Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten.

Von

Karl Heun in München.

Die Gauss'sche hypergeometrische Reihe ist in mehrfacher Richtung verallgemeinert worden. Man hat entweder die Zahl der Parameter vermehrt und ist so auf Functionen gekommen, welche linearen Differentialgleichungen der dritten oder höheren Ordnung genügen, oder man hat, wie Heine, Exponentialgrössen an Stelle der ursprünglichen Elemente eingeführt, wodurch Functionen definirt werden, die lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung befriedigen. Endlich hat man mehrere unabhängige Veränderliche statt des vierten Elementes eingeführt und zugleich die Zahl der Parameter erhöht, wie dies von Herrn Appell geschehen ist. Die so entstehenden Functionen genügen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ich habe im Folgenden Riemann'sche Functionen mit vier Verzweigungspunkten eingehender untersucht, welche in die Gauss'schen hypergeometrischen Functionen degeneriren, wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenfallen und zugleich ein gewisser Parameter einen besonderen Werth erhält. Da die sogenannten Lamé'schen Functionen und verschiedene andere in der mathematischen Physik vorkommende Reihen specielle Fälle der hier behandelten Functionen sind, so habe ich, in Rücksicht auf solche Anwendungen, eine bestimmte Reihe $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$, welche für $a = 1$ und $q = 1$ in die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ degenerirt, als Grundform angenommen. Durch diese Reihe und ihre erste Ableitung lassen sich alle Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken. Gleichungen, welche den Gauss'schen relationes inter functiones contiguas entsprechen, existiren für die Function $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$, so lange die Parameter allgemein bleiben, nicht.

Die Fortsetzung der vorliegenden Arbeit wird die Beziehungen eingehend entwickeln, welche zwischen der Gruppe und den zugehörigen Differentialgleichungen bestehen.

1.

Einführung der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. — Normalgleichung.

Die drei endlichen Verzweigungspunkte einer mehrwerthigen Function y der unabhängigen Veränderlichen x seien ξ_1, ξ_2, ξ_3. Es werde ferner angenommen der unendlich ferne Punkt ξ_4 sei gleichfalls eine Verzweigungsstelle. Zu dem Punkte ξ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ sollen zwei, linear unabhängige Fundamentalzweige y_{1i}, y_{2i} gehören. Nach einem vollständigen positiven Umlauf der unabhängigen Veränderlichen um den Punkt ξ_i gehe $y_{1\iota}$ in $\overset{i}{\overline{y}}_{1\iota}$ und $g_{2\iota}$ in $\overset{i}{\overline{y}}_{2\iota}$ $\left(\iota \gtrless i\right)$ über. Soll nun die Function y als eine zweifach linear verknüpfte charakterisirt sein, dann ist

$$(1) \qquad \overset{i}{\overline{y}}_{1\iota} = b_{1i}^{(1)} y_{1\iota} + b_{2i}^{(1)} y_{2\iota} \text{ und } \overset{i}{\overline{y}}_{2\iota} = b_{1i}^{(2)} y_{1\iota} + b_{2i}^{(2)} y_{2\iota}$$

wo die Coefficienten b gewisse constante Werthe haben. Da zwischen je drei Zweigen eine dreigliedrige homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen soll, so ist auch

$$(2) \qquad y_{1i} = \mathfrak{b}_{1i}^{(1)} y_{1\iota} + \mathfrak{b}_{2i}^{(1)} y_{2\iota} \text{ und } y_{2i} = \mathfrak{b}_{1i}^{(2)} y_{1\iota} + \mathfrak{b}_{2i}^{(2)} y_{2\iota}.$$

Sind nun $w_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ die Wurzeln der quadratischen Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} b_{1i}^{(1)} - w_i, & b_{1i}^{(2)} \\ b_{2i}^{(i)}, & b_{2i}^{(2)} - w_i \end{vmatrix} = 0,$$

dann ist

$$\overset{i}{\overline{y}}_{1i} = w_i^{(1)} \cdot y_{1i} \text{ und } \overset{i}{\overline{y}}_{2i} = w_i^{(2)} y_{2i},$$

wenn

$$w_i^{(1)} \lesseqgtr w_i^{(2)}.$$

Die Zweige y_{1i} und y_{2i} lassen sich also darstellen in der Form

$$y_{1i} = (x-\xi_i)^{\lambda_{1i}} \cdot \mathfrak{P}_1(x-\xi_i \text{ und } y_{2i} = (x-\xi_i)^{\lambda_{2i}} \cdot \mathfrak{P}_2(x-\xi_i),$$

wo

$$\lambda_{1i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log w_i^{(1)}, \quad \lambda_{2i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log w_i^{(1)}.$$

$\mathfrak{P}_1(x-\xi_i)$ un d$\mathfrak{P}_2(x-\xi_i)$ sind Potenzreihen des Elementes $x-\xi_i$, die für $x=\xi_i$ einen von Null verschiedenen Werth haben. Aus dieser Darstellung folgt, dass die Function y der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(5) \qquad (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2(x-\xi_3)^2 \cdot F_2[h] \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ (x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3) \cdot F_1[h+2] \cdot \frac{dy}{dx} + F_0[h+4] \cdot y = 0$$

genügt, wo zur Abkürzung $h = 2 - \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})$ gesetzt ist und wo F_0, F_1, F_2 ganze rationale Functionen von x bedeuten, deren Grade in den beigefügten Klammern angegeben sind. Für den besonderen Fall $h = 0$ nimmt die Gleichung (5) die bestimmte Fuchs'sche Form an:

$$\psi(x)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \psi(x)\, F_1[2] \cdot \frac{dy}{dx} + F_0[4] \cdot y = 0, \tag{6}$$

wo

$$\psi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)$$

und

$$\sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) = 2$$

ist.

Da sich nun im Allgemeinen eine Function y, für welche $h > 0$ ist, durch eine andere und deren Derivirte rational ausdrücken lässt*), für welche $h = 0$ ist, so genügt es die durch die Gleichung (6) definirten Functionen zu betrachten. Insoweit eine solche Function durch die Grössen λ_{1i}, λ_{2i} determinirt ist, bezeichnen wir dieselbe durch das Symbol

$$\left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \\ \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} & x \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} & \end{matrix} \right\}.$$

Alsdann ist

$$\left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \\ \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} & x \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} & \end{matrix} \right\} = (x - \xi_1)^{\lambda_{11}} (x - \xi_2)^{\lambda_{12}} (x - \xi_3)^{\lambda_{13}}$$

$$\cdot \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \\ 0\ , & 0\ , & 0\ , & \lambda_{14} + \sum_{(s)}^{3} \lambda_{1s} & x \\ \lambda_{21} - \lambda_{11}, & \lambda_{22} - \lambda_{12}, & \lambda_{23} - \lambda_{13}, & \lambda_{24} + \sum_{(s)}^{3} \lambda_{1s} & \end{matrix} \right\}. \tag{7}$$

Hieraus schliesst man, dass eine Function y, welche der Differentialgleichung (6) genügt, stets auf eine andere zurückgeführt werden kann, welche durch vier von einander unabhängige Verzweigungsindices bestimmt ist.

