Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalcurve" vierter Ordnung.

Von

Walther Dyck in Leipzig.

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, das Princip, dessen sich Herr Klein bei Aufstellung der Irrationalität seiner 168blättrigen regulären Riemann'schen Fläche bedient*), für einen weiteren Fall anzuwenden, der in der voranstehenden Arbeit „Ueber reguläre Riemann'sche Flächen" schon von anderen Gesichtspunkten aus und mit anderen Hülfsmitteln betrachtet worden ist.**)

Es liegt uns in geometrischer Definition eine reguläre Riemann'sche Fläche vor, die sich 96blättrig über der complexen Ebene ausbreitet und deren einzelne Blätter dabei die folgende Verzweigung besitzen: An einer Stelle a der complexen Ebene hängen die Blätter (12 mal) zu je acht, an einer zweiten Stelle b (32 mal) zu je dreien, an einer dritten c endlich (48 mal) zu je zweien zusammen. In unserem speciellen Falle ist durch diese Angaben (wie schon auf pag. 488 erwähnt) die reguläre Riemann'sche Fläche eindeutig bestimmt. Ihr Geschlecht ergiebt sich als $p = 3$.

Wir verlangen, diejenige Gleichungsform für unsere Fläche aufzustellen, welche der von Herrn Klein für sein Problem 168ten Grades gegebenen analog ist.

Die Frage nach derjenigen *Normalcurve niedrigster Ordnung*, auf welche sich unsere Gleichung 96ten Grades eindeutig beziehen lässt, ergiebt vor Allem [vergl. die analogen Schlüsse Ann. XIV, p. 437]:

Unsere Normalcurve kann nicht hyperelliptisch sein.

---

*) Man sehe die Abhandlung Herrn Klein's „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen", Math. Ann. Bd. XIV, und hier speciell die §§ 2.—6. der Arbeit, die wir im Folgenden nur durch Annalenband und Seitenzahl citiren.

**) Angaben in blossen Seitenzahlen betreffen diese Abhandlung.

Denn es müsste dann eine Gruppe von 96 bez. 48 linearen Transformationen einer Veränderlichen geben, welche mit unserer Gruppe bez. einer Hälfte derselben isomorph ist, und das ist nicht der Fall, wie ein Vergleich unserer auf pag. 489 ff. näher charakterisirten Gruppe mit jenen Gruppen*) zeigt. Also:

Unsere Normalcurve ist von der vierten Ordnung.

Wir fragen nach ihrer speciellen Gleichungsform. Dann ergeben analoge Schlüsse, wie die Annalen XIV, pag. 438 gezogenen, für unseren Fall die Sätze:

Unsere Curve vierter Ordnung geht durch 96 Collineationen der Ebene, welche unsere Gruppe repräsentiren, in sich über.

Dabei werden die Punkte unserer Curve vierter Ordnung zu je 96 zusammengeordnet; nur einmal sind es blos 12 (die Punkte a), einmal nur 32 (die Punkte b) und einmal nur 48 (die Punkte c) zusammengehörige Punkte, entsprechend den Verzweigungspunkten unserer Fläche.

In *Gruppen zusammengehöriger Punkte* müssen sich nun alle „*speciellen*“ Punktgruppen auf unserer Curve vierter Ordnung einordnen, d. h. alle Gruppen solcher Punkte, deren individuelle Eigenschaften bei unseren Collineationen erhalten bleiben. Solche Punktgruppen ziehen wir heran, um specielle Eigenschaften unserer Curve vierter Ordnung kennen zu lernen, und benützen dabei die auch von Herrn Klein verwandten Punktgruppen der 24 Wendepunkte, der 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten und endlich der 84 sextactischen Punkte, für deren Anordnung wir folgende Sätze erhalten:

Die 24 Wendepunkte vertheilen sich nothwendig zu $2 \cdot 12$ auf die Punkte a. Es sind dies also Punkte, in denen eine Tangente hyperosculirt, wesshalb sie auch bei den folgenden Punktgruppen mehrfach zählend auftreten. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten vertheilen sich zu $2 \cdot 12 + 32$ auf die Punkte a und b; endlich die 84 sextactischen Punkte zu $3 \cdot 12 + 48$ auf die Punkte a und c**).

