Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten.

Von

David Hilbert in Königsberg.

Eine algebraische Form gerader Ordnung n mit reellen Coefficienten und m homogenen Variablen möge *definit* heissen, wenn dieselbe für jedes reelle Werthsystem der m Variablen einen positiven Werth annimmt und überdies eine von Null verschiedene Discriminante besitzt. Eine Form mit reellen Coefficienten wird kurz eine reelle Form genannt.

Bekanntlich ist *jede definite quadratische Form* von m Variablen als Summe von m Quadraten reeller Linearformen darstellbar. Desgleichen lässt sich *jede definite binäre Form* als Summe von zwei Quadraten reeller Formen darstellen, wie man durch geeignete Factorenzerlegung der Form erkennt. Da die in Rede stehende Darstellung den definiten Charakter der Form in der denkbar einfachsten Weise zu Tage treten lässt, so erscheint eine allgemeine Untersuchung betreffs der Möglichkeit einer solchen Darstellung von Interesse. Was zunächst den weiteren Fall $n=4$, $m=3$ angeht, so gilt der Satz:

Jede definite biquadratische ternäre Form lässt sich als Summe von drei Quadraten reeller quadratischer Formen darstellen.

Zum Beweise betrachten wir eine biquadratische ternäre Form F, welche der Summe der Quadrate dreier quadratischer Formen φ, ψ, χ gleich ist. Soll gleichzeitig dieselbe Form F als Summe der Quadrate der drei quadratischen Formen $\varphi+\varepsilon\varphi'$, $\psi+\varepsilon\psi'$, $\chi+\varepsilon\chi'$ darstellbar sein, wo ε eine unendlichkleine Constante bedeutet, so führt die Vergleichung beider Darstellungen nothwendig zu der Relation:

(1) $$\varphi\varphi'+\psi\psi'+\chi\chi'=0.$$

Die drei Gleichungen:

(2) $$\varphi=0,\quad \psi=0,\quad \chi=0$$

mögen kein gemeinsames Lösungssystem besitzen. Es müssen dann auf Grund der Identität (1) die vier gemeinsamen Lösungen der beiden letzteren Gleichungen die quadratische Form φ' zum Verschwinden bringen; hieraus folgt:

$$\varphi' = \alpha\psi + \gamma\chi,$$

und desgleichen:

$$\psi' = \beta\varphi + \zeta\chi,$$

$$\chi' = \delta\varphi + \vartheta\psi.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Identität (1) gewinnen wir für die eingeführten Constanten die Relationen:

$$\alpha + \beta = 0, \quad \gamma + \delta = 0, \quad \zeta + \vartheta = 0.$$

Sobald daher die Resultante der drei Gleichungen (2) von Null verschieden ist, kann jene Identität (1) ausschliesslich durch eine lineare Combination der drei Lösungen:

$$\begin{array}{lll} \varphi' = \quad 0, & \varphi' = -\chi, & \varphi' = \quad \psi, \\ \psi' = \quad \chi, & \psi' = \quad 0, & \psi' = -\varphi, \\ \chi' = -\psi, & \chi' = \quad \varphi, & \chi' = \quad 0 \end{array}$$

befriedigt werden d. h. es giebt keine mehr als dreifachunendliche Mannigfaltigkeit von Formen φ, ψ, χ, welche dieselbe Form F in der fraglichen Weise zur Darstellung bringen. Da das System der drei quadratischen Formen 18 Coefficienten, die biquadratische Form F dagegen nur 15 Coefficienten besitzt, so folgt aus obigen Betrachtungen, dass eine jede biquadratische ternäre Form sich als Summe von drei Formenquadraten darstellen lässt*).

Die Coefficienten der darstellenden Formen φ, ψ, χ enthalten noch drei willkürliche Parameter und nehmen daher erst dann bestimmte Werthe an, wenn wir ihnen irgend drei von einander unabhängige Bedingungen auferlegen. Ist letzteres geschehen, so giebt es nur eine endliche Anzahl von Formensystemen φ, ψ, χ, durch deren Vermittelung die vorgelegte biquadratische Form F als Quadratsumme dargestellt werden kann. Sollen von diesen Formensystemen bei beliebiger Wahl jener Bedingungen zwei Formensysteme zusammenrücken, so ist es den obigen Ueberlegungen zufolge erforderlich, dass die Resultante der betreffenden Formen φ, ψ, χ und in Folge dessen auch die Discriminante der darzustellenden Form F verschwindet. Der hierdurch gekennzeichnete singuläre Fall ist für die weitere Schlussfolgerung von Bedeutung.

