Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili.

Di

T. Levi-Civita a Padova.

[Estratto da una lettera al Sig. Prof. P. Stäckel, a Kiel.]

In questi giorni ho avuto occasione di rivedere le Sue belle ricerche*) sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(p_1, p_2, \cdots, p_n;\ x_1, x_2, \cdots, x_n) = h$$

$\left(p_1 = \frac{dW}{dx}, p_2 = \frac{dW}{dx}, \cdots; h \text{ costante arbitraria}\right)$ per separazione di variabili.

Ho notato che si possono facilmente assegnare (sotto forma esplicita di equazioni a derivate parziali rapporto agli argomenti p ed x) le condizioni necessarie e sufficienti, cui deve soddisfare una H affinchè la equazione

$$H = h$$

ammetta un integrale completo della forma

$$\sum_1^n {}_i W_i$$

(W_i funzione della sola x_i).

Da queste condizioni scaturiscono alcune conseguenze di indole generale, che mi sembrano abbastanza interessanti, per quanto il dedurre da esse la completa risoluzione del problema apparisca ancora laborioso, e non vi sia nemmeno — oserei affermare — grande speranza di trovare tipi essenzialmente nuovi, oltre quelli da Lei scoperti.

Conumque penso di non farle cosa sgradita comunicandole quel poco, che io ho fatto in argomento, e come si possa tra altro ricavarne una discussione elegante per il caso di due variabili, già trattato dal

---

*) Habilitationsschrift, Halle 1891; od anche Mathem. Annalen, Bd. XLII, S. 546—549.

Prof. Morera*) e da Lei**) in modo esauriente, ma forse non altrettanto semplice.

Ecco dunque le mie osservazioni.

1. La ipotesi che W sia della forma $\sum_1^n{}_i W_i$ equivale a

$$\frac{dp_i}{dx_j} = 0 \qquad (i \gtrless j).\text{***)} \tag{1}$$

D'altra parte, derivando la equazione $H = h$ rispetto ad una generica x_i e notando che H dipende da x_i direttamente, e pel tramite delle p, si ha

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0,$$

e, per conseguenza, avuto riguardo alle (1),

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0.$$

Ora, nei casi, che veramente corrispondono ad una equazione di Hamilton-Jacobi, nessuna $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ può essere identicamente nulla, e peciò queste equazioni equivalgono a

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}. \tag{2}$$

Le (1) e (2) definiscono così tutte le derivate delle p. Perchè poi effettivamente esistano delle funzioni p, aventi quelle derivale (e allora, in virtù delle (1), esiste anche la W), dovranno essere soddisfatte le condizioni di integrabilità, le quali, come tosto apparisce, si riducono a

$$\frac{d}{dx_j}\left\{\frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}\right\} = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

ossia, sviluppando il simbolo operativo $\frac{d}{dx_j}$ in $\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{dp_j}{dx_j}\frac{\partial}{\partial p_j}$, e tenendo conto delle (2), a

*) Atti della R. Accademia di Torino, Vol. XVI, 1881.

**) Mathem. Annalen, Bd. XXXV.

***) Si intende che agli indici i, j, e così a quelli, che compariranno in seguito, si devono attribuire tutti i valori da 1 ad n, compatibili colle eventuali restrizioni, esplicitamente dichiarate.

$$(3)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_j}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j}$$
$$+\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}=0 \qquad (i \gtrless j).$$

Essendo definite tutte le derivate delle p, rimangono arbitrari al più i loro valori iniziali. Questi valori iniziali debbono effettivamente restare arbitrari quando si tratti, come noi supponiamo, di un integrale completo W della equazione di Hamilton-Jacobi (in cui — non lo si dimentichi — la costante h del secondo membro è a priori arbitraria e deve intendersi determinata in base ai valori iniziali).

Siccome poi, per la completa arbitrarietà dei valori iniziali delle p, è necessario e basta che le condizioni di integrabilità (3) sieno soddisfatte *identicamente*, rispetto a tutte le $2n$ lettere p ed x, possiamo senz' altro concludere:

La equazione di Hamilton-Jacobi

$$H = h$$

(dove è sottointeso che H contiene esplicitamente *tutte* le p) *è integrabile per separazione di variabili allora, e allora soltanto, che la funzione caratteristica H soddisfa alle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni di second' ordine* (3).