Beachten wir jetzt die auf pag. 489 gegebene Aufzählung der Transformationen unserer Riemann'schen Fläche in sich, so sehen wir, dass unsere 12 Punkte a sich in drei Quadrupel spalten. Es giebt nämlich drei Collineationen von der Periode 2 (Ziffer α, γ jener

---

*) Vergl. etwa Ann. XIV, p. 149, 150.

**) Man könnte zunächst noch an die Möglichkeit denken, dass unsere Punkte a als sextactische Punkte siebenfach zählen und so vollständig die 84 sextactischen Punkte absorbiren. Von geometrischen Ueberlegungen abgesehen, zeigt jedoch die spätere algebraische Formulirung die Unzulässigkeit dieser Annahme und ergiebt vielmehr, dass Punkte, in denen eine Tangente hyperosculirt, dreifach als sextactische Punkte zählen.

Aufzählung), wobei (1.) die vier Punkte je *eines* dieser Quadrupel individuell fest bleiben, während (2.) die acht übrigen Punkte a je *innerhalb* ihrer Quadrupel sich vertauschen. Beachten wir noch, dass jede Collineation von der Periode 2 eine *Perspective* ist, so ergiebt unsere Gruppirung sofort die folgenden Schlüsse: Unsere 12 Punkte a vertheilen sich (wegen (1.)) zu je vieren auf drei Perspectivitätsaxen. Die (vierpunktig berührenden) Tangenten dieser Punkte gehen je durch das entsprechende Perspectivitätscentrum. Diese Centra fallen (wegen (2.)) mit den Schnittpunkten der Perspectivitätsaxen zusammen.

Legen wir das Dreieck dieser Perspectivitätsaxen als Coordinatendreieck zu Grunde, *so folgt mit Nothwendigkeit, wenn man in λ, μ, ν geeignete constante Factoren mit aufnimmt:*

$$(1) \qquad f = \lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 = 0$$

als die Gleichungsform unserer Curve vierter Ordnung; und in der That geht diese Curve durch 96 Collineationen der Ebene in sich über, denn wir können die λ, μ, ν untereinander vertauschen und noch 2 derselben mit beliebigen vierten Einheitswurzeln multipliciren.

Um jetzt auf die Gleichung 96. Grades zu kommen, welche unsere reguläre Riemann'sche Fläche algebraisch darstellt, bedürfen wir (Ann. XIV, p. 446):

1. *als abhängig Variable* η dieser Gleichung — irgend einer auf unserer Curve eindeutigen Function der Coordinaten, welche in den 96 zusammengehörigen Punkten der Curve allgemein *verschiedene* Werthe besitzt. Dazu wählen wir die Coordinaten unserer Curvenpunkte selbst, und führen also gleichzeitig λ, μ, ν ein, zwischen denen dann noch unsere Relation (1) besteht.*)

2. *als unabhängige Variable* J — einer Function der Coordinaten, welche dadurch definirt ist, dass sie für alle zusammengehörigen Punkte der Curve und nur für zusammengehörige Punkte *denselben* Werth aufweist.

Es bleibt also J ungeändert für die 96 Collineationen, die unsere Curve in sich überführen, und lässt sich dabei darstellen als Parameter eines Büschels von Curven, welche auf unserer Curve vierter Ordnung 96 bewegliche Punkte ausschneiden. Zu diesem Zwecke lässt sich in unserem Falle, wie der Erfolg zeigt, ein Büschel von Curven benutzen, das mit der Curve 4ter Ordnung *keine* festen Grundpunkte gemein hat, also ein Büschel von Curven 24ter Ordnung.

---

*) Wir *müssen* in unserem Falle die Verhältnisse $\frac{\lambda}{\nu}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ *gleichzeitig* betrachten, oder irgend eine rationale Function derselben als Unbekannte einführen; $\frac{\lambda}{\mu}$ allein etwa würde nur 24 verschiedene Werthe bei unseren Transformationen annehmen.