---

*) Man vergl. meine Abhandlung „Zur Theorie der mehrwerthigen, mehrfach linear verknüpften Functionen" in den Act. Mathem. t. XI, pag. 105.

Die „determinirenden“ Gleichungen für die Differentialgleichung (6) sind bekanntlich

$$\text{(a)} \qquad \lambda(\lambda-1)\psi'(\xi_i)^2+\lambda\psi'(\xi_i)\cdot F_1(\xi_i)+F_0(\xi_i)=0$$
$$i=1,2,3$$

und

$$\text{(b)} \qquad \lambda(\lambda+1)-\lambda\cdot\left[\frac{F_1(x)}{x^2}\right]_{x=\xi_4}+\left[\frac{F_0(x)}{x^4}\right]_{x=\xi_4}=0.$$

Aus Gleichung (a) folgt

$$F_1(\xi_i)=\psi'(\xi_i)[1-\lambda_{1i}-\lambda_{2i}] \quad \text{und} \quad F_1(\xi_i)=\psi'(\xi_i)^2\cdot\lambda_{1i}\lambda_{2i}$$

Ebenso erhält man auch Gleichung (b)

$$\left[\frac{F_1(x)}{x^2}\right]_{x=\xi_4}=1+\lambda_{14}+\lambda_{24} \quad \text{und} \quad \left[\frac{F_0(x)}{x^4}\right]_{x=\xi_4}=\lambda_{14}\lambda_{24}.$$

Es ist also

$$\text{(8)} \quad F_1(x)=(1-\lambda_{11}-\lambda_{21})(x-\xi_2)(x-\xi_3)+(1-\lambda_{12}-\lambda_{22})(x-\xi_1)(x-\xi_3)$$
$$+(1-\lambda_{13}-\lambda_{23})(x-\xi_1)(x-\xi_2).$$

Die Function $F_0(x)$ ist durch die vorstehenden Bedingungen noch nicht vollständig determinirt. Es sei nun q ein beliebiger Parameter, dann genügt die Function

$$\text{(9)} \quad \begin{aligned} F_0(x)= &-[\lambda_{11}(x-\xi_2)(x-\xi_3)+\lambda_{12}(x-\xi_1)(x-\xi_3) \\ &\qquad +\lambda_{13}(x-\xi_1)(x-\xi_2)]^2 \\ &+\lambda_{11}(x-\xi_2)^2(x-\xi_3)^2+\lambda_{12}(x-\xi_1)^2(x-\xi_3)^2 \\ &\qquad +\lambda_{13}(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 \\ &-[\lambda_{11}(x-\xi_2)(x-\xi_3)+\lambda_{12}(x-\xi_1)(x-\xi_3) \\ &\qquad +\lambda_{13}(x-\xi_1)(x-\xi_2)]\cdot F_1(x) \\ &+\left[\lambda_{14}+\sum_{(i)}^{3}\lambda_{1i}\right]\left[\lambda_{24}+\sum_{(i)}^{3}\lambda_{1i}\right]\psi(x)(x-q) \end{aligned}$$

wie man ohne Weiteres erkennt, allen geforderten Bedingungen und ist erst dann eindeutig bestimmt, wenn man der Grösse q einen vorgegebenen Werth beilegt. In Wirklichkeit kann man über die Grösse q nicht beliebig verfügen, wenn, wie hier, als primitives Definitionsmittel der Function y gewisse erzeugende Substitutionen gegeben sind. Ist jedoch y schlechthin als Integral der Differentialgleichung (6) definirt, dann ist q in der That ein willkürliches Datum. Legt man, unter diesem Gesichtspunkte der Grösse q nach einander verschiedene Werthe bei, während die übrigen Bestimmungselemente unverändert bleiben, dann ändert y im Allgemeinen seinen functionentheoretischen Charakter (man denke etwa an die sogenannten Lamé'schen Functionen). Aus diesem Grunde nenne ich die Grösse q den *charakteristischen* Parameter von y.

Die Gleichung (7) veranlasst uns in den Ausdrücken für $F_1(x)$ und $F_0(x)$ $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$ zu setzen. Dann nimmt die Gleichung (6) die einfachere Form an

$$\psi(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \chi(x) \cdot \frac{dy}{dx} + \lambda_{14}\lambda_{24}(x-q) \cdot y = 0, \tag{10}$$

wo

$$\chi(x) = (1-\lambda_{21})(x-\xi_2)(x-\xi_3) + (1-\lambda_{22})(x-\xi_1)(x-\xi_3) + (1-\lambda_{23})(x-\xi_1)(x-\xi_2) \tag{11}$$

zu setzen ist.

Macht man noch die Annahmen

$$\lambda_{14} = \alpha,\ \lambda_{24} = \beta,\ \lambda_{21} = 1-\gamma,\ \lambda_{22} = 1-\delta$$

und

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = a,$$

dann erhält man die Differentialgleichung für die Function y in der Normalform

$$x(x-1)(x-a)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x^2 - \{\alpha+\beta+a\gamma+(a-1)\delta+1\}x + a\gamma]\cdot\frac{dy}{dx} + \alpha\beta(x-q)\cdot y = 0. \tag{12}$$

Für $a = 1$ und $q = 1$ wird diese Gleichung durch $x - 1$ theilbar und degenerirt in die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Für $a = 0$, $q = 0$ dagegen wird sie durch x theilbar und man erhält die Gleichung

$$x(x-1)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - (\alpha+\beta-\delta+1)]\cdot\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\cdot y = 0,$$

welcher durch die Function

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\delta+1, x)$$

genügt wird.

Die Gleichung (12) kann demnach als eine Verallgemeinerung der Gauss'schen hypergeometrischen Differentialgleichung betrachtet werden.

2.

Die linearen Transformationen, welche drei feste Verzweigungspunkte ungeändert lassen.