2. Supponiamo che H corrisponda ad un problema dinamico a legami indipendenti dal tempo e sia, colle solite notazioni,

$$(4)\qquad T = \frac{1}{2}\sum_{rs}^{n} {}_1\, a_{rs} x_r' x_s'$$

la forza viva del sistema, U il potenziale delle forze attive.

Essendo $a^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca a T, ove si ponga

$$(5)\qquad K = \frac{1}{2}\sum_{rs}^{n} {}_1\, a^{(rs)} p_r p_s,$$

avremo

$$(6)\qquad H = K - U;$$

inoltre, come è ben noto,

$$(7)\qquad x_i' = \frac{\partial K}{\partial p_i},$$

$$(8)\qquad \frac{\partial K}{\partial x_i} = -\frac{\partial T}{\partial x_i},$$

nel primo membro delle (8) risguardandosi le x e le p, nel secondo le x e le x' come variabili indipendenti.

Ciò posto, introduciamo per H il suo valore $K-U$ nei primi membri delle (3), e notiamo che essi con ciò comprendono una parte di quarto grado nelle p, una di secondo, e una di grado zero.

Dacchè si tratta di identità, i coefficienti di questi polinomi devono tutti annullarsi. Limitandoci per ora ad esprimere che si annullano separatamente i termini di diverso grado, le (3) si scindono nei tre gruppi:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j} - \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j}\frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial p_i}\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}\left\{\frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_i}\right\} = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = a^{(ij)}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Le (I) differiscono dalle (3) soltanto perchè vi compare K invece di H. Di quà la proposizione:

Se un problema dinamico di funzione caratteristica $H = K - U$ è integrabile per separazione di variabili, la stessa proprietà compete alla equazione $K = h$, che ne definisce le geodetiche.

Le (II) e (III) costituiscono condizioni addizionali (involgenti ad un tempo la K e la U), sotto cui la separazione di variabili seguita ad essere possibile anche per forze non nulle. Le (III) in particolare risultano identicamente soddisfatte nei casi da Lei studiati.

3. L'osservazione, testè fatta, mostra che, per classificare i problemi dinamici, che comportano separazione di variabili, conviene:

1⁰ caratterizzare quei sistemi materiali, o, se si vuole, quei $ds^2 = \sum_{rs}^{n} {}_1 a_{rs}\, dx_r\, dx_s$, per cui la forma K verifica le (I).

2⁰ esaminare, per ciascuno di questi sistemi, quali forze possono essergli applicate, a norma delle (II), (III). Questa seconda parte riescirebbe certo agevole, quando fosse risoluta la prima, tanto più che si potrebbe usufruire il notevole risultato, concernente la espressione analitica del potenziale U, da Lei stabilito*) senza alcuna ipotesi preventiva sulla natura del sistema.

Limitiamoci dunque, come è naturale, al caso delle geodetiche.

*) Habilitationsschrift, S. 8; Math. Annalen, Bd. XLII, S. 548.

Le condizioni esplicite nei coefficienti $a^{(rs)}$ di K si avrebbero dalle (I), sviluppando materialmente ed eguagliando a zero i singoli coefficienti. Ma si può indicare un criterio atto a semplificare i calcoli.

4. Fissiamo un generico indice i e poniamo

$$\sigma_{ij} = -\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial x_j} + a^{(ij)}\frac{\partial K}{\partial x_j}.$$

Badando che $\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}$ non è che $a^{(ij)}$, si vede che le $n-1$ equazioni (I) relative al fissato indice i (e agli $n-1$ j diversi da i) si possono scrivere

$$\frac{\partial K}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j}\right\} + \frac{\partial K}{\partial x_i}\sigma_{ij} = 0.$$

Ora $\frac{\partial K}{\partial p_i}$ è una forma omogenea di primo grado nelle p, $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ e σ_{ij} lo sono di secondo. O l'una o l'altra di esse deve essere divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_i}$.

