Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen.

Von

Walther Dyck in Leipzig.

(Hierbei 2 lithographirte Tafeln.)

Man hat noch kein allgemeines Princip, welches für eine geometrisch vollständig gegebene Riemann'sche Fläche die Frage nach der zugehörigen Irrationalität beantworten lässt. Die vorliegende Abhandlung nimmt diese Fragestellung für *die specielle Classe der regulären Riemann'schen Flächen in Angriff.* Eine reguläre Riemann'sche Fläche ist dabei definirt als eine über der complexen Ebene oder über einer beliebigen Riemann'schen Fläche N-blättrig ausgebreitete Fläche, welche durch eine Gruppe von N Transformationen, die Vertauschungen der Blätter, ungeändert in sich übergeht. Die Gruppe dieser Vertauschungen lässt sich einer geometrischen Discussion unterwerfen; wir erschliessen namentlich ihre Zusammensetzung aus *einfachen* Gruppen durch gestaltliche Umformungen der Riemann'schen Fläche. Jene *einfachen* Gruppen erscheinen uns bei dieser geometrischen Untersuchungsweise ebenfalls in Gestalt regulärer Riemann'scher Flächen. *Setzen wir dann die einfachen Irrationalitäten, welche diesen letzteren Flächen entsprechen, als bekannt voraus, so giebt die geometrische Deformation unserer ursprünglichen Fläche unmittelbar den Weg, wie wir jene einfachen Irrationalitäten zu der Irrationalität dieser Fläche von zusammengesetzter Gruppe zu verbinden haben; sie lässt unmittelbar die Gleichung dieser Fläche aufstellen.*

Der Ausgangspunkt vorliegender Untersuchung war die von Herrn Klein aufgeworfene Aufgabe, *für die niedrigsten Geschlechter alle regulären Riemann'schen Flächen aufzustellen und algebraisch zu formuliren.* *) Hiezu war zunächst erforderlich, Methoden auszubilden,

---

*) Klein „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen." Math. Ann. Bd. XIV, p. 460 Anm.

Citate auf Klein'sche Abhandlungen sind im Folgenden einfach durch Annalenband und Seitenzahl bezeichnet.

alle regulären Riemann'schen Flächen für ein gegebenes Geschlecht in einer geometrischen Definition zu erhalten, und hieran knüpften sich die Untersuchungen, welche die Gruppe jener Flächen betreffen. Die Flächen vom Geschlechte $p = 0, 1, 2, 3$ boten hiezu das Uebungsmaterial.

In meiner Inauguraldissertation*), auf welche ich namentlich bezüglich einer weiteren Ausführung der geometrischen und gruppentheoretischen Seite unseres Problems verweisen möchte, findet sich die Frage von diesen Gesichtspunkten aus behandelt.

In vorliegender Arbeit sind, in Fortsetzung der dortigen Untersuchungen, allgemeine Methoden dargelegt, *Gruppe* [Abschnitt 1.] und *Irrationalität* [Abschnitt 2.] einer regulären Riemann'schen Fläche aus der geometrischen Definition derselben zu erschliessen**). Neben den Beispielen, welche sich in beiden Abschnitten der Arbeit unmittelbar an die allgemeinen Erörterungen anfügen, sind in einem besonderen 3. Abschnitte *die regulären Flächen vom Geschlechte eins* im Anschluss an unsere gruppentheoretischen Untersuchungen behandelt und dabei ihre Beziehung zu dem bekannten Transformationsprobleme bez. Theilungsprobleme der elliptischen Functionen entwickelt.

Was die Specialisirung der Fragestellungen auf *reguläre* Riemann'sche Flächen betrifft und die Beziehung zu den analogen allgemeineren Fragen, so sei hierüber das Folgende erwähnt:

Die Beschränkung auf reguläre Riemann'sche Flächen ist keine wesentliche, insofern man, was die Aufstellung der zugehörigen Irrationalität betrifft, *jede* Riemann'sche Fläche durch eine *reguläre* er-

*) München, Straub 1879.

**) Die Frage *nach allen regulären Riemann'schen Flächen eines gegebenen Geschlechtes* tritt damit hier zurück; doch sei gestattet, das Resultat in Kürze anzuführen, welches eine vollständige Aufzählung der regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 0, 1, 2, 3$ ergiebt:

Innerhalb der angeführten Geschlechter sind die cyklischen Gruppen von Primzahlordnung, die Gruppe des Ikosaeders und eine Gruppe von 168 *Substitutionen* [*bei* $p = 3$] *die einzigen einfachen Gruppen. Die beiden letzteren definiren zwei von Herrn Klein ausführlich untersuchte Irrationalitäten***).*

Alle innerhalb unserer Geschlechter auftretenden zusammengesetzten Gruppen aber lassen sich in eine Reihenfolge bloss cyklischer Gruppen zerlegen.

Sämmtliche Irrationalitäten also, welche durch diese Flächen definirt sind, lassen sich [*mit Ausnahme jener beiden von Herrn Klein discutirten*] *durch die blosse Ueber- und Nebeneinanderstellung von Wurzelzeichen aufbauen.*

*) Man vergleiche hier die zugehörigen Abhandlungen Herrn Klein's in den Annalenbänden IX bis XV. Bezüglich der Fälle $p = 0$ sehe man ferner: Schwarz, „Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt." Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 292 ff. und „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche." Preisschrift. Berlin 1871.

setzen kann, welche die *Gruppe der Monodromie* für die ursprüngliche Fläche charakterisirt. Der Uebergang von der nichtregulären zur regulären Fläche stellt sich dabei analog dem Uebergange von einer allgemeinen algebraischen Gleichung zu ihrer Galois'schen Resolvente. *Thatsächlich sind ja auch die Gleichungen, zu denen wir durch unsere regulären Riemann'schen Flächen geführt werden, Galois'sche Resolventen mit einem oder mehreren Parametern.* Insofern nun gerade solche Irrationalitäten, die in Form gewisser Galois'scher Resolventen erscheinen, in bestimmtem Sinne als *Fundamentalirrationalitäten* zu betrachten sind*), auf die wir alle anderen transformiren, *wird man gegebenen Falles eine solche Zurückführung einer nichtregulären Riemann'schen Fläche auf eine reguläre zweckmässiger Weise jedesmal auch wirklich durchführen*, und damit die zugehörige Irrationalität mit Hülfe jener Fundamentalirrationalitäten darstellen. Ich denke auf die geometrische Ueberführung einer nichtregulären Riemann'schen Fläche in eine reguläre und den entsprechenden algebraischen Process bei einer anderen Gelegenheit eingehen zu können.

Eine analoge Beziehung, wie die eben betrachtete, welche gleich hier angeschlossen sein mag, besteht, *rein gruppentheoretisch* genommen, zwischen dem Studium einer Gruppe, sofern sie durch eine *Galois'sche Resolvente* mit einem oder mehreren Parametern, also durch eine *reguläre Riemann'sche Fläche* definirt ist und dem Studium der gleichen Gruppe, insofern sie uns durch eine *allgemeine Resolvente*, also durch eine Gleichung schlechthin, gegeben ist, sofern sie also als Gruppe der Monodromie für eine *nichtreguläre Fläche* erscheint.

Denken wir uns im ersten Falle zur Darstellung der einzelnen Substitutionen der Gruppe eine Indexbezeichnung der Art eingeführt, dass wir jedes Blatt unserer regulären Fläche mit einem Index belegen; es kommt dann die Gruppe durch bestimmte Vertauschungen dieser Indices zu Stande, wobei jeder Index *einmal* die Stelle jedes anderen vertritt**). Wir haben die Gruppe in einer Form dargestellt, in welcher sie *einfach transitiv* erscheint***). — Legen wir andererseits zum Studium der Gruppe eine beliebige Resolvente zu Grunde, lesen wir sie also aus einer nichtregulären Fläche ab, so lässt sich auch hier wieder eine Indexbezeichnung durch Benennung der einzelnen Blätter dieser Fläche einführen und die Gruppe der Fläche drückt sich durch Vertauschungen dieser Indices aus. Aber dabei stellt sich die

---

*) Man vergl. diese Annalen Bd. XIV. pag. 170.

**) Für unsere rein geometrische Discussion der Gruppen vertreten gewissermassen die Blätter der Fläche selbst jene Indexbezeichnung.

***) Man sehe hiezu den Aufsatz von Cayley „On the Theory of Groups" in den Proceedings of the London Math. Soc. Vol. IX. 1878.

Gruppe als *mehrfach transitiv* dar und besitzt neben ihren allgemeinen und wesentlichen Eigenschaften noch specielle, welche sich auf die Auszeichnung jener Resolvente, also auf die specielle Form ihrer Darstellung beziehen. Man kann vielleicht jene *wesentlichen* Eigenschaften, die für alle möglichen Darstellungen einer Gruppe unverändert bleiben, als die *invarianten Eigenschaften* der Gruppe bezeichnen. Es sind gerade diejenigen, deren wir zum Studium der Zusammensetzung unserer Gruppen bedürfen. Insofern sie für sich, ohne „fremde" Eigenschaften eben an jener „*Galois'schen Form*" der Gruppe — wenn dieser Ausdruck gestattet ist — auftreten, werden wir allgemein dazu geführt, *Gruppenuntersuchungen, die sich auf ein Studium der zugehörigen Irrationalitäten beziehen, stets eben an jener Form der Gruppe durchzuführen, in welcher sie einfach transitiv erscheint.*

Es sei schliesslich noch folgende Bemerkung gestattet. Wir gehen hier stets von einer regulären Riemann'schen Fläche aus und studiren die zugehörige Gruppe. Die umgekehrte Frage, *wie man zu jeder Gruppe eine reguläre Riemann'sche Fläche findet,* ist zunächst ausgeschlossen. Ich denke gerade dieser Fragestellung in Fortsetzung dieser Untersuchungen näher treten zu können.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Felix Klein, bei dem ich Anregung und mannigfachste Unterstützung in vorliegender Arbeit fand, bin ich zu grossem Danke verpflichtet.

I. Abschnitt.

Geometrisch-gruppentheoretischer Theil des Problems.

§ 1.

Gestalten, welche wir einer regulären Riemann'schen Fläche ertheilen können.

Wir betrachten reguläre Riemann'sche Flächen F, welche sich N-blättrig über der complexen Ebene z, oder über einer beliebigen Riemann'schen Fläche f ausbreiten. *Ihre Regularität spricht sich geometrisch zunächst dadurch aus, dass jedes Blatt genau so verzweigt ist wie jedes andere.* Weiter aber, wenn die Riemann'sche Fläche f ein Geschlecht $p > 0$ besitzt, wenn also das „einzelne Blatt" der über ihr ausgebreiteten Fläche für sich genommen ein Geschlecht $p > 0$ hat*), so können diese Blätter, ausser durch Verzweigungsschnitte

*) Des kurzen Ausdrucks halber ist in der Folge unter dem „Geschlecht des einzelnen Blattes" einer Fläche stets das Geschlecht verstanden, welches sich ergiebt, wenn wir ein Blatt der Fläche von den übrigen losgetrennt und die dabei in demselben entstandenen Schnitte uns geschlossen denken.

ineinander überzugehen, auch *längs geschlossener Curven ineinander geschlungen* sein. *Die Regularität der Fläche fordert dann, dass jedes Blatt genau so verschlungen ist, wie jedes andere.* Dabei haben wir auf f bekanntlich $2.p$ wesentlich verschiedene Durchschlingungscurven zu unterscheiden.

Die Regularität einer Fläche F verlangt insbesondere, dass, wenn in einer gewissen Verzweigungsstelle, bez. längs einer gewissen geschlossenen Curve ν Blätter im Cyklus zusammenhängen, dort dann die sämmtlichen Blätter zu je ν verzweigt bez. verschlungen sind.

Insofern unsere folgenden Untersuchungen wesentlich an der Riemann'schen Fläche selbst geführt werden, handelt es sich zuvörderst um deren anschauliche Darstellung. Wir werden hier vor allem die Darstellung verwenden, in welcher die Riemann'sche Fläche als eine *frei im Raume gelegene* erscheint, indem wir ihre N Blätter uns nicht *übereinander* sondern *nebeneinander* gelegt denken.*)

Für den Fall einer über der z-Ebene N-blättrig ausgebreiteten regulären Riemann'schen Fläche soll das Verfahren der Deformation zu einer frei im Raume gelegenen Fläche, die dann in N Gebiete vom Geschlechte Null *regulär eingetheilt* erscheint, in Kürze vorgeführt werden. Es ist diese Umformung von Herrn Klein, Ann. XIV, p. 458ff. ausführlich entwickelt. Wir wiederholen sie hier aber namentlich desshalb, weil wir in der Folge von ähnlichen Deformationen unserer Riemann'schen Flächen ausgedehnten Gebrauch zu machen haben.

