Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π.*)

Von

DAVID HILBERT in Königsberg i. Pr.

Man nehme an, die Zahl e genüge der Gleichung n^{ten} Grades
$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0,$$
deren Coefficienten $a, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen sind. Wird die linke Seite dieser Gleichung mit dem Integral
$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [(z-1)\,(z-2)\cdots(z-n)]^{\varrho+1}\, e^{-z} dz$$
multiplicirt, wo ϱ eine ganze positive Zahl bedeutet, so entsteht der Ausdruck
$$a\int_0^\infty + a_1 e\int_0^\infty + a_2 e^2\int_0^\infty + \cdots + a_n e^n\int_0^\infty$$
und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:
$$\mathsf{P}_1 = a\int_0^\infty + a_1 e\int_1^\infty + a_2 e^2\int_2^\infty + \cdots + a_n e^n\int_n^\infty,$$
$$\mathsf{P}_2 = \qquad a_1 e\int_0^1 + a_2 e^2\int_0^2 + \cdots + a_n e^n\int_0^n.$$

Die Formel
$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-z} dz = \varrho!$$
zeigt, dass das Integral $\int_0^\infty$ eine ganze rationale durch $\varrho!$ theilbare Zahl ist und ebenso leicht folgt, wenn man bezüglich die Substitutionen $z = z' + 1,\ z = z' + 2, \ldots, z = z' + n$ anwendet, dass
$$e\int_1^\infty,\ e^2\int_2^\infty, \ldots, e^n\int_n^\infty$$
ganze rationale durch $(\varrho+1)!$ theilbare Zahlen sind. Daher ist auch

---

*) Abdruck aus Nr. 2 der Göttinger Nachrichten v. J. 1893.

P_1 eine durch $\varrho!$ theilbare ganze Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho+1$ die Congruenz

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!} \equiv \pm a(n!)^{\varrho+1}. \qquad (\varrho+1) \tag{1}$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die absolut grössten Werthe bezeichnet werden, welche die Functionen

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)$$

bezüglich

$$(z-1)(z-2)\ldots(z-n)e^{-z}$$

in dem Intervalle $z=0$ bis $z=n$ annehmen:

$$\left|\int_0^1\right| < kK^\varrho, \quad \left|\int_0^2\right| < 2kK^\varrho, \cdots \left|\int_0^n\right| < nkK^\varrho$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\varkappa = \{|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \cdots + n|a_n e^n|\}k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$|\mathsf{P}_2| < \varkappa K^\varrho. \tag{2}$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ, welche *erstens* durch die ganze Zahl $a\,.\,n!$ theilbar ist und für welche *zweitens* $\varkappa\frac{K^\varrho}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!}$ infolge der Congruenz (1) eine nicht durch $\varrho+1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!}$ infolge der Ungleichung (2) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!} + \frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!} = 0$$

unmöglich.

Man nehme an, es sei π eine algebraische Zahl und zwar genüge die Zahl $\alpha_1 = i\pi$ einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Bezeichnen wir dann mit $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die übrigen Wurzeln dieser Gleichung, so muss, da $1 + e^{i\pi}$ den Werth 0 hat, auch der Ausdruck

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N}$$

den Werth 0 haben und hierin sind, wie man leicht sieht, die N Exponenten $\beta_1, \ldots, \beta_N$ die Wurzeln einer Gleichung N^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Sind überdies etwa die M Exponenten $\beta_1, \ldots, \beta_M$ von 0 verschieden, während die übrigen verschwinden, so sind diese M Exponenten $\beta_1, \ldots, \beta_M$ die Wurzeln einer Gleichung M^{ten} Grades von der Gestalt

$$f(z) = bz^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls ganze rationale Zahlen sind und in welcher insbesondere der letzte Coefficient b_M von Null verschieden ist. obige Ausdruck erhält dann die Gestalt

$$a+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\cdots+e^{\beta_M},$$

wo a eine ganze positive Zahl ist.