Per esplicitare le condizioni di divisibilità, giova immaginare introdotte, al posto delle p, le x', che, a norma delle (7), sono loro combinazioni lineari. Si ha precisamente $\frac{\partial K}{\partial p_i} = x_i'$, e, per le (8),

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = -\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\sum_{1}^{n}{}_{rs}\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}x_r' x_s'.$$

Ne viene che le condizioni di divisibilità di $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ per $\frac{\partial K}{\partial p_i}$ sono

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0 \qquad (r, s \gtrless i). \tag{9}$$

Esprimendo anche le σ_{ij} per le x', si ha

$$\sigma_{ij} = x_j' \sum_{1}^{n} a^{(il)}\frac{\partial^2 T}{\partial x_l' \partial x_j} - a^{(ij)}\frac{\partial T}{\partial x_j},$$

donde come condizioni di divisibilità per x_i':

$$\left\{\begin{aligned} & a^{(ij)}\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0, \\ & \sum_{1}^{n}{}_l\, a^{(il)}\frac{\partial a_{rl}}{\partial x_j} - a^{(ij)}\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_j} = 0, \\ & \sum_{1}^{n}{}_l\, a^{(il)}\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}a^{(ij)}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (j, r, s \gtrless i;\ r, s \gtrless j). \tag{10}$$

Per ogni valore di i sono soddisfatte le (9), ovvero le (10). Queste ultime danno luogo a lor volta a sottocasi distinti secondo le ipotesi, che si fanno sulle ortogonalità (sull' annullarsi o meno delle varie $a^{(ij)}$).

Tenendo conto delle (9), o rispettivamente delle (10), per tutti i valori di i, i primi membri delle (I) risultano divisibili per $\frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}$ e si riducono così a polinomi di secondo grado nelle p (o, se si vuole, nelle x'). Esprimendo che i singoli coefficienti si annullano, si traggono le ulteriori condizioni, che sono di secondo ordine nelle a.

Malgrado queste relative semplificazioni, se non si trova qualche artificio sintetico, bisognerebbe passare in rassegna tutte le eventualità a priori possibili, supponendo, per un certo numero di valori di i, soddisfatte le (9), e, per i rimanenti valori, le (10), coi sottocasi accennati.

Per $n=2$ si va in fondo bene, come era facilmente prevedibile, dati i precedenti. Ma già per $n=3$ bisognerebbe sobbarcarsi ad una discussione minuta, che io non ho cercato di approfondire.

Per n qualunque, *quando si prestabilisca il caso, anzi addirittura il sottocaso* (ne ho provato qualcuno a titolo di esperimento), i calcoli sono semplici; ma debbo pur aggiungere che in questi esperimenti io non ho incontrato alcun tipo veramente interessante.

5. Come esempio prenderò il caso, in cui *tutte* le $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ sono divisibili per le corrispondenti $\frac{\partial K}{\partial p_i}$.

Introducendo le $a_{ij,r}$ (simboli di Christoffel di prima specie) definite da

$$(11) \qquad 2a_{ij,r}=\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_j}+\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r},$$

risulta subito dalle (9)

$$(9') \qquad a_{ij,r}=0 \qquad (i \gtrless j).$$

Infatti, se nessuno dei due indici i ed j è eguale ad r, si annullano tutti i termini del secondo membro delle (11); se invece è per es. $j=r$, e quindi $i\gtrless r$, allora $\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_j}$ si elide con $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r}$ e resta $\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i}$, che è zero in virtù delle (9).

Come le (9') sono conseguenza delle (9), così reciprocamente lo sono le (9) delle (9'). Si ha infatti per identità

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}=a_{ri,s}+a_{si,r},$$

quindi le (9') danno $\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0$, ogniqualvolta sia i diverso così da r che da s.