Es seien $z_1, z_2 \ldots z_n$ die Verzweigungsstellen unserer N-blättrigen Fläche, so dass bei z_1 die Blätter zu je ν_1, bei z_2 zu je ν_2 u. s. w. zusammenhängen. Dann legen wir in der z-Ebene durch die sämmtlichen Verzweigungsstellen eine geschlossene Curve, der Art, dass die z-Ebene und gleicher Weise jedes Blatt der Riemann'schen Fläche in zwei Gebiete getheilt wird — ein schraffirtes und ein nichtschraffirtes — die im Sinne der analysis situs symmetrisch sind. Die Fläche längs dieser Curve durchschneidend, erhalten wir $2.N$ getrennte Gebiete, die wir nach passender Deformation in der früheren Anordnung zusammenfügen, so zwar, dass die einzelnen Gebiete nicht mehr *über*, sondern *nebeneinander* zu liegen kommen. Dadurch werden die Windungspunkte der Fläche aufgehoben. Wo ν Blätter im Cyklus übereinander lagen, da liegen jetzt $2.\nu$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Gebietstheile, einen Cyklus bildend, nebeneinander. Die Fläche ist somit verwandelt in eine frei im Raume gelegene, geschlossene Fläche, die in $2.N$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte n-Ecke eingetheilt ist, und zwar ist die so erzeugte Eintheilung zunächst eine

*) Eine schon von Riemann gebrauchte Vorstellungsweise. Vergl. Ann. XIV, p. 134.

regulär-symmetrische, insofern wir jedes der N Blätter unserer ursprünglichen Fläche noch in zwei zu einander symmetrische Theile getrennt haben. Wenn auch diese Spaltung der einzelnen, unseren Blättern entsprechenden Gebietstheile für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich ist, so ermöglicht sie uns doch eine grössere Uebersichtlichkeit in der geometrischen Darstellung unserer Flächen und zugleich eine freiere Beweglichkeit in ihrer Auffassung, indem wir bei Aufhebung dieser Spaltung, also beim Uebergang von einer regulär-symmetrischen Eintheilung zu einer bloss regulären, noch die Wahl haben, *welches* der n an ein schraffirtes n-Eck der Eintheilung anstossenden nichtschraffirten n-Ecke wir mit dem ersteren zusammen als *ein Blatt* unserer Fläche betrachten wollen.

Zu einer übersichtlichen Zeichnung der durch unseren Process erhaltenen Fläche denken wir uns dieselbe in eine einfach zusammenhängende zerschnitten und breiten ein solches „Netz der Fläche" in die Zeichnungsebene aus. Dabei lässt sich dieses Netz bezüglich der verschiedenen Polygone der Eintheilung in bestimmter regulärer Weise anordnen. Nehmen wir etwa einen Eckpunkt ν [um den sich $2.\nu$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte n-Ecke lagern] in die Mitte, so breitet sich, falls wir nur die Zerschneidung unserer Fläche passend getroffen haben, um diesen Punkt das Netz in ν-facher Regularität und ν-facher Symmetrie aus — die letzteren Begriffe dabei im Sinne der analysis situs genommen.

Wir erleichtern uns die Uebersicht eines solchen Netzes durch Einführung auch einer gestaltlichen Symmetrie, indem wir unsere Polygone als Kreisbogenpolygone mit den Winkeln $\frac{\pi}{\nu_i}$ zeichnen*), wie dies bei den ersten Netzen, die man studirte, zufolge der functionentheoretischen Betrachtungen von selbst der Fall war**).

Durch analoge Deformationen lässt sich nun jede reguläre Riemann'sche Fläche in eine frei im Raume gelegene regulär eingetheilte Oberfläche verwandeln; nur sehen wir im allgemeinen Falle davon ab, die einzelnen Gebiete dieser Eintheilung, die, für sich betrachtet, jetzt allgemein einen höheren Zusammenhang als 1 haben, weiter in einen schraffirten und einen nichtschraffirten Theil zu spalten, wie wir dies für den Fall der über der z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Flächen soeben gethan haben.

§ 2.

Die Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche.

Die Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche ist dadurch gegeben, dass wir ein bestimmtes Blatt in jedes andere und in sich

*) Man vergleiche hierzu Ann. XIV, p. 463.

**) Schwarz a. a. O. Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 316.

selbst überführen. Bei diesen Zuordnungen sollen stets contigue Blätter wieder in contigue übergehen. Dadurch wird dann jedesmal die Fläche eindeutig in sich transformirt; die Punkte der Fläche werden dabei je zu N Punkten einander zugeordnet, welche in der regulären Riemann'schen Fläche übereinander, in der stellvertretenden regulär eingetheilten Oberfläche an *„homologen Stellen"* der Gebietseintheilung liegen. Die Verzweigungspunkte der Fläche, bez. die Polygon-Eckpunkte der Flächeneintheilung bilden Punktgruppen von nur $\frac{N}{\nu_1}, \frac{N}{\nu_2} \cdots$ Punkten. Diese Punkte bleiben also bei gewissen Transformationen fest, bei denjenigen nämlich, welche die Blätter des betreffenden Cyklus in einander überführen. Demgemäss wollen wir Transformationen unserer Fläche in sich, bei denen ein Punkt der Fläche fest bleibt, als *Drehungen* um diesen Punkt bezeichnen, während wir andererseits Transformationen der Fläche in sich, bei denen keiner ihrer Punkte fest bleibt, als *Verschiebungen* bezeichnen.

Zur wirklichen Aufstellung der N Transformationen einer Fläche in sich fragen wir zunächst nach der *Periode* der einzelnen Substitutionen und untersuchen dann das Verhalten der etwa vorhandenen ausgezeichneten Punktgruppen bei diesen Transformationen. Hiernach trennen wir die einzelnen Substitutionen in unter sich *gleichberechtigte*. Eine Transformation bewirkt nämlich eine bestimmte gegenseitige Zuordnung der Punkte unserer Fläche. Jede analoge Zuordnung entspricht einer gleichberechtigten Transformation. Rein gruppentheoretisch ausgedrückt sind mit einer Substitution S alle Substitutionen $S' = T^{-1}ST$, d. i. alle aus S „transformirten" Substitutionen*) gleichberechtigt [T bezeichnet dabei irgend eine Substitution unserer Gruppe]. Handelt es sich speciell um „Drehungen" der Fläche in sich, so fragen wir nach Anzahl und Art der dabei festbleibenden Punkte. Bleiben dann bei einer Drehung von der Periode μ [deren es um einen Punkt $\varphi(\mu)$ giebt, wo φ die bekannte zahlentheoretische Function bezeichnet] gewisse a der Punkte ν**) [μ ein Theiler von ν] fest, während die übrigen Punkte ν sich in Gruppen von je μ Punkten cyklisch vertauschen, so giebt es im Ganzen $\frac{N}{a\cdot\nu}$ getrennte Punktgruppen von je a Punkten ν, deren jede bei $\varphi(\mu)$ Drehungen von der Periode μ fest

---

*) Man vergleiche etwa C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, p. 23 ff. Im Folgenden ist stets das Jordan'sche Werk citirt, weil dort die begrifflichen Definitionen der hier studirten gruppentheoretischen Eigenschaften zusammengestellt sind.

**) Wir verstehen dabei unter den „Punkten ν" *nur die* $\frac{N}{\nu}$ zusammengehörigen Verzweigungspunkte, in welchen für *eine* gewisse Stelle der Riemann'schen Fläche die sämmtlichen Blätter zu je ν zusammenhängen.

bleibt. Diese $\frac{N}{a \cdot \nu}$ Gruppen von $\varphi(\mu)$ Drehungen sind dann *gleichberechtigte.*

Eine hiernach angeordnete Uebersicht der N Transformationen lässt uns die Gruppe einer Fläche mit allen ihren Untergruppen erkennen. Wir wenden uns jetzt zu deren rein *geometrischem* Studium.

§ 3.

Geometrisches Kennzeichen einer Untergruppe und speciell einer „ausgezeichneten Untergruppe".

Das Studium unserer Gruppen richtet sich — im Hinblick auf die spätere Aufstellung der durch unsere Flächen definirten Irrationalitäten — hauptsächlich auf das Vorhandensein „ausgezeichneter Untergruppen"*), also auf die Frage, ob die Gruppe *einfach* oder *zusammengesetzt* ist. Im letzteren Falle haben wir die *Factoren der Composition***) und ihre gegenseitige Anordnung, die uns unmittelbar den gruppentheoretischen Aufbau unserer Irrationalität versinnlicht, zu erschliessen. Indem wir diese Untersuchungen, im Anschluss an die geometrische Definition unserer Gruppen, in geometrische Form kleiden, haben wir vor allem *die Frage nach einem geometrischen Charakteristikum einer Untergruppe überhaupt und speciell einer ausgezeichneten Untergruppe der gegebenen Gruppe* zu beantworten. Zu dem Ende betrachten wir noch weitere Deformationen unserer Riemann'schen Flächen.

Wir haben in § 1. die über der z-Ebene oder über einer Riemann'schen Fläche f N-blättrig ausgebreitete reguläre Riemann'sche Fläche durch Nebeneinanderlegen der Blätter in eine regulär eingetheilte Oberfläche verwandelt. Wir fassen jetzt gewisse *Uebergangsstadien* einer solchen Deformation ins Auge, bei denen noch nicht alle Blätter nebeneinander ausgebreitet sind, sondern dieselben theils über-, theils nebeneinander liegen. Eine solche „*Uebergangsform*" besteht also im Allgemeinen aus M Blättern, deren jedes eine gewisse Gebietseintheilung trägt. Die einzelnen Blätter, je vom Geschlechte p', hängen dabei mit einander allgemein längs gewisser Verzweigungsschnitte und längs geschlossener Curven zusammen, so dass die Uebergangsform erst als Totalität aufgefasst die ursprüngliche reguläre Fläche darstellt.

Wir richten unser Augenmerk speciell auf das Vorhandensein *regulärer Uebergangsformen*, welche wir folgendermassen definiren:

N_1 Blätter vom Geschlechte p' sind unter einander regulär ver-

*) Nach einer von Lie herrührenden Bezeichnung sind darunter solche Untergruppen verstanden, die mit der Gesammtheit aller Transformationen vertauschbar sind.

**) Vgl. C. Jordan, a. a. O pag. 41ff.

bunden; jedes Blatt ist in gleicher Weise, wie jedes andere in N_2 Gebiete der Art eingetheilt, dass die Gesammtfläche eine in $N = N_1 \cdot N_2$ Gebiete regulär getheilte Fläche darstellt.

Die N Transformationen dieser Fläche lassen sich dann zusammensetzen aus:

1. Den Substitutionen $T, T' \cdots$, welche ein gewisses Gebiet A in sämmtliche unter bez. über ihm befindlichen überführen. Wir heissen diese N_1 Substitutionen die *Verticalsubstitutionen.*

2. Den N_2 Substitutionen $S, S' \cdots$, welche dasselbe Gebiet A in sämmtliche mit ihm auf dem gleichen Blatte gelegenen überführen — den *Horizontalsubstitutionen.*

Bei den *Verticalsubstitutionen* $T, T' \cdots$ werden sämmtliche Gebiete der Fläche in darüber beziehungsweise darunter gelegene übergeführt [ohne dass darum im Allgemeinen die Gesammtheit der Gebiete *eines* Blattes in die Gesammtheit der Gebiete eines anderen Blattes übergeht]. Die Iteration und Combination der Substitutionen T, T' ergiebt stets wieder eben solche Substitutionen. *Die Verticalsubstitutionen bilden also eine geschlossene Gruppe von Operationen, eine Untergruppe der Gesammtheit.*

Für die *Horizontalsubstitutionen* gelten im Allgemeinen analoge Sätze nicht. Es gehen bei ihnen übereinanderliegende [und ebenso nebeneinanderliegende] Gebiete im Allgemeinen nicht wieder in übereinander liegende [bez. nebeneinanderliegende] über. Dass diese Substitutionen hiernach im Allgemeinen *keine* Gruppe bilden, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Wir specialisiren jetzt unsere Uebergangsformen:

Die Gebietseintheilung, welche in jedem einzelnen Blatte vorliegt, soll für sich genommen eine reguläre und die Verzweigung bez. Durchschlingung der einzelnen Blätter untereinander dabei für alle homologen Stellen dieser Eintheilung dieselbe sein, so dass wieder die reguläre Gesammtfläche aus unserer Uebergangsform resultirt. Wir wollen solche specielle Uebergangsformen, die uns in der Folge hauptsächlich beschäftigen, als *„regulär-reguläre"* bezeichnen.

Die N_2 *Horizontalsubstitutionen* bilden auch jetzt noch nicht nothwendig eine Gruppe; aber sie *definiren indirect eine Gruppe in der jetzt regulären Eintheilung des einzelnen Blattes der Uebergangsform.*

Für die *Verticalsubstitutionen* gilt jetzt der Satz:

*Die Untergruppe, welche wir in den N_1 Verticalsubstitutionen einer regulär-regulären Uebergangsform abgeschieden haben, ist eine in der Gesammtheit ausgezeichnete.**)

*) In meiner Dissertation sind nur die „ausgezeichneten Untergruppen" in geometrische Betrachtung gezogen und so ist in der dortigen Terminologie [vgl. dort pag. 36 ff.] in der „regulären Uebergangsform" eine „ausgezeichnete Untergruppe" gekennzeichnet, während die „reguläre Uebergangsform" in ihrer jetzigen Definition Kennzeichen überhaupt einer Untergruppe der Gesammtheit ist.