Jede Function y, welche der Differentialgleichung (6) genügt, also die Verzweigungspunkte ξ_1, ξ_2, ξ_3, ∞ besitzt, kann durch eine bestimmte Anzahl linearer Transformationen des Argumentes x in eine solche mit den Verzweigungspunkten $0, 1, a, \infty$ übergeführt werden, wo die Grösse a je nach der gewählten Transformation eine bestimmte Function der Grössen ξ_2, ξ_2, ξ_3 ist. Den Verzweigungspunkt a wollen wir den *Modul* der transformirten Function nennen. Von besonderem Interesse sind diejenigen linearen Transformationen der Function

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & a & \infty & \\ \hline \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & x \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \end{array}\right\},$$

welche die Verzweigungspunkte auf alle möglichen Arten permutiren, wobei jedoch der Modul a' von dem ursprünglichen verschieden sein kann. Die 24 linearen Substitutionen, welche diese Aufgabe lösen, sind in der nachstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt.

x,	$1-x$,	$\frac{1}{x}$,	$\frac{x-1}{x}$,	$\frac{1}{1-x}$,	$\frac{x}{x-1}$,
$\frac{a}{x}$,	$\frac{x-a}{x}$,	$\frac{x}{a}$,	$\frac{a-x}{a}$,	$\frac{x}{x-a}$,	$\frac{a}{a-x}$,
$\frac{x-a}{x-1}$,	$\frac{a-1}{x-1}$,	$\frac{x-1}{x-a}$,	$\frac{1-a}{x-a}$,	$\frac{x-1}{a-1}$,	$\frac{x-a}{1-a}$,
$\frac{a(x-1)}{x-a}$,	$\frac{(1-a)x}{x-a}$,	$\frac{x-a}{a(x-1)}$,	$\frac{(a-1)x}{a(x-1)}$,	$\frac{x-a}{(1-a)x}$,	$\frac{a(x-1)}{(a-1)x}$.

Die Substitutionen der ersten Horizontalreihe sind identisch mit denjenigen, welche bei dem entsprechenden Problem in der Theorie der hypergeometrischen Functionen auftreten. Sie entstehen aus den drei erzeugenden Substitutionen:

$$y,\ 1-x,\ \frac{1}{x}.$$

Aus diesen in Verbindung mit den Substitutionen:

$$\frac{a}{x},\quad \frac{x-a}{x-1},\quad \frac{a(x-1)}{x-a}$$

lassen sich durch Combination alle übrigen erzeugen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & a & \infty & \\ \hline \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} & x \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} & \end{array}\right\} = \{0, 1, a, \infty \mid x\},$$

dann ergiebt die Anwendung der Substitutionen der obigen Tabelle das nachstehende System von äquivalenten Functionen

$$
\begin{array}{llll}
\left\{0, 1, a, \infty \,\middle|\, x \right\}, &
\left\{\infty, a, 1, 0 \,\middle|\, \frac{a}{x} \right\}, &
\left\{a, \infty, 0, 1 \,\middle|\, \frac{x-a}{x-1} \right\}, &
\left\{1, 0, \infty, a \,\middle|\, \frac{a(x-1)}{x-a} \right\}, \\[2ex]
\left\{1, 0, 1-a, \infty \,\middle|\, (1-x) \right\}, &
\left\{\infty, 1-a, 0, 1 \,\middle|\, \frac{x-a}{x} \right\}, &
\left\{1-a, \infty, 1, 0 \,\middle|\, \frac{a-1}{x-1} \right\}, &
\left\{0, 1, \infty, 1-a \,\middle|\, \frac{(1-a)x}{x-a} \right\}, \\[2ex]
\left\{\infty, 1, \frac{1}{a}, 0 \,\middle|\, \frac{1}{x} \right\}, &
\left\{0, \frac{1}{a}, \infty, 1 \,\middle|\, \frac{x}{a} \right\}, &
\left\{\frac{1}{a}, 0, \infty, 1 \,\middle|\, \frac{x-1}{x-a} \right\}, &
\left\{1, \infty, 0, \frac{1}{a} \,\middle|\, \frac{x-a}{a(x-1)} \right\}, \\[2ex]
\left\{\infty, 0, \frac{a-1}{a}, 1 \,\middle|\, \frac{x-1}{x} \right\}, &
\left\{1, \frac{a-1}{a}, 0, \infty \,\middle|\, \frac{a-x}{a} \right\}, &
\left\{\frac{a-1}{a}, 1, \infty, 0 \,\middle|\, \frac{1-a}{x-a} \right\}, &
\left\{0, \infty, 1, \frac{a-1}{a} \,\middle|\, \frac{(a-1)x}{a(x-1)} \right\}, \\[2ex]
\left\{1, \infty, \frac{1}{1-a}, 0 \,\middle|\, \frac{1}{1-x} \right\}, &
\left\{0, \frac{1}{1-a}, \infty, 1 \,\middle|\, \frac{x}{x-a} \right\}, &
\left\{\frac{1}{1-a}, 0, 1, \infty \,\middle|\, \frac{x-1}{a-1} \right\}, &
\left\{\infty, 1, 0, \frac{1}{1-a} \,\middle|\, \frac{x-a}{(1-a)x} \right\}, \\[2ex]
\left\{0, \infty, \frac{a}{a-1}, 1 \,\middle|\, \frac{x}{x-1} \right\}, &
\left\{1, \frac{a}{a-1}, \infty, 0 \,\middle|\, \frac{a}{a-x} \right\}, &
\left\{\frac{a}{a-1}, 1, 0, \infty \,\middle|\, \frac{x-a}{a-1} \right\}, &
\left\{\infty, 0, 1, \frac{a}{a-1} \,\middle|\, \frac{a(x-1)}{(a-1)x} \right\}.
\end{array}
$$

Je *vier* in einer Horizontalreihe stehende Functionen haben also denselben Modul. Legt man jedoch dem Modul einen der vier speciellen Werthe

$$-1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}),\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}),$$

bei, dann giebt es in jedem Falle *acht* resp. *zwölf* lineare Transformationen, welche denselben ungeändert lassen. Solche Functionen nehmen also eine Sonderstellung in der allgemeinen Theorie ein.

Die um die Punkte 0, 1 mit dem Radius 1 beschriebenen Kreise, dann die Axe der reellen Zahlen und eine Gerade durch $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ und $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$ theilen die Ebene in zwölf Gebiete*); irgend zwei benachbarte derselben mögen zu einem „Fundamentalgebiet" zusammengefasst werden. Man überzeugt sich dann leicht von der Richtigkeit des Satzes:**)

Die Variabilität des Moduls einer zweifach linear verknüpften Function mit vier Verzweigungspunkten kann durch geeignete lineare Transformationen des Argumentes auf die Fläche irgend eines der Fundamentalgebiete beschränkt werden.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten wie sich der charakteristische Parameter q bei den vorstehenden linearen Transformationen verhält. Dieser Punkt erledigt sich unmittelbar durch einen Blick auf die Gleichung (9). Man erkennt nämlich ohne Weiteres aus der Form der Function $F_0(x)$, dass der charakteristische Parameter q ebenfalls lineare Transformationen erleidet.