Ricordando ancora che i simboli di Christoffel di seconda specie sono definiti da

$$\left\{ {i \; j \atop s} \right\} = \sum_1^n {}_s \, a^{(rs)} a_{ij,r},$$

si vede che le (9') sotto nuova forma equivalente possono essere scritte

$$(9'') \qquad \left\{ {i \; j \atop s} \right\} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Ciò premesso, osserviamo che i rapporti

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} : \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \text{cioè} \quad -\frac{\partial T}{\partial x_i} : x_i'$$

si riducono, in virtù delle (9), a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} x_i' - \sum_1^n {}_r \frac{\partial a_{ir}}{\partial x_i} x_r'.$$

Siccome, sempre per le (9), è $\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_r} = 0$ per $r \gtrless i$, così queste espressioni si possono anche presentare sotto la forma

$$-\sum_1^n {}_r \left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_r} \right) x_r',$$

ossia, per le (11),

$$-\sum_1^n {}_r \, a_{ii,r} \, x_r'.$$

Riponendo per le x' i loro valori (7), e avendo riguardo alle (12), si ha infine

$$-\frac{\frac{\partial K}{\partial x_i}}{\frac{\partial K}{\partial p_i}} = \sum_1^n {}_s \left\{ {i \; i \atop s} \right\} p_s$$

Le (2) sono nel caso presente ($H = K$)

$$\frac{dp_i}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial x_i}}{\frac{\partial K}{\partial p_i}},$$

e così il sistema, che deve essere completo, consta delle

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dx_j} = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

e delle

$$\frac{dp_i}{dx_i} = \sum_1^n {}_s \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s \end{matrix} \right\} p_s. \tag{13}$$

Giunti a questo punto, non è il caso di ricorrere alle formule generali (I). Le condizioni da associare alle (9) sono chiaramente

$$\frac{d}{dx_j} \sum_1^n {}_s \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s \end{matrix} \right\} p_s = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

che, sviluppate, a norma delle (1), (13), divengono

$$\sum_1^n {}_s \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & i \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j \\ s \end{matrix} \right\} \right] p_s = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

e, dovendo stare identicamente, porgono

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & i \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j \\ s \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (i \gtrless j). \tag{14}$$

Si tratta ormai di individuare la K o, ciò che è lo stesso, il corrispondente ds^2, a mezzo delle (9′′) e (14).

L'integrazione di queste equazioni si può effettuare senza calcoli in base a noti principi di geometria differenziale.

In primo luogo, per definizione dei simboli di Riemann, si ha

$$a_{rs,\,ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ s \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} r & j \\ s \end{matrix} \right\} + \sum_1^n {}_l \left[\left\{ \begin{matrix} r & i \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & j \\ s \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r & j \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & i \\ s \end{matrix} \right\} \right]'$$

Distinguiamo i quattro casi:

a) $r \gtrless i, \;\; r \gtrless j;$

b) $r = i \gtrless j;$

c) $r = j \gtrless i;$

d) $r = i = j.$

Ogni simbolo $a_{rs,ij}$ rientra manifestamente in una delle quattro categorie. Quelli della categoria a) sono nulli, in virtù delle (9′′).

Per la b), si ha $\left\{ \begin{matrix} r & j \\ s \end{matrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{matrix} r & j \\ l \end{matrix} \right\} = 0$, nonchè $\left\{ \begin{matrix} l & j \\ s \end{matrix} \right\} = 0$ $(l \gtrless j)$ dalle (9′′) stesse. Rimane quindi

$$a_{is,ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & i \\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j \\ s \end{matrix} \right\},$$

che è zero in virtù delle (14).

Nello stesso modo si riconosce l'annullarsi dei simboli della categoria c). Quelli della d) sono poi identicamente nulli.

Si ha dunque

$$(14') \qquad a_{rs,ij} = 0,$$

per tutti i valori dei quattro indici r, s, i, j.

Reciprocamente — importa rilevarlo — dalle (14'), tenendo conto delle (9''), si ripassa alle (14).

In definitiva dunque possiamo risguardare come equazioni di condizione per il nostro ds^2 le

$$(14') \qquad a_{rs,ij} = 0$$

$$(9'') \qquad \left\{ {i\ j \atop s} \right\} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Le prime ci dicono che si tratta di una varietà euclidea.

Restano da caratterizzare le superficie coordinate $x_i = \text{cost}$.

Si raggiunge lo scopo nel modo migliore, cercando le espressioni delle coordinate cartesiane y in funzione delle x.