Zum Beweise machen wir eine ganz allgemeine Substitution S, welche ein Gebiet A einer Verticalreihe R_1 überführt in ein Gebiet B einer anderen Verticalschicht R_2; hierauf eine Verticalsubstitution T, welche das Gebiet B in ein neues C derselben Schichte R_2 übergehen lässt. Wenden wir dann die Substitution S rückwärts an [führen also B wieder nach A zurück], so geht das Gebiet C in ein viertes D über, *welches der ursprünglichen Verticalreihe* R_1 *angehört*, denn jetzt gehen auch bei den Horizontalsubstitutionen übereinanderliegende Gebiete wieder in übereinanderliegende über. Also ist $S^{-1}TS = T'$, d. h. die Gruppe der Verticalsubstitutionen eine in der Gesammtheit ausgezeichnete.

Im folgenden Paragraphen wird uns ein specieller Fall dieser Uebergangsformen beschäftigen, dadurch charakterisirt, dass dabei nicht nur die Verticalsubstitutionen, sondern auch die Horizontalsubstitutionen für sich genommen eine Gruppe bilden.

§ 4.

Zerfallende Gruppen.

Bilden im speciellen Falle auch die Horizontalsubstitutionen einer regulär-regulären Uebergangsform eine Gruppe, so ist diese ebenso, wie die Gruppe der Verticalsubstitutionen in der Gesammtheit ausgezeichnet und mit jener gleichgestellt. *Wir heissen dann die Gruppe der Gesammtfläche zerfallend.* Ihre Substitutionen setzen sich nämlich zusammen:

1. *Aus der Gruppe der Verticalsubstitutionen,* bei welcher die einzelnen Blätter der Uebergangsform *in ihrer Totalität* vertauscht werden.

2. *Aus der Gruppe der Horizontalsubstitutionen*, bei denen die einzelnen Blätter der Uebergangsform je in gleicher Weise *in sich* transformirt werden.

Dann ist es möglich, unserer Uebergangsform U_1 eine zweite U_2 an die Seite zu stellen, in der die Horizontalsubstitutionen dort als Verticalsubstitutionen hier erscheinen und umgekehrt. Die Gesammtgruppe wird dann auch erzeugt, wenn wir die Gruppen der Horizontalsubstitutionen bezüglich von U_1 und von U_2 mit einander combiniren. Nehmen wir dem entsprechend ein Blatt der U_1 und ebenso ein Blatt der U_2 heraus, so sind dies für sich genommen zwei in N_1 bez. N_2 Gebiete regulär eingetheilte Flächen F_1 und F_2, durch deren „Simultanstellung" die $N = N_1 \cdot N_2$ blättrige Fläche F sich erzeugen lässt. Zu dem Ende denken wir uns die F_1 und F_2 so „zurück" deformirt, dass die N_1 bez. N_2 Gebiete wieder übereinander zu liegen kommen. Sie bilden dann zwei Flächen, die über der z-Ebene oder allgemeiner über einer Riemann'schen Fläche f, in gleicher Weise wie die Gesammtfläche F, ausgebreitet sind. Durch diese Umformung liegen jetzt die homologen Stellen der Flächen F_1, F_2 und F übereinander, und dadurch ist es möglich, die Combination der Transformationsgruppen von F_1 und F_2, durch welche wir die Gruppe der F erhalten, auch *geometrisch* zu bewerkstelligen. Die N_1 Transformationen von F_1 in sich stellen sich nämlich durch ebensoviele „*Transformationswege*" dar, welche von einem Ausgangsblatt in sämmtliche andere Blätter führen. Das Gleiche gilt für die N_2 Transformationen der Fläche F_2. Die Combination dieser Transformationswege ergiebt also die $N_1 \cdot N_2 = N$ Substitutionen, durch welche die Fläche *F in sich übergeht.* Wir können unmittelbar sagen:

Die Fläche F entsteht durch die Uebereinanderlagerung der beiden Flächen F_1 und F_2.

Insbesondere können wir die Verzweigung von F unmittelbar aus derjenigen von F_1 und F_2 ablesen. Hängen nämlich an einer Stelle die Blätter von F_1 zu je ν_1, die von F_2 zu je ν_2 zusammen, so sind dort die Blätter von F zu je ν verzweigt, wo ν das kleinste gemeinschaftliche Multiplum von ν_1 und ν_2 ist. Das Gleiche gilt bezüglich der Durchschlingungen der Blätter.

Umgekehrt können wir jetzt auch durch Uebereinanderlagerung zweier regulärer Riemann'scher Flächen F_1 und F_2 von N_1 bez. N_2 Blättern eine neue reguläre Fläche F erzeugen, welche dann eine zerfallende Gruppe definirt. Die Verzweigung und Durchschlingung der Blätter setzt sich dabei in der eben geschilderten Weise zusammen aus Verzweigung und Durchschlingung der beiden erzeugenden Flächen. *Diese Auffassung einer zerfallenden Gruppe ist jedoch eine allgemeinere als die soeben betrachtete.*

Die Blätterzahl der erzeugten Fläche F wird nämlich nur dann, wenn die beiden Flächen von einander „unabhängig" sind, $N = N_1 \cdot N_2$ sein.

Können wir aber aus F_1 und F_2 je eine regulär-reguläre Uebergangsform ableiten, für welche die reguläre Eintheilung der Blätter in beiden Formen dieselbe ist und der Art, dass die in beiden Eintheilungen homologen Stellen bei der Uebereinanderlagerung sich decken, so kommt, wenn wir hier durch Combination der Transformationswege beider Flächen unsere resultirende Fläche bilden, nur eine Fläche von der Blätterzahl $N = \frac{N_1 \cdot N_2}{P}$, wenn P die Ordnung jener durch die reguläre Gebietseintheilung definirten Fläche ist; denn ersichtlich setzen sich die Wege, welche wir in den beiden regulär eingetheilten Flächen unserer Uebergangsformen ziehen, immer nur zu Wegen einer ebensolchen Fläche zusammen und so treten die zugehörigen Substitutionen nicht zweimal-, sondern nur einmalzählend in der Gesammtheit auf.

Eine derartige Uebereinanderlagerung zweier Flächen mag als eine „*Uebereinanderlagerung mit Reduction*“ bezeichnet sein. Wir nennen dabei die Gruppe der entstandenen Fläche ebenfalls eine zerfallende, und zwar „*uneigentlich zerfallend*“ in die Gruppen von F_1 und F_2.

§ 5.

Die successive Decomposition einer Gruppe, die durch eine reguläre Riemann'sche Fläche definirt ist.

Die in den vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Hülfsmittel gestatten uns jetzt, alle Fragen, welche die Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche betreffen, auf geometrischem Wege, durch eine endliche Anzahl von Versuchen, zu beantworten.

Wir erhalten alle Untergruppen der gegebenen Gruppe durch die Bildung aller möglichen regulären Uebergangsformen der zugehörigen Riemann'schen Fläche. Die gegenseitige Stellung dieser Untergruppen erhellt aus dem Verhalten jener Uebergangsformen zu einander.

Für das Studium der *Decomposition* einer Gruppe fällt das Hauptgewicht auf eine Aufsuchung der *ausgezeichneten Untergruppen*, also *die Frage nach regulär-regulären Uebergangsformen.*

Liegt uns nun in einer regulären Riemann'schen Fläche eine Gruppe vor, deren Decomposition wir suchen, so haben wir der Reihe nach die folgenden Schritte auszuführen:*)

1. *Wir untersuchen, ob die Gruppe einfach oder zusammengesetzt ist.* Eine Gruppe ist einfach, wenn sie [ausser der identischen Substitution] keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt, zusammengesetzt im entgegengesetzten Falle. *Gelingt es also nicht, aus einer regulären Riemann'schen Fläche eine regulär-reguläre Uebergangsform abzuleiten, so ist die zugehörige Gruppe einfach, entgegengesetzten Falles ist sie zusammengesetzt.* Die Untersuchung einer einfachen Gruppe ist damit, vom gruppentheoretischen Standpunkt, zunächst abgeschlossen. Für die *zusammengesetzte Gruppe* fragen wir weiter:

2. *Ist die Gruppe zerfallend oder nichtzerfallend?* Gelingt uns die Erzeugung der unsere Gruppe definirenden Riemann'schen Fläche F in der § 4. gemeinten Weise durch Uebereinanderlagerung zweier regulären Riemann'schen Flächen F' und F'', so ist die Gruppe zerfallend in die Gruppen dieser beiden Flächen. An diese wendet sich dann gleicherweise die Untersuchung, und indem wir diesen Process soweit möglich fortsetzen, erhalten wir eine Reihe von Flächen F_1, F_2, F_3, $\cdots$, welche jetzt *nichtzerfallende* Gruppen definiren und

*) § 11. der Diss. inaug.

deren Uebereinanderlagerung die Fläche F erzeugt. *Wir heissen dann diese Flächen die Componenten, in welche die vorgelegte Gruppe zerfällt.* Die Blätterzahlen N_1, N_2, N_3, $\cdots$ derselben mögen als *Factoren des Zerfallens* bezeichnet sein. Dabei ist $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots = N$, sofern die Uebereinanderlagerung eine einfache ist, und wir heissen dann die Gesammtgruppe *eigentlich zerfallend.* Tritt jedoch [und dies ist die *allgemeinere Art* der Uebereinanderlagerung] eine „Reduction" in dem in § 4. gemeinten Sinne ein, so ist $N = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots}{P^{p-1} \cdot Q^{q-1} \cdots}$, wenn P, $Q \cdots$ die Ordnungen jener gemeinsamen Flächeneintheilungen, p, $q \cdots$ die Anzahl bezeichnet, in welcher sie sich in den Componenten der Fläche finden; wir bezeichnen dann die Gruppe als *uneigentlich zerfallend* in die Flächen F_1, F_2, $F_3 \cdots$

Die Zerlegung einer Fläche in ihre nichtzerfallenden Bestandtheile kann nun entweder nur auf *eine* oder auf *mehrere* Arten möglich sein, und wir wollen darnach *ein-* und *mehrdeutig zerfallende* Gruppen unterscheiden; dabei kann es auch vorkommen, dass gemäss einer Zerlegung die Gruppe eigentlich zerfallend ist, während sie sich gemäss einer anderen als uneigentlich zerfallend darstellt.

Nach Zerlegung der Gruppe in ihre *nichtzerfallenden* Bestandtheile haben wir

3. *die Frage nach der Einfachheit bez. der Zusammensetzung dieser letzteren* zu beantworten. Ist eine Gruppe zusammengesetzt, so können wir*) eine Reihenfolge von Untergruppen aufstellen, deren jede ausgezeichnet in der unmittelbar vorhergehenden enthalten ist und dabei nicht gleichzeitig Theil einer dort enthaltenen umfassenderen ausgezeichneten Untergruppe.**)

Geometrisch suchen wir also zunächst eine regulär-reguläre Uebergangsform zu der regulären Riemann'schen Fläche der Art, dass die Gruppe ihrer Verticalsubstitutionen in keiner *„umfassenderen"* Uebergangsform dieser Fläche in Form von Verticalsubstitutionen enthalten ist. Die reguläre Riemann'sche Fläche, welche diese Uebergangsform, von der Gebietseintheilung des einzelnen Blattes abgesehen, bildet, mit anderen Worten, die in der Ausgangsfläche enthaltene ausgezeichnete Untergruppe, untersuchen wir dann analog bezüglich etwaiger ausgezeichneter Untergruppen u. s. f.

Dabei kann es vorkommen, dass in einer der so successive auftretenden Flächen *mehrere Uebergangsformen* enthalten sind, *deren*

*) C. Jordan, a. a. O. pag. 41 ff.

**) Die Herstellung einer solchen Reihenfolge ausgezeichneter Untergruppen ist selbstverständlich auch für jede *zerfallende* Gruppe möglich; doch wird man, wenn es sich um die systematische Zerlegung der Gruppe handelt, diese zweckmässiger Weise immer erst in ihre *nicht zerfallenden* Bestandtheile trennen.

keine die andere umfasst; dann greifen wir zunächst irgend eine derselben zu weiterer Decomposition heraus; ebenso mit den anderen verfahrend, erhalten wir dann *mehrere Reihen von Zerlegungen, deren keine vor der anderen bevorzugt ist.* Wir wollen dann (analog wie oben bei den zerfallenden Gruppen) sagen, die betr. Gruppe lässt eine *mehrdeutige Decomposition* zu. Ferner kann eintreten, dass gewisse Gruppen unserer Reihenfolge ihrerseits wieder *zerfallende* sind [ohne dass darum die Gesammtgruppe eine zerfallende zu sein braucht]. Wir zerlegen sie dann in ihre nichtzerfallenden Bestandtheile, deren jeder für sich weiter zu discutiren ist.

Die Zergliederung der Gruppe erreicht ihr Ende, wenn wir bei *einfachen* Gruppen angekommen sind, welche also nur die identische Substitution [1] ausgezeichnet enthalten.

Die Blätterzahlen $N_1, N_2, \cdots, N_k$, 1 der successive gebildeten Uebergangsformen sind unmittelbar die Ordnungen der successive ausgezeichneten Untergruppen; die Zahlen $\frac{N}{N_1}, \frac{N_1}{N_2}, \cdots, \frac{N_k}{1}$ geben dann die Zahl der Horizontalsubstitutionen jeder Uebergangsform an: *Es sind die Factoren der Composition unserer Gruppe.* Jene Gruppen aber, welche in unseren successiven Uebergangsformen durch die regulären Eintheilungen je der einzelnen Blätter, diese für sich als reguläre Riemann'sche Flächen betrachtet, definirt sind, bilden die *einfachen* Gruppen, aus deren Composition die Gesammtgruppe entsteht.