3.

Convergenzbedingungen der Reihe $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$. — Darstellung des Integrals der Normalgleichung durch diese Reihe.

Um die Existenz der Integrale der Differentialgleichung (12) zu erweisen, könnte man die Methode des Herrn Fuchs [Journ. f. Mathem. t. 66, pag. 148] oder diejenige des Herrn Frobenius [Journ. f. Mathem. t. 76, pag. 214] auf den gegenwärtigen speciellen Fall anwenden. Dies soll jedoch hier nicht geschehen, da die eigenthümliche Natur dieser Differentialgleichung ein weit kürzeres Beweisverfahren erlaubt, welches noch den besonderen Vortheil bietet, dass sich auch die Existenzbedingungen ihrer Integrale auf den Convergenzkreisen unmittelbar ergeben.***)

*) Man vergl. etwa die Figuren bei Klein, Math. Ann. Bd. XIV, pag. 115.

**) Die Formulirung des obigen Satzes verdanke ich der Güte des Herrn H. Burkhardt.

***) Nachträglich bin ich auf die Abhandlung des Herrn Thomé „Ueber Convergenz und Divergenz der Potenzreihen auf dem Convergenzkreise", im

Versucht man der Gleichung (12) durch eine Reihe von der Form

$$y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \cdot x^\nu$$

zu genügen, dann erhält man für die Coefficienten g_ν die dreigliedrige recurrente Relation

(13) $$f_0(\nu) \cdot f_1(\nu-1) \cdot g_{\nu-1} + f_2(\nu-2) \cdot g_{\nu-2} = 0.$$

Die Factoren f_0, f_1, f_2 bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\nu(\nu-1)(x-1)(x-a) + \chi(x) + x(x-q)\alpha\beta = f(x, \nu).$$
$$f(x, \nu) = f_0(\nu) + f_1(\nu) \cdot x + f_2(\nu) \cdot x^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_1(\nu) = -\frac{f_1(\nu-1)}{f_0(\nu)}, \quad \varphi_2(\nu) = \frac{f_2(\nu-2)}{f_0(\nu)}, \quad v_\nu = \frac{g_\nu}{g_{\nu-1}},$$

dann ist also

(14) $$v_\nu = \varphi_1(\nu) + \frac{\varphi_2(\nu)}{v_{\nu-1}}.$$

Aus dieser Relation erkennt man, dass v_ν auf die Form

$$v_\nu = C_0 + \frac{C_1}{\nu} + \frac{C_2}{\nu^2} + \cdots$$

gebracht werden kann. Nun ist aber auch

$$\varphi_1(\nu) = h_0 + \frac{h_1}{\nu} + \frac{h_2}{\nu^2} + \cdots,$$

$$\varphi_2(\nu) = k_0 + \frac{k_1}{\nu} + \frac{k_2}{\nu^2} + \cdots,$$

wo

$$h_0 = 1 + \frac{1}{a}, \; h_1 = \frac{1}{a}\{\alpha + \beta - \gamma + (a-1)\delta - (2a+1)\}, \cdots$$

$$k_0 = \frac{1}{a}, \; k_1 = \frac{1}{a}\{\alpha + \beta - \gamma - 3\}, \cdots$$

Aus Gleichung (14) folgt

$$C_0 C_0 - h_0 C_0 + k_0 = 0, \quad 2C_0 C_1 - h_0 C_1 + k_1 = 0, \cdots$$

d. h.

$$C_0 = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{a}, \end{cases} \quad C_1 = \delta - 2 \quad \text{oder} \quad C_1 = \frac{1}{a}(\alpha+\beta-\gamma-\delta-1).$$

---

100. Bd. des *Journals f. Mathem.* aufmerksam geworden. Da jedoch die Zurückführung der Convergenzbetrachtungen der Integrale regulärer linearer Differentialgleichungen auf das von Herrn Weierstrass verallgemeinerte Gauss'sche Criterium einen wesentlich elementareren Charakter hat, als die von Herrn Thomé benutzten Hülfsmittel, so behalte ich die folgende Darstellung bei und bemerke noch, dass dieselbe von der besonderen Annahme $p = 2$, $i = 2$ unabhängig ist.

Es ist also

$$\lim_{\nu=\infty}(v_\nu)=1 \quad \text{oder} \quad \lim_{\nu=\infty}(v_\nu)=\frac{1}{a}\cdot$$

Mithin convergirt die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \cdot x^\nu$ für $|x|<1$ oder $|x|<|a|$. Da der Convergenzbereich keinen Verzweigungspunkt enthalten darf, so findet die Convergenz statt für $|x|<1$ wenn $|a|>1$ und für $|x|<|a|$ wenn $|a|<1$ ist. Wir setzen jetzt $g_0=1$ und

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} g_\nu \cdot x^\nu = F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x),$$

dann hängt die Convergenz der Reihe $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ auf den Convergenzkreisen von den Werthen des Coefficienten C_1 ab. Nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass („Abhandlungen aus der Functionenlehre" pag. 220) ist also $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ absolut convergent

für $|a|>1$ und $(x)=1$, wenn *reller Bestandtheil* $(\delta-2)<-1$

und

für $|a|<1$ und $(x)=a$, wenn *reeller Bestandtheil* $(\alpha+\beta-\gamma-\delta-1)<-1$

ist.

Ferner hat $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, a)$ einen bestimmten Werth, wenn reeller Bestandtheil von $(\delta-2)<0$ und $|a|>1$ ist und ebenso $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ 1)$, wenn reeller Bestandtheil von $(\alpha+\beta-\gamma-\delta-1)<0$, vorausgesetzt dass $|a|<1$ ist.