Le coordinate cartesiane debbono in ogni caso (considerate come funzioni di coordinate qualisivogliono x) soddisfare alle equazioni di Ricci*)

$$y_{r|ij} = 0,$$

ossia, sostituendo alle derivate covarianti $y_{r|ij}$ le loro espressioni effettive, alle

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n {}_s \left\{ {i\ j \atop s} \right\} \frac{\partial y_r}{\partial x_s} = 0.$$

Nel caso presente, valendo le (9''), se ne trae in particolare

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

le quali si integrano a vista, porgendo

$$(16') \qquad y_r = \sum_1^n {}_i X_i^{(r)}(x_i),$$

dove le $X_i^{(r)}(x_i)$ sono funzioni arbitrarie dell' indicato argomento, vincolate soltanto dalla restrizione che sia diverso da zero il determinante delle loro derivate prime (restrizione necessaria perchè le (16') definiscano una trasformazione non degenere fra le y e le x).

Questi valori (16') delle y verificano effettivamente tutte le condizioni richieste, perchè, portati nel

$$ds^2 = \sum_1^n {}_r dy_r^2,$$

*) „Lezioni sulla teoria delle superficie“, Padova 1898, presso Drucker; Cap. V.

danno luogo ad una espressione del ds^2 stesso in variabili x, soddisfacente alle (14′) e (9″).

Per le (14′) (che caratterizzano la trasformabilità al tipo euclídeo $\sum_1^n {}_r dy_r^2$), la cosa è evidente. Per le (9″), ciò risulta dal confronto delle (16) colle (15).

Osservando le (16′), siamo adesso in grado di caratterizzare assai semplicemente *le varietà* $x_i = cost$, dicendo che *sono ipersuperficie* (per $n = 2, 3$, curve o rispettivamente superficie) *di traslazione.*

6. *Discussione completa per* $n = 2$. I casi da distinguere sono:

1° I due rapporti

$$\frac{\frac{\partial K}{\partial x_1}}{\frac{\partial K}{\partial p_1}}, \quad \frac{\frac{\partial K}{\partial x_2}}{\frac{\partial K}{\partial p_2}}$$

sono entrambi interi (rispetto alle p, si intende).

2° Uno solo di essi è intero.

3° Nessuno dei due è intero.

1° *caso.* Per quanto s'è visto in generale, questo caso corrisponde a ds^2 piani, riferiti a linee di traslazione. Con opportuna scelta dei parametri delle linee coordinate, si ha subito il Suo terzo tipo*)

$$ds^2 = dx_1^2 + 2\cos(X_1 + X_2)dx_1 dx_2 + dx_2^2,$$

dove X_1 è funzione arbitraria di x_1, X_2 di x_2.

2° *caso.* Sia

$$\tau = \frac{\frac{\partial K}{\partial x_2}}{\frac{\partial K}{\partial p_2}} \tag{17}$$

il rapporto intero, dovendosi qui naturalmente escludere che lo sia anche l'altro $\frac{\partial K}{\partial x_1} : \frac{\partial K}{\partial p_1}$.

Le (I) constano di una sola equazione, che possiamo scrivere, dividendo per $\left(\frac{\partial K}{\partial p_2}\right)^2$,

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial \tau}{\partial x_1} - \frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial \tau}{\partial p_1} = 0.$$

Di quà apparisce che il prodotto $\frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial \tau}{\partial p_1}$ è divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_1}$. Non lo è il primo fattore, lo sarà dunque $\frac{\partial \tau}{\partial p_1}$. Ma, essendo τ funzione lineare

*) Math. Ann., Bd. XXXV, S. 94.

delle p, $\frac{\partial \tau}{\partial p_1}$ dipende dalle sole x e può perciò essere divisibile per la funzione lineare $\frac{\partial K}{\partial p_1}$ solo a patto di annullarsi identicamente. Così la precedente equazione si scinde nelle due

$$\frac{\partial \tau}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = 0,$$

e la τ si riduce quindi al prodotto di p_2 per una funzione della sola x_2. Designandola, come è sempre permesso, con $\frac{d \log X_2}{d x_2}$, e ponendo

$$f = X_2 p_2, \tag{18}$$

si può evidentemente attribuire a τ la espressione

$$\tau = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial p_2}},$$

con che la (17) assume la forma

$$\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0. \tag{17'}$$

Siccome f è, al pari di τ, indipendente da x_1 e da p_1, il primo membro della (17′) si può considerare come la parentesi di Poisson (K, f). L'annullarsi di tale parentesi esprime, come Ella mi insegna, che le geodetiche di K ammettono l'integrale

$$f = \text{cost}.$$

L'esistenza di un integrale lineare, anzi della forma $X_2 p_2 = \text{cost}$, per le linee geodetiche permette di asserire che *la varietà corrispondente è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, di cui le linee coordinate* $x_1 = cost$ *rappresentano i paralleli.*

È il Suo tipo (II″).