Die *Reihenfolge* der Factoren der Composition giebt uns die Reihenfolge der Zerlegung unserer Gruppe an. Die oben auch geometrisch erkannte *Mehrdeutigkeit dieser Zerlegung* spricht sich in der *Vertauschbarkeit gewisser Factoren der Composition* aus. Ergab eine der Uebergangsformen eine *zerfallende* Gruppe, so stellen sich die Factoren der Composition für die Zerlegung derselben in ihre nichtzerfallenden Bestandtheile als gleichmässig berechtigte *neben einander.* Dabei ist noch eine mögliche Vieldeutigkeit dieser Zerlegung, sowie die Möglichkeit einer Reduction bei der Uebereinanderlagerung (pag. 483) zu beachten.

In der auf der nebenstehenden Seite abgedruckten Tafel stellen wir in gedrängten Definitionen die Gesichtspunkte zusammen, welche sich aus unseren geometrischen Betrachtungen für die Discussion einer Gruppe ergeben haben, die uns in Form einer regulären Riemann'schen Fläche vorliegt.

Um jetzt ein vollständiges Bild der Composition einer zu untersuchenden Gruppe G zu entwerfen, stellen wir für sie *zwei Tabellen* auf: die eine, Tabelle I., zählt die regulären Flächen auf, welche in den successive auseinander abgeleiteten regulär-regulären Uebergangsformen als Definitionen der ausgezeichneten Untergruppen auftreten; Tabelle II. giebt jene einfachen Gruppen, denen das System

[Zu pag. 486.]

Gruppe G,

definirt durch eine reguläre Riemann'sche Fläche F.

Einfache Gruppe.

Die Fläche F besitzt *keine regulär-reguläre Uebergangsform.*

Zusammengesetzte Gruppe.

Die Fläche F besitzt *wenigstens eine regulär-reguläre Uebergangsform.*

Nichtzerfallende Gruppe.

Die Fläche F kann *nicht* durch „*Uebereinanderlagerung*" von Flächen $F_1, F_2 \cdots$ erzeugt werden.

Gruppe mit eindeutiger Decomposition.

Es existirt *nur* „*eine umfassendste Uebergangsform.*"

Gruppe mit mehrdeut. Decomposition.

Es existiren *mehrere* gleichgestellte „*umfassendste Uebergangsformen.*"

Weitere Untersuchung der durch die *Verticalsubstitutionen* der Uebergangsformen definirten Gruppen.

Zerfallende Gruppe.

Die Fläche F kann durch „*Uebereinanderlagerung*" mehrerer Flächen $F_1, F_2 \cdots$ erzeugt werden.

Eindeutig zerfallende Gruppe.

Es existirt nur *eine* Reihe von „*componirenden Flächen*" $F_1, F_2 \cdots$

Mehrdeutig zerfallende Gruppe.

Es existiren *mehrere* Reihen von „*componirenden Flächen*" $F_1, F_2 \cdots$

Uneigentliches Zerfallen.

Die Uebereinanderlagerung der Flächen $F_1, F_2 \cdots$ ist eine „*Uebereinanderlagerung mit Reduction.*"

Eigentliches Zerfallen.

Die Uebereinanderlagerung der Flächen $F_1, F_2 \cdots$ ist eine „*Uebereinanderlagerung ohne Reduction.*"

Weitere Untersuchung der *nichtzerfallenden Bestandtheile* unserer Gruppe.

der jedesmaligen Horizontalsubstitutionen entspricht und welche in der regulären Eintheilung der Blätter der Uebergangsformen vorliegen.

In beiden Tabellen, deren letztere uns unmittelbar auch die Factoren der Composition ergiebt, charakterisiren wir den gruppentheoretischen Aufbau der Gesammtfläche auch noch durch die Stellung der einzelnen Glieder. Dabei sind für Tabelle I. Flächenformen *übereinander gestellte*, wenn die eine Fläche als ausgezeichneter Theil in der vorhergehenden enthalten ist, *nebeneinandergestellte*, wenn die betr. Formen als Componenten des Zerfallens für die nächst höhere Form, die dann eine zerfallende Gruppe definirt, erscheinen. Der Aufbau wird sich da verästeln, wo wir auf mehrere Weisen aus einer Fläche ausgezeichnete Untergruppen ausscheiden können, deren keine die andere umfasst. Dann ist die Decomposition auf mehrere Weisen möglich, die zwar dieselben Zahlen als compositionelle Factoren ergeben*), aber in verschiedener Anordnung und durch verschiedene Flächen definirt. Die Anordnung der Tabelle II. läuft — weil für jede Uebergangsform in I. die reguläre Verzweigung und Durchschlingung der Blätter untereinander, in II. die reguläre Eintheilung des einzelnen Blattes gegeben ist — mit der Anordnung der Tabelle I. parallel.

§ 6.

Beispiele.

Wir wollen die hiermit exponirten Methoden der Gruppenuntersuchung an einigen speciellen regulären Riemann'schen Flächen näher verfolgen, welche wir späterhin auch als Beispiele der algebraischen Formulirung unseres Problems verwenden.

Erstes Beispiel.

Wir untersuchen zunächst die Gruppe einer 96-blättrigen regulären Fläche, deren einzelne Blätter an einer Stelle zu je zweien, an einer zweiten zu je dreien, an einer dritten zu je acht zusammenhängen. Diese Angaben über die Verzweigung zusammen mit den Anforderungen der völligen Regularität bestimmen in unserem Falle die Fläche eindeutig, was allgemein keineswegs statthat.**)

In dem § 1. entwickelten Sinne kommt als geometrische Repräsentation unserer Fläche das in Fig. 1 (der Tafel I) gezeichnete Netz, welches wir uns in der beigeschriebenen Weise geschlossen zu denken haben. Die Fläche besitzt das Geschlecht $p = 3$ und wir wollen sie Kürze halber bezeichnen als Fläche [2, 3, 8]; $N = 96$.

*) Nach dem Satz von der Erhaltung der Factoren der Composition; vergl. C. Jordan, a. a. O. p. 42.

**) Man vergleiche etwa die in meiner Dissertation angeführten Beispiele pag. 26 ff. und pag. 60 ff., sowie die Discussion der Fälle $p = 1$ in Theil III. der vorliegenden Arbeit und das auf pag. 491 u. 499 Anm. erwähnte einfachste Beispiel.

Die 96 Transformationen nun, durch welche unsere Fläche in sich übergeht, trennen sich in folgende:

a) in Drehungen um die Punkte 8.

Bei diesen trennen wir wieder:

α) Die $6 \cdot 4$ Drehungen von der Periode 8, bei denen jedesmal 2 Punkte 8 fest bleiben.

β) Die $3 \cdot 2$ Drehungen von der Periode 4, bei denen jedesmal 4 Punkte 8 fest bleiben.

γ) Die $3 \cdot 1$ Drehungen von der Periode 2, bei denen jedesmal 4 Punkte 8 fest bleiben.

b) in $16 \cdot 2$ Drehungen um die Punkte 3 (von der Periode 3), bei denen jedesmal 2 Punkte 3 fest bleiben.

c) In $12 \cdot 1$ Drehungen um die Punkte 2 (von der Periode 2), bei denen jedesmal 4 Punkte 3 fest bleiben.

Fügen wir hierzu noch

d) 18 Verschiebungen unserer Fläche in sich, je von der Periode 4, und endlich

e) die identische Transformation (von der Periode 1), bei der jedes Blatt sich selbst zugeordnet ist,

so haben wir damit eine vollständige Tabelle unserer 96 Transformationen.

Die Gruppe, die sich hierin kennzeichnet, ist eine zusammengesetzte. Ihre Zergliederung wird in folgenden geometrischen Ueberlegungen klar:

1. Unsere Fläche besitzt eine umfassendste regulär-reguläre Uebergangsform, bestehend aus 48 Blättern [je vom Geschlechte Null], die unter sich durch die reguläre Verzweigung [3, 3, 4]*) verbunden sind; dabei ist auf jedem Blatte eine reguläre Eintheilung nach dem „Kreistheilungstypus"**) [2, 2]; $N = 2$ derart getroffen, dass einer der Eckpunkte 2 auf die Stelle zu liegen kommt, an welcher die Blätter zu vieren verzweigt sind, während die Verzweigungspunkte 3 der Fläche auf homologen Stellen der Gebietseintheilung liegen. Fig. 2 (Tafel I) zeigt die reguläre Eintheilung eines Blattes, wobei die markirten Punkte der Zeichnung die Verzweigungsstellen der Blätter unter sich andeuten. Bei A hängen die Blätter zu vieren, bei B und C zu je dreien zusammen. Die Gesammtfläche stellt so unsere ursprüngliche Fläche [2, 3, 8]; $N = 96$ dar, während wir in der Gruppe der Fläche [3, 3, 4]; $N = 48$ eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit erkennen.

2. Die Fläche (3, 3, 4); $N = 48$ besitzt eine umfassendste Uebergangsform in Gestalt einer 16-blättrigen Fläche, deren jedes Blatt,

*) Wir halten an der zu Anfang des Paragraphen eingeführten Art der Bezeichnung für die Verzweigung einer Fläche fest.

**) Wegen dieser Ausdrucksweisen vergl. z. B. Ann. XII, p. 167.

vom Geschlechte Null, die Eintheilung des Kreistheilungstypus [3, 3]; $N = 3$ trägt. Dabei sind die Blätter unter sich an drei homologen Stellen der Gebietseintheilung zu je vieren verzweigt [Fig 3, Tafel I]. Dadurch ist eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit ausgeschieden, charakterisirt durch die Fläche [4, 4, 4]; $N = 16$.

Diese Untergruppe ist dabei auch ausgezeichnet in unserer ursprünglichen Fläche [2, 3. 8]; $N = 96$. Diese letztere Fläche besitzt nämlich eine Uebergangsform [die natürlich keine „umfassendste" ist], in welcher die einzelnen Blätter [vom Geschlechte Null] eine Eintheilung nach dem „Doppelpyramidentypus" [3, 2, 2]; $N = 6$ tragen, während sie, 16 an Zahl, unter einander an drei homologen Eckpunkten 2 zu je vieren verzweigt sind [Fig. 4, Tafel I].

3. Die Gruppe der letzten Fläche ist nun eine zerfallende, indem wir sie erzeugen können durch Uebereinanderlagerung zweier Riemann'scher Flächen, deren jede einen Kreistheilungstypus [4, 4]; $N=4$ repräsentirt. Bei der ersten dieser Flächen findet dabei die Verzweigung der Blätter zu vieren an zwei Stellen A und B statt, während die Blätter der zweiten Fläche an zwei Stellen B und C untereinander verzweigt sind. So entsteht durch die Uebereinanderlagerung die 16blättrige Fläche, deren Blätter bei A, B und C zu vieren verzweigt sind. Wir drücken die Uebereinanderlagerung kurz aus durch die Schreibweise:

$$\begin{array}{cccl} A & B & C & \\ [4, & 4] & \cdot\,; & N = 4 \\ \cdot & [4, & 4]; & N = 4 \\ \hline [4, & 4, & 4]; & N = 16. \end{array}$$

4. Die Zusammensetzung jeder der beiden letzten cyklischen Gruppen ist sofort klar. Sie spricht sich für jede derselben aus in einer zweiblättrigen Uebergangsform, deren jedes Blatt (vom Geschlechte Null) eine Eintheilung nach dem Kreistheilungstypus (2, 2); $N = 2$ trägt und wobei diese Blätter an den Eckpunkten jener Eintheilung untereinander verzweigt sind.

5. Statt, wie eben, die Zerfällbarkeit der Gruppe [4, 4, 4]; $N=16$ zu benützen, könnten wir die Zerlegung der Gruppe auch durch successives Abscheiden ausgezeichneter Untergruppen bewerkstelligen. Diese sind der Reihe nach definirt durch die Flächen

$$[2, 2, 4, 4];\ N = 8,$$
$$[4, 4, 4, 4];\ N = 4.$$

Die Zerlegung der letzten Gruppe charakterisirt sich in einer zweiblättrigen Uebergangsform, deren jedes Blatt, vom Geschlechte eins, die reguläre Eintheilung [2, 2, 2, 2]; $N = 2$ trägt, während gleichzeitig die beiden Blätter, die wir uns als zwei übereinander liegende

Ringe denken, an jenen Eckpunkten 2 unter einander verzweigt sind. Beide Ringe sind dabei noch längs einer Meridian- und einer Breitencurve ineinander geschlungen*). *Fig.* 5 stellt die so eingetheilten und verzweigten Ringe aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet dar. Die Durchschlingung ist dabei in der kreuzweisen Zusammenheftung der Blätter ersichtlich.