Es seien nämlich F, F', F'' drei definite biquadratische ternäre Formen und p, p', p'' drei veränderliche positive Grössen, deren Verhältnisse durch die Punkte im Inneren eines Coordinatendreieckes dargestellt

*) Das allgemeine hierbei zu Grunde liegende Princip rührt von L. Kronecker her, vergl. Mathematische Annalen Bd. 13, pag. 549.

sein mögen. Wir construiren dann alle diejenigen Punkte p, p', p'', für welche die Gleichung:

(3) $$pF + p'F' + p''F'' = 0$$

eine Curve vierter Ordnung mit zwei oder mehr Doppelpunkten definirt. Wie auch die beiden definiten Formen F und F' gegeben seien, es ist offenbar stets möglich, F'' so zu wählen, dass jene Punkte p, p', p'' nur in endlicher Zahl vorhanden sind und wir können demnach die beiden Eckpunkte $p = 1$, $p' = 0$, $p'' = 0$ und $p = 0$, $p' = 1$, $p'' = 0$ durch eine krumme Linie verbinden, welche ganz im Innern des Coordinatendreieckes verläuft und keinen der vorhin construirten Punkte trifft. Betrachten wir jetzt einen Punkt p, p', p'' dieser Verbindungslinie, so besitzt die entsprechende biquadratische Curve (3) keinen Doppelpunkt. Denn da dieselbe überhaupt keinen reellen Punkt hat, so müsste jeder etwa existirende Doppelpunkt der Curve nothwendig ein Punkt mit complexen Coordinaten sein; der zu diesem conjugirt imaginäre Punkt würde dann ein zweiter Doppelpunkt der Curve sein, woraus sich ein offenbarer Widerspruch mit den getroffenen Festsetzungen ergiebt. Indem wir mit den Grössen p, p', p'' dem Laufe der Verbindungslinie folgen, gelangen wir von der definiten Form F durch continuirliche Veränderung ihrer reellen Coefficienten zu der definiten Form F', ohne dabei eine Form mit verschwindender Discriminante zu passiren. Wir setzen nun die Form F gleich der Summe der Quadrate dreier reeller quadratischer Formen φ, ψ, χ. Es bleiben dann bei continuirlicher Veränderung der reellen Coefficienten von F offenbar auch die Coefficienten der darstellenden Formen φ, ψ, χ stets reell, solange der vorhin betrachtete singuläre Fall ausgeschlossen wird. Führen wir daher die continuirliche Veränderung von F in F' auf dem angegebenen Wege aus, so folgt nothwendig, dass auch die letztere Form F' die fragliche Darstellung als Summe von drei Quadraten reeller Formen zulässt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Die zu Anfang dieser Arbeit angeregte Frage gelangt jedoch erst durch die strenge Begründung des folgenden Theorems zum befriedigenden Abschluss.

Unter den definiten Formen der geraden Ordnung n von m Variablen giebt es stets solche, welche sich n i c h t *als endliche Summe von Quadraten reeller Formen darstellen lassen*). Alleinige Ausnahme bilden die drei oben erledigten Fälle:*

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & n = 2, & m \textit{ beliebig}, \\ \text{II.} & n \textit{ beliebig}, & m = 2, \\ \text{III.} & n = 4, & m = 3. \end{array}$$

*) Die Existenz solcher Formen hat bereits H. Minkowski für wahrscheinlich gehalten; vergl. die erste These in seiner Inauguraldissertation: „Untersuchungen über quadratische Formen."

Der Beweis wird zunächst für den Fall der ternären Form 6^{ter} Ordnung erbracht.