Die Integrale der Differentialgleichung (12) lassen sich in mannigfacher Weise durch die Reihe $Fa, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ ausdrücken. Hier sollen nur diejenigen angeführt werden, die in den Anwendungen von Vortheil sein können. Der Kürze wegen ist der charakteristische Parameter ausgelassen. [Man vergl. die Bemerkung am Ende von Nr. 2.]

$$F[a;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x],$$

$$(x-1)^\alpha F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha, \alpha-\delta+1, \gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{x-1}\right],$$

$$(x-1)^\alpha F\left[\frac{1}{a};\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{a}\right],$$

$$(x-1)^\alpha F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{x-a}\right],$$

$$(x-a)^\alpha F\left[1-a;\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \gamma, \delta;\ \frac{(1-a)\,x}{x-a}\right],$$

$$(x-a)^\alpha F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha, \alpha-\delta+1, \gamma, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{(a-1)x}{a(x-1)}\right];$$

$$x^{1-\gamma} F[a;\ \alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \gamma, \delta;\ x],$$
$$x^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha-\gamma+1, \alpha-\gamma-\delta+2, 2-\gamma, \alpha-\gamma+1;\ \frac{x}{x-1}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha} F\left[\frac{1}{a};\ \alpha-\gamma+1, \delta-\beta+1, 2-\gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{a}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha} F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha-\gamma+1, \delta-\beta+1, 2-\gamma, \alpha-\beta+1;\ \frac{x}{x-a}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-a)^{\alpha} F\left[1-a;\ \alpha-\gamma+1, \delta-\beta+1;\ 2-\gamma, \delta;\ \frac{(1-a)x}{x-a}\right],$$
$$x^{1-\gamma}(x-a)^{\alpha} F\left[\frac{a-1}{a};\alpha-\gamma+1, \alpha-\gamma-\delta-2, 2-\gamma, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\frac{(a-1)x}{a(x-1)}\right];$$

$$F[1-a;\ \alpha, \beta, \delta, \gamma;\ 1-x],$$
$$(x-1)^{\alpha} F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha, \alpha-\gamma+1, \delta, \alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x}\right],$$
$$(x-1)^{\alpha} F\left[\frac{1}{a};\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \delta, \alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x-a}\right],$$
$$F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha, \beta, \delta, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{x-1}{a-1}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha} F\left[a;\ \alpha, \gamma+\delta-\beta, \delta, \gamma;\ \frac{a(x-1)}{x-a}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha, \alpha-\gamma+1, \delta, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a(x-1)}{(a-1)x}\right];$$

$$(x-1)^{1-\gamma} F[1-a;\ \alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \delta, 2-\gamma;\ 1-x],$$
$$(x-1)^{\beta} F\left[\frac{a-1}{a};\ \beta, \beta-\gamma+1, \delta, \beta-\alpha+1;\ \frac{x-1}{x}\right],$$
$$(x-1)^{\beta} F\left[\frac{1}{a};\ \beta, \gamma+\delta-\alpha, \delta, \beta-\alpha+1;\ \frac{x-1}{x-a}\right],$$
$$(x-1)^{\gamma+\gamma-\alpha-\beta} F\left[\frac{1}{1-a};\gamma+\delta-\beta, \gamma+\delta-\alpha, \delta, \gamma+\delta-\alpha-\beta+1;\ \frac{x-1}{x-a}\right],$$
$$(x-1)^{1-\delta}(x-a)^{\alpha} F\left[a;\ \alpha-\delta+1, \gamma-\beta+1, \delta, 2-\gamma;\ \frac{a(x-1)}{x-a}\right],$$
$$(x-1)^{\gamma+\delta-\alpha-\beta}(x-a)^{\alpha} F\left[\frac{a}{a-1};\gamma+\delta-\beta, \delta-\beta+1, \delta, \gamma+\delta-\alpha-\beta+1;\ \frac{a(x-1)}{(a-1)x}\right];$$

$$(x-1)^{\alpha} F\left[1-a;\ \alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x}\right],$$
$$F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \gamma;\ \frac{a-x}{a}\right],$$
$$(x-1)^{\alpha} F\left[a;\ \alpha, \alpha-\delta+1, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x-1}\right],$$
$$F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \delta;\ \frac{x-a}{a-1}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha} F\left[\frac{1}{a};\ \alpha, \beta-\delta+1, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \gamma;\ \frac{x-a}{a(x-1)}\right],$$
$$(x-a)^{\alpha} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \delta;\ \frac{a(x-a)}{(a-1)x}\right];$$

$$(x-a)^{1-\delta}(x-1)^{\alpha} F\left[1-a;\ \alpha-\delta+1, \alpha-\gamma-\delta+2, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x}\right],$$

$$(x-a)^{1-\gamma} F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, 2-\gamma;\ \frac{a-x}{a}\right],$$

$$(x-a)^{1-\gamma}(x-1)^{\alpha} F\left[a;\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\gamma-\delta+2,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \alpha-\beta+1;\ \frac{x-a}{x-1}\right],$$

$$(x-a)^{1-\gamma} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \delta;\ \frac{x-a}{a-1}\right],$$

$$(x-a)^{\beta} F\left[\frac{1}{a};\ \beta,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\ \gamma;\ \frac{x-a}{a(x-1)}\right],$$

$$(x-a)^{\beta} F\left[\frac{a}{a-1};\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a(x-a)}{(a-1)x}\right];$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{1}{a};\ \alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \delta;\ \frac{1}{x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{1}{1-a};\ \alpha,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha-\beta+1,\ \gamma;\ \frac{1}{1-x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[a;\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a}{x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{a}{a-1};\ \alpha,\ \gamma+\delta-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \gamma;\ \frac{a}{a-x}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[1-a;\ \alpha,\ \alpha-\delta+1,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a-1}{x-1}\right],$$

$$x^{\alpha} F\left[\frac{a-1}{a};\ \alpha,\ \gamma+\delta-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \delta;\ \frac{1-a}{x-a}\right];$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{1}{a};\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \delta;\ \frac{1}{x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{1}{1-a};\ \beta,\ \beta-\delta+1,\ \beta-\alpha+1.\ \gamma;\ \frac{1}{1-x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[a;\ \beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a}{x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{a}{a-1};\ \beta,\ \gamma+\delta-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \gamma;\ \frac{a}{a-x}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[1-a;\ \beta,\ \beta-\delta+1,\ \beta-a+1,\ \alpha+\beta-\gamma-\delta+1;\ \frac{a-1}{x-1}\right],$$

$$x^{\beta} F\left[\frac{a-1}{a};\ \beta,\ \gamma+\delta-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \delta;\ \frac{1-a}{x-a}\right].$$

Aus den vorstehenden Integralen lässt sich durch passende Combination, in mannichfacher Weise, eine allgemeine Lösung der Gleichung (12) herstellen, welche für einen gewissen Bereich des Argumentgebietes gültig ist.

4.

Die Relationen zwischen „gleichgruppigen" Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten.