Man multiplicire diesen Ausdruck mit dem Integral

$$\int_0^\infty=\int_0^\infty z^\varrho[g(z)]^{\varrho+1}e^{-z}\,dz,$$

wo ϱ wiederum eine ganze positive Zahl bedeutet und wo zur Abkürzung $g(z)=b^M f(z)$ gesetzt ist; dann ergiebt sich

$$a\int_0^\infty+e^{\beta_1}\int_0^\infty+e^{\beta_2}\int_0^\infty+\cdots+e^{\beta_M}\int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$\mathsf{P}_1=a\int_0^\infty+e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty+e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty+\cdots+e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty,$$

$$\mathsf{P}_2=\qquad e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1}+e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2}+\cdots+e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M},$$

wo allgemein das Integral $\int_{\beta_i}^\infty$ in der complexen z-Ebene vom Punkte $z=\beta_i$ längs einer zur Axe der reellen Zahlen parallelen Geraden bis zu $z=+\infty$ hin und das Integral $\int_0^{\beta_i}$ vom Punkte $z=0$ längst der geraden Verbindungslinie bis zum Punkte $z=\beta_i$ hin zu erstrecken ist.

Das Integral $\int_0^\infty$ ist wieder gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho+1$ die Congruenz

$$\frac{1}{\varrho!}\int_0^\infty\equiv b^{\varrho M+M}\,b_M^{\varrho+1}. \qquad (\varrho+1)$$

Mittelst der Substitution $z=z'+\beta_i$ und wegen $g(\beta_i)=0$ ergiebt sich ferner

$$e^{\beta_i}\int_{\beta_i}^\infty=\int_0^\infty(z'+\beta_i)^\varrho[g(z'+\beta_i)]^{\varrho+1}e^{-z'}\,dz'=(\varrho+1)!\;G(\beta_i),$$

wo $G(\beta_i)$ eine ganze ganzzahlige Function von β_i bedeutet, deren Grad in β_i unterhalb der Zahl $\varrho M+M$ bleibt und deren Coefficienten sämmtlich durch $b^{\varrho M+M}$ theilbar sind. Da $\beta_1,\ldots,\beta_M$ die Wurzeln der ganzzahligen Gleichung $f(z)=0$ sind und mithin durch Multiplication mit dem ersten Coefficienten b zu *ganzen* algebraischen Zahlen werden, so ist

$$G(\beta_1)+G(\beta_2)+\cdots+G(\beta_M)$$

nothwendig eine *ganze rationale* Zahl. Hieraus folgt, dass der Ausdruck P_1 gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl wird und zwar gilt nach dem Modul $\varrho+1$ die Congruenz

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!}\equiv a b^{\varrho M+M} b_M^{\varrho+1}. \qquad (\varrho+1)$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die grössten absoluten Beträge bezeichnet werden, welche die Functionen $zg(z)$ bezüglich $g(z)e^{-z}$ auf den geradlinigen Integrationsstrecken zwischen $z=0$ bis $z=\beta_i$ annehmen:

$$\left|\int_0^{\beta_i}\right| < |\beta_i| k K^\varrho \qquad (i=1,2,\ldots,M)$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\varkappa=\left\{|\beta_1 e^{\beta_1}|+|\beta_2 e^{\beta_2}|+\cdots+|\beta_M e^{\beta_M}|\right\} k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\text{(4)} \qquad |\mathsf{P}_2| < \varkappa K^\varrho.$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ, welche *erstens* durch $a b b_M$ theilbar ist und für welche *zweitens* $\varkappa \frac{K^\varrho}{\varrho!}<1$ wird. Es ist dann $\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!}$ in Folge der Congruenz (3) eine nicht durch $\varrho+1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!}$ in Folge der Ungleichung (4) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!}+\frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!}=0$$

unmöglich.

Es ist leicht zu erkennen, wie auf dem eingeschlagenen Wege ebenso einfach auch der allgemeinste Lindemann'sche Satz über die Exponentialfunction sich beweisen lässt.

Königsberg i. Pr., den 5. Januar 1893.