Wir nehmen in der Ebene 8 getrennte Punkte (1), (2), ..., (8) an, von denen weder irgend drei auf einer geraden Linie noch irgend 6 auf einem Kegelschnitte liegen. Durch diese 8 Punkte lege man zwei reelle Curven dritter Ordnung, deren Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ seien. Die beiden Curven schneiden sich noch in einem 9^{ten} Punkte (9), welcher ebenfalls reell ist und von jenen 8 Punkten getrennt liegen möge. Es sei ferner $f = 0$ die Gleichung des durch die Punkte (1), (2), (3), (4), (5) hindurchgehenden Kegelschnittes und $g = 0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, welche durch die Punkte (1), (2), (3), (4), (5) ebenfalls einfach hindurchgeht und überdies die Punkte (6), (7), (8) zu Doppelpunkten besitzt. Dementsprechend sind φ, ψ, f, g ternäre Formen mit reellen Coefficienten. Die reellen homogenen Coordinaten der 9 Punkte (i) bezeichnen wir der Kürze halber gleichfalls mit (i) und erkennen dann, dass die Werthe $f(9)$ und $g(9)$ von Null verschieden sind. Wäre nämlich $f(9)$ gleich Null, so könnte man durch lineare Combination der Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung aufstellen, welche ausser den 6 Punkten (1), (2), (3), (4), (5), (9) noch einen 7^{ten} Punkt mit dem Kegelschnitte $f = 0$ gemein hätte. Diese Curve dritter Ordnung müsste nothwendig in den Kegelschnitt und eine durch (6), (7), (8) gehende Gerade zerfallen, deren Vorhandensein durch unsere Annahme über die Lage der 8 Punkte ausgeschlossen ist. Wäre ferner $g(9)$ gleich Null, so könnte man auf demselben Wege eine nicht zerfallende Curve dritter Ordnung construiren, welche durch die drei Doppelpunkte (6), (7), (8), sowie durch die 6 einfachen Punkte (1), (2), (3), (4), (5), (9) und überdies noch durch einen beliebigen weiteren einfachen Punkt der Curve $g = 0$ hindurchliefe. In Folge dessen müsste die Curve $g = 0$ in jene Curve dritter Ordnung und in eine durch die Punkte (6), (7), (8) gehende Gerade zerfallen; diese Folgerung tritt wiederum mit unserer Annahme in Widerspruch. Nachdem wir das Vorzeichen der Form f so gewählt haben, dass das Product $f(9)\,g(9)$ positiv ausfällt, betrachten wir die ternäre Form der 6^{ten} Ordnung:

$$\varphi^2 + \psi^2 + p f g,$$

worin p eine positive Constante bedeutet. Es sei ferner allgemein p_i die kleinste positive Grösse, für welche die Curve:

$$\varphi^2 + \psi^2 + p_i f g = 0$$

in dem Punkte (i) einen Rückkehrpunkt oder einen dreifachen Punkt erhält. Giebt es eine Grösse solcher Art überhaupt nicht, so setze man $p_i = \infty$. Die Grössen p_i sind sämmtlich grösser als Null, da dem Werthe $p=0$ die Curve $\varphi^2+\psi^2=0$ entspricht, welche offenbar die sämmtlichen in Rede stehenden 9 Punkte zu isolirten Doppelpunkten besitzt. Verstehen wir nun unter $[p]$ irgend eine von Null verschiedene positive Grösse, welche kleiner ist als die kleinste der Grössen p_i, so besitzt die Curve:

$$\varphi^2+\psi^2+[p]fg=0$$

nur noch die 8 Punkte (1), (2), ..., (8) zu isolirten Doppelpunkten, während sie den Punkt (9) überhaupt nicht mehr trifft. Es ist in Folge dessen möglich, um jene 9 Punkte kleine Kreise von der Beschaffenheit zu beschreiben, dass die ternäre Form:

$$\varphi^2+\psi^2+[p]fg$$

überall im Inneren jener 9 Kreise positiv bleibt und allein in den Mittelpunkten der ersten 8 Kreise gleich Null wird. Da ferner ausserhalb jener 9 Kreise der Ausdruck $\varphi^2+\psi^2$ stets von Null verschieden ist, so besitzt der absolute Werth des Quotienten:

$$\frac{\varphi^2+\psi^2}{fg}$$

in dem Gebiete ausserhalb der 9 Kreise ein von Null verschiedenes Minimum M. Verstehen wir nun unter $[[p]]$ eine von Null verschiedene positive, weder $[p]$ noch M erreichende Grösse, *so stellt der Ausdruck:*

$$F=\varphi^2+\psi^2+[[p]]fg \tag{4}$$

eine ternäre Form der 6^{ten} *Ordnung dar, welche in den 8 Punkten* (1), (2), ..., (8) *Null ist, dagegen für alle anderen reellen Werthsysteme der Variablen von Null verschieden und positiv ausfällt.*