Wir wenden uns jetzt zu demjenigen Theil der Theorie unserer Function, welcher den Gauss'schen *Relationes inter functiones contiguas* entspricht. Zwischen den drei Functionen

$$F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x), \quad F(a, q'; \alpha', \beta', \gamma', \delta'; x),$$
$$F(a, q''; \alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''; x),$$

für welche die Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\alpha - \alpha''$, $\beta - \beta'$, ..., $\delta - \delta''$ ganzen Zahlen oder theilweise der Null gleich sind, besteht eine homogene lineare Relation mit rationalen Coefficienten wenn die Substitutionen der zugehörigen Differentialgleichungen übereinstimmen. Die folgende Methode gestattet es die letztere, nothwendige und hinreichende Bedingung zum analytischen Ausdruck zu bringen, ohne auf die Substitutionen selbst Bezug zu nehmen. Statt der F-Functionen wollen wir die allgemeineren Functionen betrachten, welche der Differentialgleichung (5) genügen. Die Indicescharakteristik eines Integrals dieser Gleichung sei

$$\begin{array}{cccc} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda'_{11}, & \lambda'_{12}, & \lambda'_{13}, & \lambda'_{14} \\ \lambda'_{21}, & \lambda'_{22}, & \lambda'_{23}, & \lambda'_{24} \end{array}\right\},$$

so dass also

$$h = 2 - \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda'_{1i} + \lambda'_{2i})$$

ist.

Eine Lösung der Gleichung (6) habe die Charakteristik

$$\begin{array}{cccc} \underline{\xi_1} & \underline{\xi_2} & \underline{\xi_3} & \underline{\xi_4} \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24} \end{array}\right\}$$

wo die Bedingung

$$0 = 2 - \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i})$$

erfüllt sein muss.

Man bilde nun das Schema der Indicesdifferenzen:

$$\left\{\begin{array}{cccc} \lambda'_{11} - \lambda_{11}, & \lambda'_{12} - \lambda_{12}, & \lambda'_{13} - \lambda_{13}, & \lambda'_{14} - \lambda_{14} \\ \lambda'_{21} - \lambda_{21}, & \lambda'_{22} - \lambda_{22}, & \lambda'_{23} - \lambda_{23}, & \lambda'_{24} - \lambda_{24} \end{array}\right\},$$

Damit die Gleichungen (5) und (6) übereinstimmende Substitutionen besitzen, müssen diese Indicesdifferenzen *ganze* Zahlen sein. Bezeichnet man jetzt mit $\mathfrak{d}_i$ diejenige Differenz in der i^{ten} Verticalreihe des vorstehenden Schemas, welche von der anderen um eine positive Zahl (incl. Null) übertroffen wird, dann ist [cf. *Acta Math.* t. 11, pag. 105]

$$y = (x-\xi_1)^{\mathfrak{d}_1}(x-\xi_2)^{\mathfrak{d}_2}(x-\xi_3)^{\mathfrak{d}_3}\left\{P_0[h-D]\cdot y_0 + \psi\cdot P_1[h-D-2]\cdot\frac{dy_0}{dx}\right\}$$

wo y und y_0 die Lösungen der Gleichungen (5) und (6) bedeuten und

$$D = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3 + \mathfrak{d}_4, \quad \psi = (x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)$$

gesetzt ist. Die Grade der ganzen rationalen Functionen P_0 und P_1 sind in den beigefügten Klammern angedeutet. Wir setzen ferner

$$y = (x-\xi_1)^{\mathfrak{d}_1}(x-\xi_2)^{\mathfrak{d}_2}(x-\xi_3)^{\mathfrak{d}_3}\cdot z.$$

In Folge der Gleichung (7) genügt die Function z einer Differentialgleichung von der Form

$$\text{(5a)} \qquad \psi^2\cdot G_2[h]\frac{d^2z}{dx^2} + \psi G_1[h+2]\cdot\frac{dz}{dx} + G_0[h+4]\cdot z = 0.$$

Aus der Gleichung

$$z = P_0\cdot y_0 + \psi P_1\cdot\frac{dy_0}{dx}$$

entwickele man $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ indem man gleichzeitig $\frac{d^2y}{dx^2}$ mittelst der Gleichung (6) eliminirt. Die so erhaltenen Werthe von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ führe man in die Gleichung (5a) ein. Hierdurch nimmt dieselbe die Form an

$$\psi H_1[2h-D+2]\frac{dy_0}{dx} + H_2[2h-D+4]\cdot y_0 = 0.$$

Setzt man aber voraus, die Gleichung (6) sei irreductibel, dann müssen die Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad H_0 = 0, \; H_1 = 0$$

für jeden Werth von x befriedigt sein. Hierdurch sind $2(2h-D)+8$ Bedingungen gegeben. Sind diese $2(2h-D)+8$ Gleichungen von einander unabhängig, dann genügen sie zur Bestimmung von ebensovielen unbekannten Grössen. Dies ist in der That der Fall, wenn nicht ganz besondere Bedingungen zwischen den Verzweigungsindices der Function y_0 vorausgesetzt werden. Als Unbekannte wollen wir zunächst ansehen:

erstens $2(h-D)-1$ Coefficienten in den Functionen P_0 und P_1,
zweiten $2h+8$ Coefficienten in den Functionen G_0 und G_1,
drittens die h Wurzeln der Gleichung $G_2[h]=0$, welche im Folgenden die *individuellen* Parameter der Differentialgleichung (5a) genannt werden mögen.

Damit nun diese Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der in Rede stehenden Gleichungen sei, muss die Bedingung stattfinden

$$5h - 2D + 7 = 4h - 2D + 8$$

d. h. es muss $h = 1$ sein.

Betrachten wir jedoch als Unbekannte

erstens $2(h-D) - 1$ Coefficienten in den Functionen P_0 und P_1,

zweitens die 8 Coefficienten in den Functionen F_0 und F_1

drittens $2h$ der $2h+1$ Coefficienten in den Functionen G_0 und G_1, welche durch die Indices λ'_{pi} $(p = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, 4)$ *nicht* bestimmt sind,

dann ist die Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der Gleichungen, welche aus (A) fliessen, welchen Werth auch h besitzen mag. Diese Gleichungen sind im Allgemeinen von einander unabhängig.

Setzen wir endlich $h = 0$, dann wird

$$\sum_{i=1}^{i=4} (\lambda'_{1i} + \lambda'_{2i}) = \sum_{i=1}^{i=4} (\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) = 2.$$

Als Unbekannte sind anzusehen:

erstens $-2D - 1$ Coefficienten in den Functionen P_0 und P_1,

zweitens 8 Coefficienten in den Functionen G_0 und G_1,

drittens der *charakteristische* Parameter in der Function F_0.

