetzt man in ihnen den Factor c_x durch (clu) oder (cmu), so erhält man Ausdrücke für die Formen 3., 4., 5. und 9.

Die Formen 6. und 11. ändern ihr Zeichen, wenn man gleichzeitig a mit b und c mit d vertauscht, haben also den Werth 0.

Es bleibt mithin nur noch die Untersuchung der Formen 7. und 10. übrig, welche durch dieselbe Buchstabenänderung in einander übergehen, so dass wir nur eine unter ihnen, etwa:

$$u_s^2\, u_t^2\, c_s\, d_t\, (cdu)\, (bcu)\, (abu)^2\, (adu)$$

zu untersuchen brauchen. Diese Form hat den Werth:

$$\tfrac{1}{2}\, u_s^2\, u_t^2\, (cdu)\, (bcu)\, (abu)^2\, (cd\,(st))\, (adu)\,,$$

sie lässt sich leicht auf die Form $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)$ zurückführen.

Diese letztere Form genügt nämlich der Gleichung:

$$u_s^2 u_t^2\, u_p^5\, (pst) = u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, \{\tfrac{2}{3}\, (cd\,(st))\, (adu) + \tfrac{1}{3}\, (cdu)\, (ad\,(st))\}$$
$$= u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2 (cdu)\, (bcu) \{(adu)\, (cd(st)) + \tfrac{1}{3}\, (cda) (u_s d_t - d_s u_t)\},$$

es ist daher:

$$u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (adu)\, (cd\,(st))$$
$$= u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp) + u_t^3\, .\, u_s^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (cda)\, d_s - \tfrac{1}{3}\, u_s^3\, .\, u_t^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (cda)\, d_t\,.$$

Demgemäss ist sowohl von den eigentlich als auch von den uneigentlich zugehörigen Formen der Formen ϑ gezeigt worden, wie sie sich durch die Formen ϑ darstellen lassen; die Formen ϑ bilden daher ein volles Formensystem für die cubische Form f.

Giessen, im October 1868.