Wir benützen für die Aufstellung eines solchen Büschels die speciellen Punktgruppen unserer Curve. Im Allgemeinen werden solche besondere Punktgruppen von Berührungscurven des Büschels auf der Grundcurve ausgeschnitten werden. Hier aber gelingt es uns (analog wie in dem von Herrn Klein behandelten Falle), Curven von *niedrigerer* als der Büschelordnung zu finden, welche unsere besonderen Punkte einfach ausschneiden und welche dann mehrfach zählend in unser Büschel eingehen.

In complicirteren Fällen wird man zweckmässiger Weise zur Herstellung dieser Curven die Bildungsprocesse der Invariantentheorie benützen*). Hier findet man ohne besondere Rechnung ganze Functionen 3ten, 8ten und 12ten Grades, $\varphi_{(3)}$, $\chi_{(8)}$ und $\psi_{(12)}$, welche gleich Null gesetzt unsere C_4 in den gemeinten Punktgruppen von 12, 32 und 48 Punkten treffen müssen.

Bilden wir nämlich:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_{(3)} = \lambda\mu\nu, \\ \chi_{(8)} = \mu^4\nu^4 + \nu^4\lambda^4 + \lambda^4\mu^4, \\ \psi_{(12)} = \lambda^8\mu^4 - \mu^4\nu^8 + \nu^8\lambda^4 - \lambda^4\mu^8 + \mu^8\nu^4 - \nu^4\lambda^8, \end{cases}$$

so sehen wir nach dem Früheren zunächst unmittelbar, dass $\varphi_{(3)} = 0$ die Wendepunkte unserer Curve ausschneidet.

Die Curve $\chi_{(8)} = 0$ schneidet eine Gruppe von 32 Punkten aus unserer C_4 aus, die in ihrer Gesammtheit bei unseren Transformationen ungeändert bleiben und dabei nicht mit den Wendepunkten zusammenfallen. Es sind dies also *nothwendig* die 32 Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Ebenso ist $\psi_{(12)}$ eine Function, die bis auf das Vorzeichen bei unseren Transformationen ungeändert bleibt; $\psi_{(12)} = 0$ schneidet eine Punktgruppe von 48 getrennten, von den Wendepunkten verschiedenen Punkten aus, die wieder in ihrer Totalität ungeändert bleiben und

*) Bildet man in unserem Falle jene Covarianten, die auch Herr Klein Ann. XIV, p. 446 ff. verwendet, so kommt, mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnung, von Zahlenfactoren abgesehen:

$$\nabla = \lambda^2\mu^2\nu^2.$$
$$C = \lambda^2\mu^2\nu^2\{\mu^4\nu^4 + \nu^4\lambda^4 + \lambda^4\mu^4\}.$$
$$K = \lambda^3\mu^3\nu^3\{\lambda^8\mu^4 - \mu^4\nu^8 + \nu^8\lambda^4 - \lambda^4\mu^8 + \mu^8\nu^4 - \nu^4\lambda^8\}.$$

Die Curven $\nabla = 0$, $C = 0$, $K = 0$ schneiden dabei hier bez. die 24 Wendepunkte, die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten und die 84 sextactischen Punkte aus. Das letztere [vgl. die Anmerkung auf pag. 511.] folgt, weil $K = 0$ mit der Curve übereinstimmt, die Cayley allgemein zur Bestimmung der sextactischen Punkte einer Curve aufgestellt hat. Vgl. Salmon, Higher plane curves, pag. 359 der 2 Aufl. Wir sehen somit die oben getroffene Vertheilung dieser Punktgruppen auf die Punkte a, b, c algebraisch bestätigt.

also nothwendig mit den oben aufgestellten Punkten c zusammenfallen müssen.

Bilden wir jetzt z. B.

$$J = \frac{\varphi_{(3)}^8}{\chi_{(8)}^3} \tag{3a}$$

oder

$$J' = \frac{\varphi_{(3)}^8}{\psi_{(12)}^2}, \tag{3b}$$

so sind dies zwei Büschel von C_{24}, welche unsere Punktgruppen in der verlangten Weise ausschneiden.

Für das Curvenbüschel (3a) kommt dabei die Punktgruppe der 48 Punkte c durch eine allgemeine Berührungscurve zu Stande, denn die Curve $\psi_{(12)}^2 = 0$ ist in diesem Büschel nicht enthalten. Das Analoge gilt für das Büschel (3b) bezüglich der Curve $\chi_{(8)}^3 = 0$.