$-2D + 8$ Unbekannte werden durch ebensoviele Gleichungen bestimmt, welche im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Ein Beispiel diene zur Erläuterung. In dem speciellen Falle der Reduction von $F(a, q'; \alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1; x)$ auf $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ und deren Derivirte setze man (da $\mathfrak{d}_1 = -1$, $\mathfrak{d}_2 = -1$, $\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{d}_4 = 0$)

$$z = \varphi \cdot F(q; x) + \psi \cdot \frac{dF(q; x)}{dx}; \quad \varphi = p_0 + p_1 x + p_2 x^2.$$

Die Function z genügt einer Gleichung von der Form

$$x(x-1)\psi \frac{d^2 z}{dx^2} + x(x-1)\Theta \cdot \frac{dz}{dx} + \sigma \cdot z = 0.$$

Mittelst der Gleichungen (8) und (9) findet man

$$\Theta = (\gamma - 1)(x-1)(x-a) + (\delta - 1)x(x-a)(\alpha + \beta - \gamma - \delta - 1)x(x-1),$$
$$\sigma = -2\psi - (2x-1)\Theta + \alpha\beta\, x(x-1)(x-q').$$

Die Function $y_0 = F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ genügt der Gleichung (12), welche wir in die Form bringen

$$\psi \frac{d^2 y_0}{dx^2} + \chi \cdot \frac{dy_0}{dx} + \varpi \cdot y_0 = 0,$$

wo also

$$\chi = a\gamma - \{\alpha+\beta+a\gamma+(a-1)\delta+1\}\,x+(\alpha+\beta+1)x^2$$

und

$$\varpi = \alpha\beta(x-q)$$

ist. Die Gleichungen (A) heissen jetzt

$$[\sigma - x(x-1)\varpi]\cdot\varphi + x(x-1)[\Theta\varphi' + \psi\varphi''] - x(x-1)[(\psi\varpi)' + (\Theta-\chi)\varpi] = 0,$$
$$(\Theta-\chi)\varphi + 2\psi\varphi' + (\Theta-\chi)(\psi'-\chi) + \psi[\psi''-\chi'-\varpi] + (x-a)\sigma = 0.$$

Diese Gleichungen müssen nach Potenzen von x geordnet werden. Alsdann sind alle Coefficienten der Null gleichzusetzen. Auf diese Weise erhält man die folgenden Relationen*)

1. $\bar{\varkappa}_0 p_0 = 0,$
2. $\bar{\varkappa}_0 p_0 + (\bar{\varkappa}_0 - g_0')p_1 + \bar{k}_0 = 0,$
3. $\bar{\varkappa}_2 p_0 + (\bar{\varkappa}_1 + g_0' - g_1')p_1 + (\bar{\varkappa}_0 - 2g_0' - 2a)p_2 + \bar{k}_1 - \bar{k}_0 = 0,$
4. $\bar{\varkappa}_3 p_0 + (\bar{\varkappa}_2 + g_1' - g_2')p_1 + (\bar{\varkappa}_1 + 2g_0' - 2g_1' + 4a + 2)p_2 + \bar{k}_2 - \bar{k}_1 = 0,$
5. $(\bar{\varkappa}_3 + g_2')p_1 + (\bar{\varkappa}_2 + 2g_1' - 2g_2' - 2a - 4)p_2 + \bar{k}_3 - \bar{k}_2 = 0,$
6. $(\bar{\varkappa}_3 + 2g_2' + 2)p_2 - \bar{k}_3 = 0,$
7. $\bar{g}_0 p_0 + \bar{g}_0 h_0 - a k_0' = 0,$
8. $\bar{g}_1 p_0 + (\bar{g}_0 + 2a)p_1 + \bar{g}_0 h_1 + \bar{g}_1 h_0 + a\varkappa_0 + k_0' - a k_1' = 0,$
9. $\bar{g}_2 p_0 + (\bar{g}_1 - 2a - 2)p_1 + (\bar{g}_0 + 4a)p_2 + \bar{g}_0 h_2 + \bar{g}_1 h_1 + \bar{g}_2 h_0 + a\varkappa_1 - (a+1)\varkappa_0 + k_1' - a k_2' = 0,$
10. $(\bar{g}_2 + 2)p_1 + (\bar{g}_1 - 4a - 4)p_2 + \bar{g}_1 h_2 + \bar{g}_2 h_1 + \varkappa_0 - (a+1)\varkappa_1 + k_2' - a k_3' = 0,$
11. $(\bar{g}_2 + 4)p_2 + \bar{g}_2 h_2 + \varkappa_1 + k_3' = 0.$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\chi = g_0 + g_1 x + g_2 x^2, \quad \Theta = g_0' + g_1' x + g_2' x^2,$$
$$\Theta - \chi = \bar{g}_0 + \bar{g}_1 x + \bar{g}_2 x^2, \quad \psi' - \chi = h_0 + h_1 x + h_2 x^2,$$
$$\varpi = k_0 + k_1 x, \quad \sigma = k_0' + k_1' x + k_2' x^2 + k_3' x^3,$$
$$(\psi\varpi)' + (\Theta-\chi)\varpi = \bar{k}_0 + \bar{k}_1 x + \bar{k}_2 x^2 + \bar{k}_3 x^3,$$
$$\psi'' - \chi' - \omega = \varkappa_0 + \varkappa_1 x, \quad \sigma - x(x-1)\varpi = \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1 x + \bar{\varkappa}_2 x^2 + \bar{\varkappa}_3 x^3.$$

---

*) Die Anzahl dieser Gleichungen ist hier 11 und nicht wie im allgemeinen Falle 12, weil die Gleichung (6) hier durch ψ theilbar ist und die Gleichung (5) durch $x-a$.