3° *caso.* Valgono le (10) del No. 4 per $i = 1, 2$. Non essendovi più di due indici distinti, mancano i due primi gruppi, e il terzo, in cui si ponga successivamente $i = 1$, $j = 2$; $i = 2$, $j = 1$, dà

$$\begin{cases} a^{(11)}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} a^{(12)}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{2} a^{(12)}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \quad a^{(22)}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Se le coordinate sono ortogonali, a_{12}, e quindi $a^{(12)}$, si annullano, e le (19) rimangono identicamente soddisfatte.

Si ha allora, scrivendo e^{α} per $a^{(11)}$, e^{β} per $a^{(22)}$,

$$K = \frac{1}{2}(e^{\alpha} p_1^{\,2} + e^{\beta} p_2^{\,2}),$$

con che

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial x_2}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_1}} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} p_1,$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial p_2}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_2}} = \frac{\partial \beta}{\partial x_1} p_2,$$

ed esplicitando in conformità la (I),

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1}\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1}\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Dalle (20) segue in particolare

$$\frac{\partial^2(\alpha - \beta)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

che, integrata, porge

$$\alpha - \beta = X_1 - X_2,$$

designandosi al solito con X_1, X_2 funzioni arbitrarie degli argomenti x_1, x_2 rispettivamente.

Posto

$$-\log \lambda = \alpha - X_1 = \beta - X_2,$$

le (20) si riducono a

$$(20') \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

e si ha per K la espressione

$$\frac{1}{2}\frac{X_1 p_1^2 + X_2 p_2^2}{U - V},$$

ovviamente riducibile a

$$\frac{1}{2}\frac{p_1^2 + p_2^2}{U - V},$$

dove U è funzione soltanto di x_1, V di x_2.

Il ds^2 corrispondente ha la forma di Liouville

$$(U - V)(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Si noti che, dati i criteri seguiti nella nostra classificazione, U e V debbono ritenersi effettive funzioni di x_1, x_2. Qualora infatti l' una o l' altra di esse si riducesse ad una costante, $\frac{\partial K}{\partial x_1}$ o $\frac{\partial K}{\partial x_2}$ risulterebbero divisibili per $\frac{\partial K}{\partial p_1}$ o $\frac{\partial K}{\partial p_2}$ rispettivamente e si ricadrebbe in uno dei due casi precedenti. Anche in questi del resto, come già fu osservato dal Prof. Morera e da

Lei, il ds^2 è riducibile alla forma di Liouville: solo che una delle due funzioni U, V (2° caso), o tutte e due (1° caso) risultano costanti.

Con ciò sono esauriti i tipi da Lei enumerati, ed effettivamente non ne esiste alcun altro. Resta però da completare la discussione, perchè non è priori evidente che le linee coordinate debbano essere ortogonali.

Proviamoci dunque a supporre $a_{12} \gtrless 0$ e mostriamo che non è allora possibile ottemperare a tutte le volute condizioni.

In primo luogo le (19), sostituendovi gli elementi reciproci $a^{(11)}$, $a^{(12)}$, $a^{(22)}$ coi loro valori $\frac{a_{22}}{a}$, $-\frac{a_{12}}{a}$, $\frac{a_{11}}{a}$ $(a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, e tenendo presente che a_{12} non si annulla, possonò essere scritte