Die Zerlegung der Fläche $[2, 2, 4, 4]$; $N = 8$ lässt sich noch durch die Bemerkung modificiren, dass ihre Gruppe zerfallend ist. Wir können die Fläche erzeugen durch folgende Uebereinanderlagerung:

$$\begin{array}{r}
[2,\ 4,\ 4];\ N=4 \\
[2,\ 2]\ \ .\ \ .\ ;\ N=2 \\
\hline
[2,\ 2,\ 4,\ 4];\ N=8.
\end{array}$$

Demgemäss leitet sich aus ihr (vergl. p. 482) neben der oben gegebenen Uebergangsform U_1, welche die Fläche $[4, 4, 4, 4]$; $N = 4$ ergab, noch eine zweite zweiblättrige Uebergangsform U_2 ab. Jedes Blatt derselben, vom Geschlechte eins [wir denken es uns wieder als einen Ring], trägt dabei die Eintheilung $[2, 4, 4]$; $N = 4$. Dabei sind die Blätter an vier homologen Stellen der Eintheilung untereinander verzweigt und ausserdem noch längs zweier Curven, der Meridian- und Breitencurve des Ringes, ineinander geschlungen. In Figur 6 der I. Tafel sind beide Ringe aufgeschnitten und übereinanderliegend gezeichnet, wobei die Durchschlingung der Ringe wieder durch die kreuzweise Zusammenheftung der Blätter zu Stande kommt.

6. Wollen wir nun die Zerlegung unserer Gruppe übersichtlich darstellen, so bilden wir für die Reihenfolge unserer Uebergangsformen jene in § 5. pag. 486 erwähnten Tabellen, welche für unser Beispiel auf pag. 492 zusammengestellt sind. Die erste giebt uns die ausgezeichneten Untergruppen, die als Verticalsubstitutionen der Uebergangsformen gegeben sind, die zweite die jedesmal getroffene reguläre Eintheilung der Blätter dieser Uebergangsformen und damit die in den Horizontalsubstitutionen definirten Gruppen.

Zweites Beispiel.

In der vorigen Reihe von Flächen boten sich, in einfachster Gestalt, zwei Beispiele von regulären Riemann'schen Flächen, deren Blätter (vom Geschlechte eins) gleichzeitig verzweigt und ineinander geschlungen waren (Fig. 5 u. 6 der Tafel I). Wir wollen noch in Kürze eine Fläche

*) Lassen wir diese Durchschlingung der beiden Ringe fort, so ist die nun entstandene Fläche gleichfalls eine reguläre. Eine Betrachtung der beiden, so gegebenen Flächen $[4, 4, 4, 4]$; $N = 4$ zeigt, dass dieselben zwar *die gleiche Gruppe* besitzen, dass diese aber bei beiden *in verschiedener Weise* zu Stande kommt. Man vergl. die auf pag. 499 gegebene algebraische Formulirung beider Flächen.

Uebersicht

der Decomposition der Gruppe unserer regulären Riemann'schen Fläche

$[2, 3, 8], \; N = 96.$

[Vergleiche pag. 491, Ziffer 6.]

I.

$[2, 3, 8]; \; N = 96$

$[3, 3, 4]; \; N = 48$

$[4, 4, 4]; \; N = 16$

- zerfallbar in
  - $[4, 4]; \; N = 4$ — $[2, 2]; \; N = 2$ — $[1]$
  - $[4, 4]; \; N = 4$ — $[2, 2]; \; N = 2$ — $[1]$
- oder zusammengesetzt aus $[2, 2, 4, 4]; \; N = 8$
  - zerfallbar in
    - $[2, 4, 4]; \; N = 4$ — $[2, 2, 2, 2]; \; N = 2$ — $[1]$
    - $[2, 2]; \; N = 2$ — $[1]$
  - oder zusammengesetzt aus
    - $[4, 4, 4, 4]; \; N = 4$ — $[2, 2, 2, 2]; \; N = 2$ — $[1]$

II.

$[2, 2]; \; N = 2$

$[3, 3]; \; N = 3$

-
  - $[2, 2]; \; N = 2$ — $[2, 2]; \; N = 2$
  - $[2, 2]; \; N = 2$ — $[2, 2]; \; N = 2$
- $[2, 2]; \; N = 2$
  -
    - $[2, 2]; \; N = 2$ — $[2, 2, 2, 2]; \; N = 2$
    - $[2, 2]; \; N = 2$
  - $[2, 2]; \; N = 2$ — $[2, 2, 2, 2]; \; N = 2$ — $[2, 2, 2, 2]; \; N = 2$

Die gegenseitige Anordnung von Tabelle I und II ist folgende:

Um von einer Gruppe A der in I aufgezählten Reihenfolge von Gruppen zu der nächsten, in A enthaltenen, ausgezeichneten Untergruppe B zu gelangen, ist jedesmal diejenige Gruppe der Tabelle II zu „adjungiren“, welche mit B correspondirt.

erwähnen, deren Blätter *nur längs geschlossener Curven* miteinander zusammenhängen:

Eine Fläche vom Geschlechte $p = 2$, die wir etwa als Doppelring [vergl. Fig. 7 der Tafel I] uns vorstellen können, sei doppelt überdeckt. Wenn wir die beiden Blätter längs geschlossener Curven ineinander übergehen lassen, haben wir in einfachster Form eine regulär verschlungene Riemann'sche Fläche vom Geschlechte $p = 3$.

Auf dem Ringe $p = 2$ unterscheiden wir nun *vier* wesentlich verschiedene Durchschlingungscurven [etwa die in der Figur gezogenen]. Indem wir nun die Blätter längs einer dieser Curven oder längs zwei, drei, vier derselben ineinanderschlingen, entstehen lauter *wesentlich von einander verschiedene* regulär verschlungene Flächen $p = 3$. Es kommt also der Satz: *Es giebt über dem gegebenen Doppelringe ausgebreitet fünfzehn verschiedene Flächen der gemeinten Art.*

Selbstverständlich besteht die „Gruppe" dieser Flächen in der Vertauschung der beiden Blätter, welche als eine Verschiebung der Fläche in sich zu bezeichnen ist. Wir kommen im algebraischen Theil auf das Beispiel zurück.

Zu weiteren Gruppenuntersuchungen werden uns die im Abschnitt III. behandelten regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ Anlass bieten. Weiter mag hier auf die ausführlich behandelten Beispiele meiner Inauguraldissertation verwiesen sein.

II. Abschnitt.

Algebraischer Theil des Problems.

§ 7.

Die algebraischen Beziehungen im Allgemeinen.

Ehe wir speciell zur Aufstellung der Irrationalitäten übergehen, die durch unsere regulären Riemann'schen Flächen definirt sind, formuliren wir allgemein die algebraischen Beziehungen, welche uns in den verschiedenen Gestalten, die wir einer Riemann'schen Fläche ertheilt haben, vorliegen.

Dem Umstande entsprechend, dass wir es hier nur mit *regulären Riemann'schen Flächen* zu thuen haben, sind, wie schon in der Einleitung erwähnt, alle unsere Gleichungen *Galois'sche Gleichungen* mit einem oder mehreren Parametern. Jede Wurzel η_i derselben drückt sich also durch jede andere η_k und übrigens die Parameter rational aus.

Wir betrachten nun Riemann'sche Flächen F, sofern sie sich über der complexen Ebene z und insofern sie sich über einer anderen Riemann'schen Fläche f, vom Geschlechte p, ausbreiten. Diese letzteren

Flächen f denken wir uns dabei am einfachsten durch Auflösung ihrer Verzweigungspunkte als „frei im Raume" gelegene Riemann'sche Flächen ausgebreitet (vergl. § 1.). Dann haben wir bei den über der Ebene z oder, was gleichbedeutend, über einer Riemann'schen Fläche f vom Geschlechte $p = 0$ ausgebreiteten Flächen auf die Verzweigung, bei den über einer allgemeinen Riemann'schen Fläche f [deren Geschlecht $p > 0$ ist] ausgebreiteten Flächen auf Verzweigung und Verschlingung der einzelnen Blätter zu achten.

Im ersteren Falle giebt uns eine complexe Variable z eindeutig den Ort in der Ebene an und diese führen wir als unabhängig Variable ein. Im zweiten Falle bedarf es zur Punktbestimmung auf f *zweier* Variablen y, z. Zwischen diesen besteht eine Relation $f[y, z] = 0$, die, sofern wir darin z als unabhängig Variable auffassen, eben unsere Fläche f definirt. Ueber dieser breitet sich die Fläche $F(\eta, y, z) = 0$ aus, bei der es nur auf die Verzweigung und Durchschlingung von η in Bezug auf $f(y, z) = 0$ ankommt.

So definirt z. B. $F(\eta, y, z) = 0$ eine völlig unverzweigte und nur verschlungene Fläche, wenn die Verzweigungen für η in Bezug auf z in Ort und Ordnung mit denen von y in Bezug auf z übereinstimmen. Es mag hierbei noch bemerkt sein, dass wir, geometrisch sowohl wie analytisch, die Durchschlingung zweier Blätter uns entstanden denken können durch das Zusammenrücken zweier Verzweigungspunkte, welche durch einen nicht zusammenziehbaren Verzweigungsschnitt verbunden sind. Es fällt dabei die Verzweigung fort, während doch die Blätter längs jenes Schnittes in einander übergehen.

§ 8.

Algebraische Formulirung für die Decomposition der Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche.

Wir wenden uns jetzt dem Probleme zu, eine reguläre Riemann'sche Fläche durch eine Gleichung mit einem bez. mit zwei Parametern darzustellen. Zu dem Ende gehen wir auf die geometrische Methode zurück, mit deren Hülfe wir die Zusammensetzung der Gruppe einer Riemann'schen Fläche aus einer Reihe von einfachen Gruppen studirt haben. Sie bedarf nur der algebraischen Umsetzung, um auch sofort die Zusammensetzung der Irrationalität jener Riemann'schen Fläche aus einer Reihe einfacher Irrationalitäten der Art und Form nach zu ermöglichen.

1. Algebraische Darstellung einer regulär-regulären Uebergangsform.

Eine regulär-reguläre Uebergangsform war definirt als reguläre Riemann'sche Fläche F, deren einzelnes Blatt selbst eine reguläre

Eintheilung der Art trug, dass die „Gesammtfläche“ eine reguläre war. Von der Gruppe der Gesammtfläche ist damit eine gewisse Untergruppe abgespalten, welche durch die reguläre Blättereintheilung definirt ist. *Algebraisch ausgesprochen ist von der Gesammtirrationalität ein Theil, welcher der regulären Blättertheilung entspricht, abgesondert.* Indem wir dort von „Horizontalsubstitutionen“ absehen, bleibt eine Gruppe von Verticalsubstitutionen übrig, die in der Gesammtheit ausgezeichnet ist: *indem wir hier die Irrationalität, welche der regulären Blatteintheilung zukommt, adjungiren, reduciren wir die Gesammtirrationalität auf die Irrationalität, welche jener Gruppe von Verticalsubstitutionen entspricht.* Zur algebraischen Formulirung trennen wir *zwei Fälle:*

a) *Das Geschlecht des einzelnen Blattes der Uebergangsform ist gleich Null.*

Es definire dann $F(\eta, y) = 0$ die Riemann'sche Fläche F, von der Eintheilung der Blätter abgesehen. Fügen wir eine Gleichung $f(y, z) = 0$ hinzu, wo z eine *eindeutige* Function von y, und fragen nach der Verzweigung von η in Bezug auf z, so ist durch die zugetretene Function f eine Spaltung jedes einzelnen Blattes der ursprünglichen Fläche F bewirkt. Ergiebt dann die Verzweigung von y in Bezug auf z gerade jene reguläre Riemann'sche Fläche f, welche uns in der obigen regulären Eintheilung jedes Blattes von F vorliegt, so bildet die Verzweigung von η in Bezug auf z gerade die Gesammtfläche unserer regulär-regulären Uebergangsform. Dabei müssen selbstverständlich die Constanten für beide Flächen so bestimmt sein, dass die Eintheilung f des einzelnen Blattes der Uebergangsform in der geometrisch verlangten Weise erfolgt. Die Möglichkeit einer solchen Bestimmung folgt aber eben aus dem Vorhandensein der Uebergangsform, sofern wir den Riemann'schen Satz, dass zu jeder Riemann'schen Fläche eine Function gehört, für gültig erachten.

b) *Das Geschlecht des einzelnen Blattes der Uebergangsform sei grösser als Null.*

Eine solche Fläche stellt sich, wenn wir von der Eintheilung eines Blattes zunächst absehen, mit Hülfe zweier Parameter (§ 7.) in der Form $F(\eta, y, z) = 0$ dar und dabei besteht zwischen y und z noch eine Relation $f(y, z) = 0$, welche jenes einzelne Blatt bezeichnet. Formuliren wir jetzt — und auf Grund jener obigen Riemann'schen Principien ist dies möglich — diese Relation zwischen y und z gerade so, dass sie die reguläre Eintheilung f definirt, welche in der Uebergangsform auf jedem Blatte getroffen ist, so stellt analog wie vorhin die Beziehung zwischen η und z die Gesammtfläche dar. Hier ist aber noch eine Erweiterung zuzufügen. Die auf jedem Blatte der F getroffene Eintheilung kann selbst der Art sein, dass die einzelnen

Gebiete derselben einen höheren Zusammenhang als 1 haben; d. h. wenn wir die entsprechenden (homologen) Ränder eines solchen Gebietes vereinigen, entsteht eine Fläche von höherem Geschlecht als Null. Dann bedürfen wir zur Darstellung dieser Eintheilung ebenfalls zweier Parameter z, w Die algebraische Formulirung besteht also in diesem Falle aus drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} F(\eta, y, z, w) &= 0, \\ f(y, z, w) &= 0, \\ f_1(z, w) &= 0. \end{aligned}$$

Dabei definirt die Verzweigung von η in Bezug auf f die Fläche F von der Eintheilung ihrer Blätter abgesehen; die Verzweigung von y in Bezug auf f_1 die Fläche f (die Blatteintheilung); die Beziehung von η zu f_1 endlich stellt die Gesammtfläche dar. Selbstverständlich ist auch hier die richtige Lagenbeziehung der beiden Flächen auf einander durch Bestimmung gewisser Constanten in den Flächengleichungen zu treffen.