Mithin ist

$$\bar g_0 = -a,\ \bar g_1 = 2a+3,\ \bar g_2 = -4,\ h_0 = a - g_0,$$
$$h_1 = -2(a+1) - g_1,\quad h_2 = 3 - g_2,$$
$$k_0' = g_0',\ k_1' = \alpha\beta q' + g_1' - 2g_0' - 2a,\ k_2' = -\alpha\beta q' + g_2' - 2g_1' - k_1 + 2(a+1),$$
$$k_3' = -2g_2' + k_1 - 2,\ \varkappa_0 = -2(a+1) - g_1 - k_0,\ \varkappa_1 = 6 - 2g_2 - k_1,$$
$$\bar k_0 = 0,\ \bar k_1 = [\bar g_1 - 2(a+1)]k_0 + (\bar g_0 + 2a)k_1,$$
$$\bar k_2 = (\bar g_2 + 3)k_0 + (g_1 - 3a - 3)k_1,\ \bar k_3 = 0,$$
$$\bar\varkappa_0 = k_0',\ \bar\varkappa_1 = k_0 + k_1',\ \bar\varkappa_2 = k_1 - k_0 + k_2',\ \bar\varkappa_3 = k_3' - k_1.$$

Da $\bar\varkappa_0$ von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung 1. $p_0 = 0$. Gleichung 2. ist identisch Null. Ebenso die Gleichung 6., 7. und 11. Aus Gleichung 8. folgt

$$p_1 = \alpha\beta(q' - q) + g_1 + 2\gamma + 1.$$

Die Gleichungen 3. und 5. lassen sich auf die Form bringen

$$[\alpha\beta(q' - q) - g_0' - 2a]p_1 - (g_0' + 2a)p_2 + k_0 + ak_1 = 0,$$
$$-(g_1' + 2)p_1 - [\alpha\beta(q' - q) + g_2' + g_2' + 2]p_2 + k_0 + ak_1 = 0.$$

Folglich ist

$$p_1 = -p_2 = \frac{k_0 + ak_1}{\alpha\beta(q' - q)} = \frac{a - q}{q' - q}.$$

Die Gleichsetzung der beiden erhaltenen Ausdrücke für p_1 liefert die Relation

$$\text{(a)}\qquad \alpha\beta(q' - q)^2 + (g_1 + 2\gamma + 1)(q' - q) + q - a = 0.$$

Die Gleichungen 9. und 10. geben aber

$$3ap_2 = (a+2)\alpha\beta(q - q') + 2ag_2 - ag_1 - 2g_0 - 2\gamma - 3a,$$
$$(2a+1)p_2 = 3\alpha\beta(q - q') + 2ag_2 - g_1 - 4\gamma - (2a+1).$$

Durch Elimination von p_2 folgt hieraus unter Annahme $a \gtrless 1$

$$\text{(b)}\qquad \alpha\beta(q' - q) - a\delta - (a-1)\gamma = 0.$$

Damit die Gleichungen (a) und (b) nebeneinander bestehen können, muss also sein

$$\text{(c)}\qquad q = a + \frac{(\gamma + \delta - \alpha - \beta)[(a-1)\gamma + a\delta]}{\alpha\beta}.$$

Folglich wird

$$\text{(d)}\qquad q' = a + \frac{(\gamma + \delta - \alpha - \beta + 1)[(a-1)\gamma + a\delta]}{\alpha\beta}$$

und

$$p_1 = \gamma + \delta - \alpha - \beta.$$

Die Reductionsgleichung nimmt jetzt die Form an

$$[F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x) = F(q; x) \text{ gesetzt}]$$

$$m \cdot F(a, q';\ \alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1;\ x) = (\alpha + \beta - \gamma - \delta)\, F(q; x) + (x - a) \frac{dF(q; x)}{dx},$$

wo m eine Constante bedeutet. Setzt man $x = 0$, dann geht die vorstehende Gleichung über in

$$m = (\alpha + \beta - \gamma - \delta) - \frac{\alpha\beta}{\gamma} q.$$

Durch Einführung dieses Werthes erhält man

$$[\gamma(\alpha + \beta - \gamma - \delta) - \alpha\beta q]\, F(a, q';\ \alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1;\ x)$$
$$= \gamma(\alpha + \beta - \gamma - \delta)\, F(q; x) + \gamma(x - a) \frac{dF(q; x)}{dx}.$$

In dieser Relation sind für q und q' ihre Werthe aus den Gleichungen (c) und (d) zu setzen. Ferner ist die Bedingung $a \gtrless 1$ als eine nothwendige anzusehen. Nur in dem speciellen Falle $q = 1$, $\delta = 0$ darf $a = 1$ werden, wie man aus Gleichung (e) erkennt. Alsdann geht die vorstehende Relation über in die bekannte Gauss'sche Gleichung zwischen hypergeometrischen Reihen:

$$(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\, F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x)$$
$$= \gamma(\gamma - \alpha - \beta)\, F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \alpha\beta(x - 1)\, F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x)$$

Das vorstehende Beispiel mag genügen um die Behauptung zu rechtfertigen die aus den Relationen (A) fliessenden Gleichungen seien im Allgemeinen von einander unabhängig. Die unter dieser Bedingung oben erhaltenen Resultate lassen sich in den folgenden Sätzen zusammenfassen.

Soll sich die Function $F(a, q';\ \alpha', \beta', \gamma', \delta';\ x)$ durch die Function $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ und deren erste Derivirte rational ausdrücken lassen, so genügt es nicht, dass die Differenzen $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$, $\delta' - \delta$ ganze Zahlen sind, sondern die charakteristischen Parameter q und q' müssen bestimmte Functionen von $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sein.

Dagegen lässt sich die Riemann'sche Function, welche einer Differentialgleichung von der Form

$$(x - \varrho)(x - 1)(x - a)x \frac{d^2y}{dx^2} + G_1[3] \frac{dy}{dx} + G_2[5] \cdot y = 0$$

genügt, im Allgemeinen durch die Function $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ und deren erste Derivirte rational ausdrücken, wenn der individuelle Parameter ϱ, der nicht mit einem Verzweigungspunkt *zusammenfallen darf, passend bestimmt wird. Der charakteristische Parameter q kann hierbei willkürlich angenommen werden.*

Eine Riemann'sche Function zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten und einer beliebigen Anzahl beliebiger individueller Parameter lässt sich rational durch die Function $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ *und deren Derivirte ausdrücken, wobei die Grösse q festgelegt wird.*

Will man also für die hier untersuchten Functionen Gleichungen aufstellen, welche den Gauss'schen relationes inter functiones contiguas entsprechen, dann muss man wenigstens zweien derselben je *einen* individuellen Parameter zuertheilen, *dessen Werth nicht willkürlich angenommen werden kann.* Andernfalls müssen die Verzweigungsexponenten bestimmten Bedingungen genügen. Hierdurch unterscheiden sich diese Functionen wesentlich von den hypergeometrischen. Dieser Unterschied lässt sich auch so ausdrücken:

Alle Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit drei Verzweigungspunkten lassen sich durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellen. Die Functionen derselben Ordnung mit zwei Verzweigungspunkten lassen sich durch die Function* $F(a, q;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ x)$ *und deren erste Derivirte ausdrücken.*

Frankfurt a./M., 12. Mai 1888.