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{a_{22}}{a_{12}^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{a_{11}}{a_{12}^2} = 0,$$

donde col solito significato di X_1, X_2,

$$a_{22} = a_{12}^2 X_1, \quad a_{11} = a_{12}^2 X_2.$$

Si avrebbe dunque un ds^2 della forma

$$a_{12}^2 X_1 X_2 \left\{ \frac{dx_1^2}{X_1} + \frac{2}{a_{12}\sqrt{X_1 X_2}} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \frac{dx_2^2}{X_2} \right\},$$

o, più semplicemente, scambiando x_1, x_2 in $\int\sqrt{X_1}dx_1$, $\int\sqrt{X_2}dx_2$ (nel campo reale, X_1, X_2 non possono annullarsi e quindi la trasformazione è certamente lecita) e scrivendo $\frac{1}{\lambda}$ per $a_{12}\sqrt{X_1 X_2}$,

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{dx_1^2 + 2\lambda dx_1 dx_2 + dx_2^2\right\}.$$

Ne viene

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda^2} - 1\right)\left\{p_1^2 - 2\lambda p_1 p_2 + p_2^2\right\},$$

con che K dipende dalle variabili x_1, x_2 solo pel tramite dell' argomento λ e per conseguenza

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial K}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2}.$$

Le derivate prime di λ non possono annullarsi identicamente, poichè in tal caso risulterebbero nulle $\left(\text{e quindi divisibili per le corrispondenti } \frac{\partial K}{\partial p}\right)$ $\frac{\partial K}{\partial x_1}$ o $\frac{\partial K}{\partial x_2}$.

Ciò posto, immaginiamo di sostituire, nella equazione fondamentale

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial p_2} - \frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial p_2} = 0,$$

i valori testè scritti di $\frac{\partial K}{\partial x_1}, \frac{\partial K}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2}$, isolando nel primo membro il termine

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2}.$$

Tutti gli altri termini contengono il fattore $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$, che si può raccogliere, attribuendo così alla precedente equazione (la quale deve sussistere identicamente rispetto alle p e alle x) la forma

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\Omega,$$

con Ω espressione quadratica nelle p.

Una tale identità implica in particolare che il secondo membro sia divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}$. Nessuno di questi due fattori divide $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$ $\left(\text{poichè dovrebbe allora dividere anche } \frac{\partial K}{\partial x_1}, \frac{\partial K}{\partial x_2}\right)$. Sarà dunque Ω divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}$ e si potrà ricavarne:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\cdot \text{funzione delle sole } x. \tag{21}$$

Ora

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}\{p_1^2 - 2\lambda p_1 p_2 + p_2^2\} - \left(\frac{1}{1-\lambda^2} - 1\right)p_1 p_2,$$

ossia, posto

$$A = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}, \qquad B = \frac{\lambda^2(\lambda^2-3)}{(1-\lambda^2)^2},$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = A(p_1^2 + p_2^2) + B p_1 p_2,$$

quindi

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} = \frac{dA}{d\lambda}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{dB}{d\lambda}p_1 p_2,$$

e il determinante

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \frac{dA}{d\lambda} & \frac{dB}{d\lambda} \end{vmatrix}$$

non è identicamente zero, perchè in questa ipotesi il rapporto $\frac{B}{A} = \lambda(\lambda^2 - 3)$ dovrebbe risultare indipendente da λ, ciò, che non è.

$\frac{\partial K}{\partial \lambda}$ e $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}$ sono pertanto due forme lineari indipendenti negli argomenti $p_1^2 + p_2^2$, $p_1 p_2$.

Supponiamo fissati dei valori di x_1, x_2 e quindi di λ coll' unica restrizione che

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \frac{dA}{d\lambda} & \frac{dB}{d\lambda} \end{vmatrix}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \gtrless 0,$$

e rimanga regolare la funzione delle x, che compare nel secondo membro della (21).

Si può allora, e in infiniti modi, attribuire agli argomenti $p_1^2 + p_2^2, p_1 p_2$, cioè in definitiva alle p, valori per cui $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$, e con essa il secondo membro della (21), si annullano, mentre non si annulla $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}$, e nemmeno quindi il prodotto $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}$, che costituisce il primo membro della (21) stessa. Ma questa equazione dovrebbe essere soddlisfatta per qualunque scelta dei valori iniziali.

La ipotesi $a_{12} \gtrless 0$ è dunque da escludere, come dovevasi dimostrare.

Padova, 3 Febbraio 1904.