2. Algebraische Darstellung der Uebereinanderlagerung zweier Riemann'scher Flächen.

Eine reguläre Riemann'sche Fläche F von zerfallender Gruppe liess sich durch die Uebereinanderlagerung von Flächen F_1, $F_2 \cdots$ darstellen (§ 4.). Es seien

$$F_1(y_1, z) = 0, \quad F_2(y_2, z) = 0 \cdots$$

die Gleichungen dieser Flächen. Wir setzen zunächst wieder die Blätter unserer Flächen vom Geschlechte Null voraus. Bilden wir dann irgend eine rationale Function η unserer y_i, so stellt die Verzweigung von η in Bezug auf z unmittelbar die Fläche F dar. Dabei muss die rationale Function der y_i so beschaffen sein, dass durch ihre Bildung keine Irrationalität verloren geht; es muss, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, eine „allgemeine" rationale Function der y_i sein. Der Unterschied zwischen uneigentlichem und eigentlichem Zerfallen, d. h. das Eintreten bez. Nichteintreten einer „Reduction" (pag. 483) ist algebraisch dadurch bezeichnet, dass in zweien oder mehreren der Irrationalitäten y_i, die ja im Allgemeinen zusammengesetzte sind, implicite ein und dieselbe Irrationalität vorkommt, die dann natürlich in der Gesammtirrationalität nur einmalzählend auftritt.

Analog gestaltet sich die Uebereinanderlagerung, wenn das Geschlecht der Blätter unserer Flächen F_1, $F_2 \cdots$ grösser als Null ist. Die Relation $f(\eta, z) = 0$ zwischen den zwei dann vorhandenen Parametern ist in diesem Falle, wie dies ja auch geometrisch deutlich, für alle übereinandergelagerten Flächen dieselbe.

Das Resultat unserer Ueberlegungen ist das folgende:

Es ist in jedem Falle möglich, den von uns eingeschlagenen geometrischen Gang der Zerlegung einer Gruppe algebraisch zu verfolgen. Wir können unmittelbar den Tabellen I und II, die wir für die Composition einer Gruppe aufgestellt, die zugehörigen algebraischen Beziehungen an die Seite setzen, soferne wir nur die dabei auftretenden einfachen Irrationalitäten kennen.

Wir entwickeln die wirklich rechnerische Durchführung an den schon oben, Abschnitt I, gebrachten Beispielen.

§ 9.

Beispiele.

Beispiel 1.

Wir verlangen, den beiden Tabellen, welche wir in § 6. (pag. 492) für unser erstes Beispiel der Decomposition einer regulären Riemann'schen Fläche entworfen haben, die algebraische Formulirung zur Seite zu setzen. Dies wird, entsprechend der Mehrdeutigkeit jener Zerlegung, in verschiedener Weise bewerkstelligt werden können.

I. Wir wollen, von der Gruppe der Fläche [4, 4, 4]; $N = 16$ als zerfallender Gruppe ausgehend, die Irrationalität der Fläche [2, 3, 8]; $N = 96$ aufstellen. Die Darstellung der ersteren Fläche durch die Uebereinanderlagerung zweier Kreistheilungstypen:

$$\begin{array}{llll} A & B & C & \\ [4, & 4] & ; & N = 4 \\ & [4, & 4]; & N = 4 \\ \hline [4, & 4, & 4]; & N = 16 \end{array}$$

ist nach § 8., 2 algebraisch unmittelbar gegeben, wenn wir η gleich einer „allgemeinen" rationalen Function R zweier vierten Wurzeln aus linearen Functionen von z_1 setzen, deren eine bei A und B, die andere bei B und C verzweigt ist. Nehmen wir, der folgenden Darstellung wegen, diese Verzweigungen für die speciellen Werthe $z_1 = \varepsilon$, ε^2, 1 $\left[\text{wo } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right]$, so haben wir

$$\eta = R(\eta_1, \eta_2), \tag{1}$$

wobei

$$\eta_1^4 = \frac{z_1 - \varepsilon}{z_1 - 1}, \quad \eta_2^4 = \frac{z_1 - \varepsilon^2}{z_1 - 1},$$

als algebraische Darstellung unserer Fläche. Indem wir jetzt auf jedem Blatte dieser Fläche eine Eintheilung nach dem Kreistheilungstypus [3, 3]; $N = 3$ anbringen und dabei die Verzweigungspunkte 4 auf homologe Stellen dieser Eintheilung fallen lassen, entsteht, wie wir oben gesehen, die Fläche [3, 3, 4]; $N=48$ (vergl. pag. 489 und Fig. 3 der Tafel I). Algebraisch setzen wir

(2) $$z_1^3 = z_2,$$

so hat η in Bezug auf z_2 die verlangte Verzweigung. Denn für $z_2=0$ und $z_2=\infty$ hat eine Verzweigung der Blätter zu dreien statt, während für $z_2=1$ [und nur für diesen Werth] z_1 die Werthe 1, ε, ε^2 annimmt und somit an dieser Stelle die Blätter der Fläche zu vieren zusammenhängen.

Um jetzt schliesslich auf die Fläche [2, 3, 8]; $N=96$ zu kommen, haben wir jedes Blatt der eben behandelten Fläche nach dem Kreistheilungstypus [2, 2]; $N=2$ so einzutheilen, dass ein Eckpunkt 2 auf $z_2=1$ fällt, während die Stellen, an welchen die Blätter zu dreien zusammenhängen, $z_2=0$, ∞, homologe Stellen der Eintheilung werden. Algebraisch ersetzen wir z_2 durch

(3) $$\left[\frac{z_2+1}{z_2-1}\right]^2 = z.$$

Dann ist die Verzweigung von η in Bezug auf z dargestellt durch die 96 blättrige Fläche, deren Blätter bei $z=0$ zu zweien, bei $z=1$ zu dreien und bei $z=\infty$ zu acht zusammenhängen.

Wir haben hier successive die Irrationalität unserer Fläche aufgebaut. Der umgekehrte Weg würde verlangen, die fertige Gleichung zwischen η und z aufzulösen. Dann haben wir der Reihe nach die in den Gleichungen (3), (2), (1) gegebenen Irrationalitäten zu adjungiren. Jede dieser Adjunctionen bewirkt dann eine Reduction der Gruppe unserer Gleichung, die wir gerade geometrisch an der zugehörigen Uebergangsform erkannt haben.

Die Reihenfolge der Gleichungen (1), (2), (3) stellt sich unmittelbar dem bezüglichen Theil der Tabelle II unserer Gruppenzerlegung an die Seite. Der Aufbau der ganzen Gruppe aber lässt sich am besten erkennen, wenn wir jetzt die Beziehung zwischen η und z in ausgerechneter Form schreiben:

$$\eta = R\left\{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}}-\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}}-1}},\ \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}}-\varepsilon^2}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}}-1}}\right\}.$$

II. Gehen wir zur Herstellung der gewollten Irrationalität von einer anderen Art der Gruppenzerlegung aus, so stellt sich dieselbe zunächst in etwas anderer Form dar. Beginnen wir z. B. [vergleiche die Tabelle pag. 492] mit der Fläche

(α) $$[2,\ 2,\ 2,\ 2];\quad N=2$$

und gehen der Reihe nach durch die Flächen

(β)	$[4, 4, 4, 4]$;	$N = 4$,
(γ)	$[2, 2, 4, 4]$;	$N = 8$,
(δ)	$[4, 4, 4]$;	$N = 16$,
(ε)	$[3, 3, 4]$;	$N = 48$

zu unserer gewünschten Fläche

(ζ) $\quad [2, 3, 8]$: $N = 96$,

so ergiebt sich folgende entsprechende algebraische Formulirung:

Fläche (α) zunächst ist unmittelbar gegeben durch die Gleichung

(4) $$\eta^2 = z_1^4 - 1\ ^{*)}.$$

Fläche (β) wird erhalten, wenn wir noch zufügen

(5) $$(z_1^4 - 1)^2 = (z_2^4 - 1)\ ^{**)}.$$

Um jetzt auf die Flächen (γ) und (δ) zu kommen, sind die Relationen einzuführen

(6) $$z_2^2 = z_3,$$

(7) $$z_3^2 = z_4.$$

Durch diese Substitutionen wird aber zunächst eine *Reduction* unserer Irrationalität bewirkt, indem wir jetzt die Beziehung zwischen η und z_3, bez. zwischen η und z_4 ausgedrückt haben durch die Formeln

$$\eta^4 = z_3^2 - 1$$

und

$$\eta^4 = z_4 - 1.$$

Wir dürfen desshalb hier nicht η selbst als die abhängig Variable in unseren Gleichungen annehmen, sondern irgend eine rationale Function von η und z_2. Es stellt dann die Beziehung von

(8) $$\eta' = R(\eta, z_2)$$

zu z_2, wobei die Gleichung

$$\eta^4 = z_2^4 - 1$$

---

*) Wir specialisiren mit Rücksicht auf die folgenden Gleichungen, analog wie vorhin, wieder die Constanten unserer Gleichung. Die *allgemeine* algebraische Formulirung der Fläche α müsste ja, von linearen Transformationen des Parameters abgesehen, *eine* willkürliche Constante enthalten.

**) Wir haben auf pag. 491, Anmerkung erwähnt, dass es zwei wesentlich verschiedene reguläre Flächen $[4, 4, 4, 4]$; $N = 4$ giebt. Ihre algebraische Formulirung ist allgemein die folgende:

$$\eta^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

für unsere oben behandelte Fläche, und

$$\eta^4 = (z - a)(z - b)(z - c)^3(z - d)^3$$

für jene zweite reguläre Fläche. Der Unterschied in der Zusammenhängung der einzelnen Blätter, wie wir ihn dort für beide Flächen gekennzeichnet haben, wird hier sofort durch Umkreisung der Verzweigungspunkte deutlich statthat, in gleicher Weise wie oben Gleichung (4) und (5), unsere Fläche β dar, aus welcher wir die Flächen γ und δ ableiten.

Indem wir also Gleichung (8) an die Stelle der speciellen Gleichungen (4), (5) treten lassen, schreibt sich die Gleichung der Fläche (γ) explicit in folgender Gestalt:

$$\eta' = R\left\{\sqrt{z_3^2 - 1},\ \sqrt{z_3}\right\} \tag{9}$$

und ebenso die für Fläche (δ) in der Form

$$\eta' = R\left\{\sqrt{z_4 - 1},\ \sqrt{z_4}\right\}. \tag{10}$$

Wir sehen, wie auch hier die Eigenschaft, dass die Gruppen unserer letzten beiden Flächen zerfallend sind (vergl. pag. 490 u. 491), zu Tage tritt.

Die Darstellung der weiteren Flächen (ε) und (ζ) gestaltet sich nun genau wie eben in I. durchgeführt. Nur ist, um eine vollständige Uebereinstimmung mit den dortigen Formeln (1) zu erlangen, dabei in Gleichung (10) der Parameter z_4 durch eine *lineare Function* $z_4 = -\varepsilon \frac{z_4' - \varepsilon}{z_4' - 1}$ zu ersetzen, was wir der kürzeren Schreibweise wegen hier umgangen haben.

Jetzt lassen sich für unsere Fläche den in pag. 492 gegebenen *„gruppentheoretischen" Tabellen* unmittelbar durch unsere in I. und II. abgeleiteten Formeln die Glied für Glied entsprechenden *„algebraischen" Tabellen* an die Seite stellen, wie dies wohl keiner weiteren Ausführung bedarf.

Beispiel 2.

Die algebraische Formulirung unseres zweiblättrigen Doppelringes (pag. 493 und Fig. 7 der Tafel I) gestaltet sich folgendermassen:

Wir haben zunächst den Doppelring durch eine Gleichung zwischen den Grössen y, z auszudrücken, welche wir dann als Parameter unserer Fläche einführen. Am einfachsten wählen wir dazu die Function

$$f(y, z) = y^2 - z(z-1)(z-a)(z-b)(z-c) = 0,$$

für welche die Verzweigung von y in Bezug auf z dargestellt ist durch die Fläche $[2, 2, 2, 2, 2, 2]$; $N = 2$ ($p = 2$), deren Verzweigungspunkte wir in Fig. 8 (Tafel I) angedeutet haben. Mit gleichem Rechte könnten wir irgend eine andere Gleichung $f(y, z) = 0$, welche eine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte zwei ergiebt, zu Grunde legen.