Da aber das *Schnittpunktsystem* auf unserer C_4 $f = 0$ für beide Curvenbüschel *das nämliche* ist, so muss (man vergl. die analogen Betrachtungen Ann. XIV, p. 448), *unter Zuziehung der Gleichung* $f = 0$, zwischen $\varphi_{(3)}$, $\chi_{(8)}$ und ψ_{12} eine Relation statthaben von der Form:

$$\varphi_{(3)}^8 = k \cdot \chi_{(8)}^3 + l \cdot \psi_{(12)}^2.$$

Bestimmt man durch Einsetzung specieller Werthe die Constanten k und l, so kommt

$$k = -\frac{4}{27} \quad \text{und} \quad l = -\frac{1}{27}.$$

Mit Zuziehung dieser Relation lassen sich jetzt unsere, in den Gleichungen (3) gegebenen Curvenbüschel ersetzen durch die Verhältnissgleichung:

$$J : J - 1 : 1 = -4\,\chi_{(8)}^3 : \psi_{(12)}^2 : 27\,\varphi_{(3)}^8. \tag{4}$$

Und diese Gleichung, in Verbindung mit Gleichung (1), $f = 0$, *stellt jetzt unsere* 96*blättrige Fläche dar.*

In dieser Gleichungsform sehen wir unmittelbar, dass bei $J = 0$ die Blätter der Fläche zu je drei, bei $J = 1$ zu je zwei und bei $J = \infty$ zu je acht zusammenhängen; wie es sein soll. Dass aber die hiermit dargestellte Fläche nicht noch *andere* Verzweigungen aufweist, folgt (unter anderem) unmittelbar, wenn wir die Functionaldeterminante T aus f und zweien der obigen Functionen bilden. Diese wird z. B. für f, χ^3, φ^8, von constanten Factoren abgesehen,

$$T = \varphi^7 \cdot \chi^2 \cdot \psi,$$

und also sind die singulären Punktgruppen auf $f = 0$ durch die obigen drei Curven erschöpfend ausgeschnitten.

Die Gruppe unserer Fläche enthält, wie pag. 489, 1. gezeigt ist, eine ausgezeichnete Untergruppe, welche durch eine 48-blättrig über der complexen Ebene ausgebreitete, reguläre Riemann'sche Fläche definirt ist, deren Blätter an einer Stelle α zu je vier, an zwei weiteren Stellen β und γ zu je dreien verzweigt sind. Wollen wir diese Fläche mit den analogen Hülfsmitteln darstellen, wie die eben behandelte, so beachten wir lediglich, dass in Bezug auf diese Untergruppe die 32 Berührungspunkte von Doppeltangenten (die obigen Punkte b) unserer Curve 4ter Ordnung $f = 0$ sich in zwei Gruppen theilen, deren eine, wie man findet, aus $f = 0$ ausgeschnitten wird durch die Curve:

$$\varepsilon\lambda^4 + \varepsilon^2\mu^4 + \nu^4 = 0,$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}};$$

die andere Gruppe durch:

$$\varepsilon^2\lambda^4 + \varepsilon\mu^4 + \nu^4 = 0.$$

Berücksichtigen wir noch die Relation:

$$27(\lambda\mu\nu)^4 = (\varepsilon\lambda^4 + \varepsilon^2\mu^4 + \nu^4)^3 + (\varepsilon^2\lambda^4 + \varepsilon\mu^4 + \nu^4)^3,$$

welche wieder allgemein unter der Bedingung $f = 0$ statthat, so formulirt sich die Gleichung unserer Fläche, wenn wir zu $f = 0$ die Beziehung:

$$z : z - 1 : 1 = (\varepsilon\lambda^4 + \varepsilon^2\mu^4 + \nu^4)^3 : 27\lambda^4\mu^4\nu^4 : -(\varepsilon^2\lambda^4 + \varepsilon\mu^4 + \nu^4)^3$$

fügen, von der irgend zwei Glieder, z als den Parameter betrachtet, ein Büschel von Curven 12ter Ordnung darstellen, welches unsere C_4 in je 48 zusammengehörigen Punkten schneidet, von denen zweimal je drei, einmal je vier zusammenfallen.