Es bedeute P irgend eine definite ternäre Form der 6^{ten} Ordnung und p wiederum eine von Null verschiedene positive Grösse; die Form $F+pP$ ist dann ebenfalls definit und möge sich als Summe von 28 oder weniger Formenquadraten darstellen lassen, wie folgt:

$$F+pP=\varrho^2+\sigma^2+\cdots+\tau^2, \tag{5}$$

wo $\varrho, \sigma, \ldots, \tau$ gewisse reelle ternäre cubische Formen bezeichnen, deren Anzahl die Zahl 28 nicht überschreitet. Substituiren wir in dieser Identität (5) die Coordinaten des Punktes (9), so ist nothwendigerweise für eine jener cubischen Formen etwa für die Form ϱ die Ungleichung:

$$|\varrho(9)|>\left|\sqrt{\frac{F(9)}{28}}\right| \tag{6}$$

erfüllt. Andererseits folgen aus derselben Identität (5) die 8 Ungleichungen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} |\varrho(1)| &\leqq |\sqrt{pP(1)}|, \\ |\varrho(2)| &\leqq |\sqrt{pP(2)}|, \\ &\cdots\cdots \\ |\varrho(8)| &\leqq |\sqrt{pP(8)}|. \end{aligned}$$

Da ferner die in Rede stehenden 9 Punkte das vollständige Schnittpunktsystem zweier Curven dritter Ordnung bilden, so herrscht eine Beziehung von der Gestalt:

$$(8)\qquad c_1\varrho(1) + c_2\varrho(2) + \cdots + c_8\varrho(8) + c_9\varrho(9) = 0;$$

dabei sind die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_8, c_9$ von den Coefficienten der cubischen Form ϱ unabhängig und besitzen überdies ausnahmslos von Null verschiedene Werthe. Aus der Gleichung (8) folgt:

$$|c_1\varrho(1)| + |c_2\varrho(2)| + \cdots + |c_8\varrho(8)| \geqq |c_9\varrho(9)|$$

und mit Benutzung der Ungleichungen (6) und (7):

$$|c_1\sqrt{pP(1)}| + |c_2\sqrt{pP(2)}| + \cdots + |c_8\sqrt{pP(8)}| > \left|c_9\sqrt{\frac{F(9)}{28}}\right|.$$

Wählen wir daher für p eine Grösse $\{p\}$, welche von Null verschieden, positiv und kleiner ist als der Werth des Quotienten:

$$\frac{c_9^2 F(9)}{28\,\{|c_1\sqrt{P(1)}| + |c_2\sqrt{P(2)}| + \cdots + |c_8\sqrt{P(8)}|\}^2}$$

so erkennen wir, dass unsere Annahme (5) schliesslich auf einen Widerspruch führt; d. h.: *Die definite ternäre Form $F + \{p\}P$ von der 6^{ten} Ordnung lässt sich nicht als Summe von 28 oder weniger Quadraten reeller Formen darstellen.*

Angenommen, die Form $F + \{p\}P$ wäre als Summe von 29 Quadraten reeller Formen darstellbar, so besteht jedenfalls zwischen letzteren eine lineare Relation mit constanten positiven und negativen Coefficienten. Von diesen möge der grösste positive Coefficient den Werth γ besitzen. Dividiren wir dann die in Rede stehende Relation durch γ und subtrahiren sie von der Summe jener 29 Formenquadrate, so gelangen wir zu einer Darstellung der Form $F + \{p\}P$ durch 28 positive Formenquadrate. In ähnlicher Weise führt die Annahme einer Darstellung durch mehr als 29 Formenquadrate schliesslich wieder auf die Darstellung durch 28 Formenquadrate zurück d. h. *die ternäre Form $F + \{p\}P$ von der 6^{ten} Ordnung lässt sich überhaupt nicht als endliche Summe von Quadraten reeller Formen darstellen.*