Jetzt haben wir eine Function

$$F(\eta, y, z) = 0$$

zu bilden, welche sich zweiblättrig über $f(y, z) = 0$ ausbreitet und dabei in Bezug auf diese Function unverzweigt ist. Dies leistet unmittelbar:

$$\eta = R\left(y, \sqrt{(z-a)(z-b)}\right),$$

wo R irgend eine allgemeine rationale Function bedeutet. Denn jedem Werthepaare y, z, welches uns eindeutig einen Ort auf dem Doppelringe bestimmt, entsprechen zwei Werthe η. Dabei ist die Fläche unverzweigt und die beiden Blätter hängen nur längs jener geschlossenen Curve zusammen, welche die Verzweigungspunkte a, b umgiebt. Entsprechend den 15 Paaren der 6 Verzweigungspunkte erhalten wir 15 wesentlich verschiedene Formen unserer Gleichung, die wir ebenso unmittelbar hinschreiben können. Indem wir die 15 Durchschlingungscurven, die wir so erhalten, aus nur 4 derselben zusammensetzen können, kommen unsere Fälle auf jene 15 Möglichkeiten zurück, die wir auf pag. 493 für unsere Fläche unterschieden haben.

III. Abschnitt.

Die regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$.

§ 10.

Aufzählung der hierhergehörigen Flächen.

Das Problem der regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ ist bekannt und identisch mit dem Problem der Transformation und Theilung der elliptischen Functionen.*) Hier soll es mit den für reguläre Riemann'sche Flächen allgemein gewonnenen Gesichtspunkten behandelt werden.

Wir trennen mit Rücksicht auf die folgende Darstellung die regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ in folgende zwei Gruppen.

Erste Gruppe.

1. Ueber einem Ringe vom Geschlechte $p = 1$ sich ausbreitend hat man M-blättrige unverzweigte Flächen, deren Blätter längs der Meridian- und Breitencurven des Ringes ineinander geschlungen sind.

2. Ueber der complexen Ebene sich ausbreitend $N = 2M$-blättrige

---

*) Man vergl. hierzu, da ich mich im Folgenden der Weierstrass'schen Bezeichnungen bedienen werde: Felix Müller: „De transformatione functionum ellipticarum". Diss. inaug. Berlin 1867. Kiepert: „Auflösung der Transformationsgleichungen und Division der elliptischen Functionen." Borchardts Journal. Bd. 76, p. 34ff.

Weiter sehe man noch:

Briot-Bouquet: „Théorie des fonctions doublement périodiques etc." p. 302ff. Christoffel: „Sul problema delle temperature stazionarie etc." Annali di matematica. S^e II. t. I. p. 99ff., die Abhandlungen von Schwarz in Borchardt's Journal Bd. 70, p. 118, Bd. 75, p. 320 und dessen mehrerwähnte Preisschrift, sowie Klein, Ann. XV. p. 278ff.

Flächen, deren Blätter an vier Stellen je paarweise zusammenhängen und die wir demgemäss als Flächen

$$[2, 2, 2, 2]; \; N = 2M$$

bezeichnen.

Zweite Gruppe.

Hier trennen wir folgende über der complexen Ebene sich ausbreitende Flächen:

1a. Flächen von der Verzweigung

$$[2, 3, 6]$$

und der Blätterzahl

$$N = 6m^2 \quad \text{und} \quad N = 18m^2.$$

1b. Die Flächen

$$[3, 3, 3],$$

$$N = 3m^2 \quad \text{und} \quad N = 9m^2,$$

und endlich

2. Die Flächen

$$[2, 4, 4],$$

$$N = 4m^2 \quad \text{und} \quad N = 8m^2.$$ *)

§ 11.

Die Flächen der ersten Gruppe.

Wir untersuchen zunächst die über einem Ringe $p = 1$ unverzweigt sich ausbreitenden Flächen und fragen, auf wie viele Weisen sich ein solcher Ring M-blättrig überdecken lässt.

Indem wir berücksichtigen, dass eine Verschlingung der einzelnen Blätter des Ringes nur längs zweier Curven, also etwa der Meridian- und der Breitencurve des Ringes in Betracht kommt, lässt sich die Zahl der Lösungen allgemein übersehen.

Zwei Ringe zunächst können auf drei Weisen, nämlich 1. längs einer Meridiancurve, 2. längs einer Breitencurve, 3. längs Meridian- und Breitencurve durchschlungen werden. Ersetzen wir unsere beiden Ringe durch ebene Parallelogramme, so haben wir die Ränder derselben in der Art, wie es Fig. 1 (der Tafel II) angiebt, zusammenzuheften, um unsere drei Flächen zu erhalten. Dabei sind unsere beiden Ringe jetzt nebeneinander, die reguläre Gebietseintheilung eines neuen Ringes bildend, ausgebreitet. In dieser Form lassen sich auch die weiteren Fälle übersichtlich discutiren. Man erhält dabei allgemein ausgesprochen das folgende Resultat:

*) Dass mit den hier aufgezählten Flächengruppen *alle* Flächen vom Geschlechte $p = 1$ erschöpft sind, folgt aus geometrischen Betrachtungen, wie ich sie in Theil I meiner Inaugural-Dissertation entwickelt habe.

Ist M die Anzahl der ineinander zu schlingenden Ringe und M von der Form $M = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdots$, so giebt es $\prod \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ verschiedene Arten der M-blättrigen regulären Fläche.

Dieselbe Zahl verschiedener Lösungen erhält man auch für die regulären Flächen [2, 2, 2, 2]; $N = 2M$; denn wir brauchen in unseren eben erhaltenen regulär durchschlungenen Flächen nur auf jedem Ringe die Eintheilung [2, 2, 2, 2]; $N = 2$ zu treffen [vgl. Fig. 2 der Tafel II), um unsere neuen Flächen zu erhalten.

Die Anzahl der verschiedenen Arten unserer Fläche ist nun genau auch die Zahl der Transformationen M^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen, wenn wir dabei die Multiplicationen mitzählen. Insoferne wir es hier in der That mit Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen zu thun haben, musste sich dieses Resultat ergeben, dem Umstande entsprechend, dass die Invarianten der vier Verzweigungspunkte auf unseren Ringen sich als Wurzel einer Modulargleichung für die betreffende Transformation ergeben. *Dabei müssen wir einer bestimmten solchen Wurzel nicht nothwendig eine bestimmte unserer Flächen zuordnen, wohl aber entsprechen gewissen Gruppen von Moduln auch gewisse Gruppen von Flächen. Diese Gruppirung entspricht dabei dem Umstande, dass für allgemeines M und unter Mitberücksichtigung der Multiplicationen die Modulargleichung reducibel ist und in eine gewisse Anzahl irreducibler Factoren zerfällt.*

Wir führen die Abzählung der kürzeren Ausdrucksweise wegen an den Beispielen der Transformation 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung durch, wobei die Abzählung für den allgemeinen Fall unmittelbar deutlich wird.

Die Durchschlingung dreier Ringe zunächst ist auf vier Arten möglich. Indem wir unsere Ringe aufgeschnitten in Gestalt von Parallelogrammen in die Zeichenebene breiten, sind diese vier Möglichkeiten in Fig 3 durch die Zuordnung der Ränder unserer Parallelogramme dargestellt. Diesen vier verschiedenen Flächen stellen sich die 4 verschiedenen Transformationen 3^{ter} Ordnung zur Seite, welche den Periodenpaaren

$$\frac{\omega}{3},\ \omega';\quad \omega,\ \frac{\omega'}{3};\quad \omega,\ \frac{\omega'-\omega}{3};\quad \omega,\ \frac{\omega'-2\omega}{3};$$

entsprechen. Wir können durch geometrische Umformung von einer unserer Flächen zu allen anderen übergehen, ebenso wie wir durch einen Wechsel in der Periodenbezeichnung die obigen Periodenpaare ineinander überführen können.*) So geht Fläche 1 in Fläche 3 und 2 über, wenn wir in Fig 4a unter Beibehaltung der Zuordnung der

*) Man vergleiche die analogen Betrachtungen bei Camille Jordan „Traité des substitutions et des équations algébriques" p. 337 ff.

Ränder eine andere Abtheilung in Gebiete [Fig. 4b und 4c] treffen. Die Fläche 4 geht in die erste durch eine blosse Vertauschung der Meridian- und Breitencurven über.

Die Durchschlingung von vier Ringen lässt sich auf 7 verschiedene Arten bewerkstelligen, den 6 Transformationen und der einen Multiplication 4^{ter} Ordnung entsprechend. Jene 6 den Transformationen entsprechenden Flächen lassen sich analog wie vorhin ineinander überführen. Die siebente, davon abgesonderte, entspricht der Multiplication. Diese letzte Fläche [in Fig. 5, Tafel II dargestellt] lässt sich dabei erzeugen durch die Uebereinanderlagerung zweier zweiblättriger Ringflächen, für deren eine die Durchschlingung der Blätter längs einer Meridiancurve, für deren andere sie längs einer Breitencurve statthat. Analog können die Flächen für Transformation M^{ter} Ordnung, wenn M von der Form $a \cdot b \cdot c \cdots$ und a, b, c relativ prim zu einander sind, erzeugt werden durch die Uebereinanderlagerung der Flächen für Transformation $a^{\text{ter}}, b^{\text{ter}} \cdots$ Ordnung — der bekannte analytische Satz.

Was *die Gruppe* der $2M$ Transformationen einer Fläche $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2M$ in sich angeht, so ist deren Zusammensetzung unmittelbar deutlich. Zunächst ist die Untergruppe der M Verschiebungen in der Gesammtheit ausgezeichnet, was sich in der M-blättrigen regulär-regulären Uebergangsform, an der wir bisher unsere Discussion geführt haben, ausspricht. Die Composition dieser letzten Gruppe bestimmt sich aber unmittelbar aus der Zerlegung der Zahl M in ihre Primfactoren. Indem alle so kommenden einfachen Gruppen bloss cyklische sind, folgt der bekannte Abel'sche Satz, dass die Auflösung der Transformationsgleichungen mit Hülfe von Wurzelzeichen bewerkstelligt werden kann.

Die Theorie der elliptischen Functionen giebt uns unmittelbar die *analytische Formulirung* unseres Problems, indem es gerade die Beziehung zwischen zwei doppeltperiodischen Functionen mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ zu den doppeltperiodischen Functionen mit getheilten Perioden sind, welche unsere Irrationalität ergeben.

Wir betrachten zunächst die Flächen $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2M$. Wir führen in der Weierstrass'schen Bezeichnung $p(u)$, $p'(u)$ als doppeltperiodische Functionen mit den Perioden $2\omega, 2\omega'$ ein, und bezeichnen mit $\bar{p}(u)$, $\bar{p}'(u)$ Functionen mit den Perioden $\frac{2\omega}{m}$ und $\frac{2\omega'}{n}$ [indem wir eine Transformation $m \cdot n^{\text{ter}}$ Ordnung herausgreifen]. Dann ist $\bar{p}(u)$ eine Function, welche bei den $2 \cdot m \cdot n$ Transformationen, welche u in $\pm u + \mu \frac{2\omega}{m} + \nu \frac{2\omega'}{n}$ [μ und ν dabei nach dem Modul m, bez. n genommen] überführen, und nur bei diesen Transformationen *ungeän-*

dert bleibt. Die Function $p'(u)$ nimmt dabei $2 \cdot m \cdot n$ verschiedene Werthe an. Die Gleichung also, die zwischen $\bar{p}(u)$ und $p'(u)$ besteht, hat sicher dieselbe *Gruppe*, wie unsere $2M$-blättrige Fläche. Aber die Relation ist auch wirklich durch unsere Fläche dargestellt, wie wir dies sofort übersehen, wenn wir die Verzweigung von p' in Bezug auf $\bar{p}$ untersuchen. Zu dem Ende fragen wir zunächst, wie p in Bezug auf $\bar{p}$ verzweigt ist, dann wie p' in Bezug auf p.

Die Transformationsgleichung in transcendenter Form:*)

$$p\left(u, \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{n}\right) = \bar{p}(u)$$

$$= p(u, \omega, \omega') + \sum_0^{m-1}{}_{\mu} \sum_0^{n-1}{}'_{\nu} \left\{ p\left(u - \frac{2\mu\omega}{m} - \frac{2\nu\omega'}{n}\right) - p\left(\frac{2\mu\omega}{m} + \frac{2\nu\omega'}{n}\right) \right\}$$

[wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass μ und ν *nicht gleichzeitig* Null werden dürfen] lässt unter Zuziehung der Relation:

$$p\left(u + \frac{2\mu\omega}{m} + \frac{2\nu\omega'}{n}\right) = p\left(-u + \frac{2\mu'\omega}{m} + \frac{2\nu'\omega'}{n}\right)$$

$$\mu + \mu' \equiv 0 \bmod m, \qquad \nu + \nu' \equiv 0 \bmod n$$

die Stellen

$$\bar{p}(u) = \bar{p}(0), \quad \bar{p}\left(\frac{\omega}{m}\right), \quad \bar{p}\left(\frac{\omega'}{n}\right), \quad \bar{p}\left(\frac{\omega}{m} + \frac{\omega'}{n}\right)$$

als die Verzweigungsstellen der über $\bar{p}$ ausgebreiteten Fläche erkennen. Dabei hängen dort die Blätter der dem Werthsysteme von $p(u)$ entsprechenden Fläche stets zu zweien zusammen: den Werthen $p(0)$, $p(\omega)$, $p(\omega')$, $p(\omega + \omega')$ entspricht jedoch jedesmal ein in der betreffenden Stelle *unverzweigt* verlaufendes Blatt.