Wir gehen noch kurz zur Darstellung einer weiteren Untergruppe, welche in den Gruppen der beiden eben behandelten Flächen ausgezeichnet enthalten ist. Sie ist (vergl. pag. 489, 2.) gegeben durch eine 16-blättrig über der complexen Ebene ausgebreitete reguläre Riemann'sche Fläche, deren Blätter an drei Stellen zu je vieren verzweigt sind. Hier ergiebt sich einfach ein Büschel von Geraden, welches auf unserer C_4 jedesmal 16 zusammengehörige Punkte ausschneidet, indem jedem Werthe des Parameters t unseres Büschels vier Gerade entsprechen. Das Büschel ist einfach dargestellt durch irgend zwei Glieder der Verhältnissgleichung:

$$t : t - 1 : 1 = \lambda^4 : -\mu^4 : -\nu^4.$$

Die Relation zwischen den drei hier gegebenen speciellen Curven der Büschel ist dabei unmittelbar

$$\lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 = 0$$

selbst.

Eine weitere analoge Discussion aller in der ursprünglichen Gruppe enthaltenen Untergruppen ergiebt dann vollständig die gegenseitige Anordnung der Punktgruppen auf unserer C_4, welche uns andererseits in den jedesmal entsprechenden Riemann'schen Flächen vorliegt.

Zum Schlusse sei noch in Kürze der Zusammenhang des hier behandelten Problems mit folgender bekannten Aufgabe aus der Theorie der elliptischen Functionen erwähnt: *Man soll aus der absoluten Invariante des elliptischen Integrals*) die Grössen* $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ (in der Legendre'schen Bezeichnung) *berechnen.*

Beachtet man nämlich die Identität:

$$(1\text{a}) \qquad (\sqrt{\varkappa})^4 + (\sqrt{\varkappa'})^4 + (\varrho)^4 = 0,$$

wo ϱ eine primitive 8^{te} Einheitswurzel bedeutet, und setzt hier

$$\sqrt{\varkappa} = \lambda, \quad \sqrt{\varkappa'} = \mu, \quad \varrho = \nu$$

so wird die Gleichung (1a) unmittelbar mit Gleichung (1) identisch und die obige Gleichung (4) (pag. 514) geht über in:

$$(4\text{a}) \qquad J : J - 1 : 1 = 4(1 - \varkappa^2 + \varkappa^4)^3 : \\ : (1 + \varkappa^2)^2 \cdot (2 - \varkappa^2)^2 \cdot (1 - 2\varkappa^2)^2 \\ : 27\varkappa^4 \cdot (1 - \varkappa^2)^2.$$

Das ist aber genau die Relation, die zwischen der absoluten Invariante J und dem Legendre'schen Modul $\varkappa^2 = \sigma$ besteht, wie sie z. B. Klein im XIV. Annalenband pag. 114 Anm. giebt.

Die einfachste Methode zur Berechnung von $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ aus J bietet sich unmittelbar: Zunächst bestimme man $\varkappa^2$, und also $\varkappa'^2$, aus Gleichung (4a); dann hat man, um auf $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ zu kommen, noch zwei 4^{te} Wurzeln zu ziehen. Dem geht aber die Zerlegung der Gruppe unserer 96-blättrigen Fläche, wie wir sie auf pag. 489 u. 490, 2. u. 3. gegeben haben, unmittelbar parallel: Wir adjungiren die Gruppe eines Doppelpyramidentypus (3, 2, 2), $N = 6$ [vgl. pag. 115 der erwähnten Klein'schen Abhandlung, sowie die vorstehende Formel (4a)], dann zerfällt unsere Gruppe in zwei cyklische Gruppen von der Periode 4.

Leipzig, Mitte November 1880.

---

*) Hier ist mit Klein als *absolute Invariante* die Grösse $\frac{g_2^3}{\Delta}$ bezeichnet, wobei g_2 in der Weierstrass'schen Schreibweise die rationale Invariante, Δ die Discriminante der binären biquadratischen Form ist, die unter dem Quadratwurzelzeichen im Nenner des elliptischen Differentials steht. Man vergl. Annalen XIV, pag. 112.