Die so entstehende (nicht reguläre) Fläche hat das Geschlecht Null. Indem wir dieselbe durch Nebeneinanderlegen ihrer Blätter auf die Kugel ausbreiten, kommt die Darstellung der Fig. 6 auf Tafel II [welche für den Fall $m = 4$, $n = 3$ entworfen ist]. An dieser Darstellung ist die Theilung der verschiedenen Perioden leicht ersichtlich.

Fügen wir jetzt unserer Gleichung die Relation

$$p'(u) = \sqrt{4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3}$$

$$= \sqrt{\big(p(u) - p(\omega)\big)\big(p(u) - p(\omega')\big)\big(p(u) - p(\omega + \omega')\big)}$$

hinzu, so besitzt p' in Bezug auf $\bar{p}$ jetzt gerade die Verzweigung unserer regulären $2 \, . \, M$-blättrigen Fläche. Die Blätterzahl $m \cdot n$ der eben besprochenen Fläche wird nämlich gerade verdoppelt und für die vier Werthe, welche vorhin an der betreffenden Stelle unverzweigte

*) Man vergl. z B. Felix Müller a. a. O. pag. 5ff.

Blätter ergaben, werden gerade durch die zutretende Quadratwurzel Verzweigungspunkte 2 hergestellt. *Geometrisch denken wir uns einfach die in Fig. 6, Tafel II gezeichnete Fläche doppelt überdeckt und dabei an jenen 4 markirten Stellen verzweigt.*

Die algebraische Darstellung unserer regulär durchschlungenen, übrigens unverzweigten M-blättrigen Flächen lässt sich nun aus dem Bisherigen sofort formuliren. Denken wir uns nämlich in der Fläche $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2M$ die Untergruppe der M Verschiebungen, wie schon früher angegeben, in dem M-blättrigen Ringe ersichtlich gemacht, der in jedem Blatte die Eintheilung $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2$ trägt, so haben wir blos das Weglassen dieser Eintheilung algebraisch auszudrücken: Wir fragen jetzt nicht mehr nach der Verzweigung von p' in Bezug auf $\bar{p}$ allein, sondern wir fragen, *wie ist p' verzweigt in Bezug auf die Grössen $\bar{p}$ und $\bar{p}'$ als den unabhängigen Variablen.* Dabei besteht zwischen diesen beiden Parametern $\bar{p}, \bar{p}'$ die Relation:

$$\bar{p}' = \sqrt{4\bar{p}^3 - \bar{g}_2\bar{p} - \bar{g}_3}$$

[vergl. § 8.]. In der That bleiben $\bar{p}$ und $\bar{p}'$ *gleichzeitig* nur mehr ungeändert bei den Transformationen von u in $u + \mu \frac{2\omega}{m} + \nu \frac{2\omega'}{n}$; die Transformationen von der Periode 2, welche u in $-u$ überführen, sind weggefallen, da $\bar{p}'$ eine ungerade Function ist.

§ 12.

Die Flächen der zweiten Gruppe.

Wir gehen zu den Flächen

(1a)	$[2, 3, 6]$;	$N = 6m^2$	und	$N = 18m^2$,
(1b)	$[3, 3, 3]$;	$N = 3m^2$	und	$N = 9m^2$,
(2)	$[2, 4, 4]$;	$N = 4m^2$	und	$N = 8m^2$

über. *Sie finden ihre algebraische Darstellung in Transformationsgleichungen zwischen den speciellen doppeltperiodischen Functionen, für welche g_2, beziehungsweise g_3 gleich Null ist.* In der That ist, wegen der *Dreizahl* der Verzweigungsstellen, jetzt keine absolute Constante mehr vorhanden.

1. Die Flächen der Verzweigung [2, 3, 6] und [3, 3, 3].

Durch einfache geometrische Betrachtungen an den zugehörigen Flächennetzen überzeugt man sich, wie schon oben erwähnt, dass unsere Flächen durch die Verzweigung und Blätterzahl jedesmal völlig *eindeutig* definirt sind.

Ihre Gruppe bestimmt sich unmittelbar durch die Bildung der folgenden regulär-regulären Uebergangsformen: Die Fläche [2, 3, 6]; $N = 6m^2$, bez. [2, 3, 6]; $N = 18m^2$ zunächst besitzt eine regulär-reguläre Uebergangsform, gebildet aus $3m^2$ bez. $9m^2$ Blättern (vom Geschlechte Null), deren jedes die Eintheilung des Kreistheilungstypus [2, 2]; $N = 2$ trägt [Fig. 7 der Tafel II]. Dabei hängen die Blätter zu je dreien an den in der Figur gekennzeichneten Stellen zusammen. So ergiebt sich die Gruppe der Flächen [3, 3, 3] $N = 3m^2$, bez. $N = 9m^2$ als ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit. Die Zerlegung dieser Gruppe wird ihrerseits durch eine m^2, bez. $3m^2$-blättrige Uebergangsform deutlich, deren Blätter je die in Fig. 8, Taf. II gezeichnete Eintheilung tragen, während sie übrigens unverzweigt und nur ineinander geschlungen verlaufen. Die in den Verschiebungen der m^2-blättrigen Fläche in sich gegebene ausgezeichnete Untergruppe ist dabei dieselbe, wie die vorhin allgemein bestimmte Gruppe der m^2 Verschiebungen, welche sich durch m-Theilung der beiden Perioden 2ω und $2\omega'$ des elliptischen Integrals ergab. Für die $3m^2$-blättrige Fläche ist diese Multiplication noch mit einer Transformation 3[ter] Ordnung verbunden, die wir sogleich noch näher betrachten.

Zur algebraischen Formulirung untersuchen wir *Theilungsgleichungen* der Functionen $p(u)$, $p'(u)$, wobei

$$p'(u) = \sqrt{4\,p^3(u) - g_3}$$

ist und für welche 2ω und $2\omega' = 2\varepsilon\cdot\omega$, wobei $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, ein primitives Periodenpaar ist.

I. Wir behandeln zunächst die Flächen [2, 3, 6]; $N = 6m^2$. Es sei dann

$$\bar{p}(u) = p\left(u, \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = p(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3), \quad \bar{p}'(u) = p'\left(u, \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right),$$

so ist zunächst, wie für die Theilung selbstverständlich, $\bar{g}_2 = 0$.

Daher folgt:

$$\bar{p}(\varepsilon u) = \varepsilon\bar{p}(u); \qquad \bar{p}'(\varepsilon u) = \bar{p}'(u)$$

und so sehen wir in $\bar{p}^3(u)$ [oder auch etwa $\bar{p}'^2(u) = 4\bar{p}^3(u) - \bar{g}_3$] eine Function, die bei den $6m^2$ Operationen, durch welche u in

$$\pm\,\varepsilon^\nu\cdot u + \mu\frac{\omega}{m} + \mu'\frac{\varepsilon\cdot\omega}{m}, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2$$

übergeht, und nur bei diesen Operationen, ungeändert bleibt. $p'(u)$ nimmt dabei andere und andere Werthe an.

Die Beziehung zwischen $p'(u)$ und $\bar{p}^3(u)$ besitzt also jedenfalls dieselbe Gruppe, wie unsere Fläche [2, 3, 6]; $N = 6m^2$. Eine Discussion der Verzweigung von p' in Bezug auf $\bar{p}^3$ zeigt aber, dass diese Gleichung wirklich das analytische Bild unserer Fläche ist.

Wir untersuchen, ähnlich wie vorhin im allgemeinen Fall § 11. pag. 505, zu dem Ende am einfachsten zunächst, wie p in Bezug auf $\bar{p}^3$ verzweigt ist, und erhalten eine $3m^2$ blättrige, im Allgemeinen nicht reguläre Fläche vom Geschlechte Null. Führen wir dann p' statt p als Unbekannte ein, so wird diese Fläche, die wir uns, durch Nebeneinanderlegen der Blätter, auf der Kugel ausgebreitet denken, verdoppelt und es werden die beiden über der Kugel liegenden Blätter dabei an vier Stellen untereinander verzweigt. Dadurch erweist sich dann die Gesammtfläche als eine $6m^2$-blättrige, deren Blätter an der Stelle $\bar{p}^3 = 0$ zu je dreien, bei $\bar{p}^3 = 1$ zu zweien und bei $\bar{p}^3 = \infty$ zu je sechs zusammenhängen.*)

II. Wollen wir jetzt zu den Flächen [3, 3, 3]; $N = 3m^2$ übergehen, so thuen wir dies *geometrisch* durch die Bildung jener auf voriger Seite erwähnten $3m^2$-blättrigen Uebergangsform [Fig. 7, Tafel II.), *algebraisch* durch Adjunction einer Quadratwurzel, welche den in der Uebergangsform abgeschiedenen Kreistheilungstypus repräsentirt.**) Wir führen nämlich eine Grösse $z = \sqrt{\bar{p}^3 - 1}$ als unabhängig Variable ein, wobei die Constanten dieser Wurzel durch die soeben in I. erwähnten Verzweigungsstellen bestimmt sind. Die Verzweigung von p' in Bezug auf z ergiebt dann die gewollte Fläche, deren Blätter für die Stellen $z = +i, -i, \infty$ zu dreien zusammenhängen.

III. Was endlich die Flächen [2, 3, 6]; $N = 18m^2$ und ebenso [3,3,3]; $N = 9m^2$ betrifft, so dient zu ihrer Aufstellung die Bemerkung, dass es für unsere speciellen doppeltperiodischen Functionen mit $g_2 = 0$

---

*) Setzen wir speciell $m = 2$, so ist die Verzweigung von p in Bezug auf $\bar{p}^3$ *regulär*, dargestellt durch eine 12 blättrige Fläche, deren Blätter an zwei Stellen zu dreien, an einer zu zweien verzweigt sind. Es ist die in den wiederholt citirten Arbeiten als *Tetraedertypus* bezeichnete Fläche. Indem wir p' statt p als Unbekannte einführen, erscheint diese Fläche verdoppelt und es werden dabei an vier homologen Punkten (etwa den Tetraeder-Eckpunkten) diese *beiden* Flächen untereinander verzweigt. So kommt die Gesammtfläche [2, 3, 6] $N = 24$. Fig. 9 der Tafel II stellt die Eintheilung einer Kugel nach dem Tetraedertypus in stereographischer Projection dar. Denken wir sie doppelt überdeckt und die beiden Blätter an den markirten Stellen verzweigt, so folgt die letztgenannte Fläche. Man sehe hiezu Schwarz in der Eingangs citirten Preisschrift, sowie Klein, Ann. XIV, p. 154.

**) Etwas anders ausgesprochen: Wir gelangen von der soeben in I. betrachteten Eintheilung eines Ringes in Dreiecke mit den Winkeln 90°, 60°, 30° zu der neuen Eintheilung in gleichseitige Dreiecke durch Zusammenziehen je zweier Nachbardreiecke. Algebraisch haben wir an Stelle der früheren unabhängigen Variabeln $\bar{p}^3$ eine solche Function von $\bar{p}^3$ als neue Variabele einzuführen, die über das gleichseitige Dreieck läuft, wenn $\bar{p}^3$ sich über ein rechtwinkliges Dreieck bewegt und das ergiebt die obige Formulirung.

eine Transformation *dritter* Ordnung giebt, für welche $\bar{g}_2$ ebenfalls gleich Null ist. Dieselbe ist gegeben durch die Gleichung

$$\bar{p} = \frac{p^3 - g_3}{p^2}$$

und dabei ist $\bar{g}_3 = -27 g_3$ und $\bar{g}_2 = g_2 = 0$.

Indem wir eben jene Transformation anwenden, drückt sich die Beziehung zwischen p' und $\bar{p}^3$ geometrisch durch eine 18-blättrige reguläre Fläche [2, 3, 6] aus. Wir haben diese Fläche in Fig. 10 der Tafel II dargestellt, an welcher die Periodenparallelogramme für die Transformation dritter Ordnung deutlich hervortreten.

Wenden wir diese Transformation auf unsere eben behandelten Multiplicationen an, so erhalten wir die sämmtlichen weiteren Fälle unserer Flächen [2, 3, 6] und ebenso [3, 3, 3].

2. Die Flächen [2, 4, 4]; $N = 4m^2$ und $N = 8m^2$.

Ganz analog lassen sich die Flächen der Verzweigung [2, 4, 4] behandeln, wenn man die speciellen doppeltperiodischen Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ zu Grunde legt, für welche $g_3 = 0$ ist.

Wir haben nämlich hier die Relationen $p(iu) = -p(u)$; $p'(iu) = ip'(u)$ und bemerken, dass 2ω und $2\omega' = 2i\omega$ ein primitives Periodenpaar ist. Die Beziehung zwischen $p'(u, \omega, \omega')$ zu

$$\left\{p\left(u, \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right)\right\}^2$$

drückt sich dann geometrisch durch die Fläche [2, 4, 4]; $N = 4m^2$ aus, wie dies analoge Ueberlegungen, wie die soeben in Fall 1. getroffenen, zeigen.

Die Flächen, für welche $N = 8m^2$ ist, werden dann erhalten durch Anwendung noch der *einen* Transformation *zweiter* Ordnung, für welche das transformirte $\bar{g}_3$ ebenfalls wieder gleich Null ist. Diese Transformation ist dargestellt in der Gleichung:

$$\bar{p} = \frac{p^2 - \frac{1}{4} g_2}{p}$$

und dabei ist $\bar{g}_2 = -4 g_2$; $\bar{g}_3 = 0$.

München, Ende October 1880.