Um die Richtigkeit unseres Theorems für ternäre Formen von beliebiger gerader Ordnung n zu erkennen, sei $f = 0$ die Gleichung irgend einer reellen Curve von der Ordnung $\frac{n}{2} - 3$, welche durch keinen der 9 Punkte (1), (2), ..., (8), (9) hindurchläuft. Man nehme dann auf dieser Curve soviel reelle Punkte (10), (11), ... an, dass jede durch diese Punkte hindurchgelegte Curve von der Ordnung $\frac{n}{2}$ in die Curve $f=0$ und in eine cubische Curve zerfällt, während das Gleiche nicht mehr der Fall ist, sobald wir in der Reihe jener Punkte (10), (11), ... einen Punkt unterdrücken. In Folge dieser Annahme und wegen der Lage der 9 Punkte (1), (2), ..., (8), (9) gilt eine Relation von der Gestalt:

$$c_1\varrho(1)+c_2\varrho(2)+\cdots+c_8\varrho(8)+c_9\varrho(9)+c_{10}\varrho(10)+c_{11}\varrho(11)+\cdots=0,$$

wo ϱ eine beliebige ternäre Form von der Ordnung $\frac{n}{2}$ bedeutet. Die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, \ldots$ sind von den Coefficienten der Form ϱ unabhängig und die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_8, c_9$ besitzen überdies von Null verschiedene Werthe. Bedeutet nun P eine definite ternäre Form von der Ordnung n, so ergiebt sich durch dieselbe Schlussweise, wie vorhin, *dass die ternäre Form Ff^2+pP für ein genügend kleines positives p nicht als Summe von $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Quadraten reeller Formen und folglich überhaupt nicht als endliche Summe von Quadraten reeller Formen dargestellt werden kann.*

Was endlich die Formen mit mehr als drei Variablen betrifft, so bedarf es vor allem einer Untersuchung der quaternären biquadratischen Form.

Wir nehmen zu dem Zwecke in dem dreidimensionalen Raume 7 getrennte Punkte (1), (2), ..., (7) an, von denen nicht vier in einer Ebene liegen. Ferner soll es nicht möglich sein, durch irgend 6 jener Punkte einen Kegel zweiter Ordnung zu construiren, dessen Spitze in den 7ten Punkt fällt. Man lege nun durch jene 7 Punkte drei reelle quadratische Flächen $\varphi=0$, $\psi=0$ und $\chi=0$, welche sich noch in einem bestimmten 8ten Punkte (8) schneiden. Dieser Punkt (8) ist ebenfalls reell und liege von jenen 7 Punkten getrennt. Es sei $f=0$ die Gleichung der durch die Punkte (1), (2), (3) hindurchgelegten Ebene und $g=0$ die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, welche durch die Punkte (1), (2), (3) einfach hindurchgeht und überdies die Punkte (4), (5), (6), (7) zu Knotenpunkten besitzt. Die reellen homogenen Coordinaten der 8 Punkte (i) bezeichnen wir der Kürze halber ebenfalls mit (i). Wie man leicht einsieht, ist $f(8)$ von Null verschieden. Das Gleiche gilt von $g(8)$. Denn ginge die Fläche $g=0$ auch durch den Punkt (8), so müsste sich g in der Gestalt

$$r\varphi+s\psi+t\chi$$

ausdrücken lassen, wo r, s, t Linearformen bedeuten. Die Definition der Fläche $g=0$ erfordert, dass für jeden der Punkte (4), (5), (6), (7) die ersten Differentialquotienten der Form g nach jeder der vier homogenen Variablen also die Ausdrücke:

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_1},$$
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_2},$$
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_3}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_3},$$
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_4}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_4}$$

verschwinden und da keine der Linearformen r, s, t in sämmtlichen vier Punkten (4), (5), (6), (7) verschwinden darf, so würde folgen, dass mindestens für einen von jenen vier Punkten die dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_4}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_4} \end{matrix}\right|$$

gleich Null werden. In letzterem Falle könnte man von einem jener vier Punkte einen Kegel zweiter Ordnung construiren, welcher durch alle übrigen 7 Punkte hindurchgeht. Diese Folgerung befindet sich mit den getroffenen Festsetzungen in Widerspruch. Nachdem wir das Vorzeichen von f so gewählt haben, dass $f(8)\,g(8)$ positiv ausfällt, können wir eine ähnliche Schlussweise wie oben bei Behandlung der ternären Form 6ter Ordnung anwenden. *Dann ergiebt sich, dass der Ausdruck:*

$$F=\varphi^2+\psi^2+\chi^2+pfg$$

für ein genügend kleines positives p eine Form darstellt, welche in den Punkten (1), (2), ..., (7) *Null ist, dagegen für alle anderen reellen Werthsysteme der Variablen von Null verschieden und positiv ausfällt.*

Da die in Rede stehenden 8 Punkte das vollständige Schnittpunktsystem dreier Flächen zweiter Ordnung bilden, so gilt eine lineare Identität von der Gestalt:

$$c_1\,\varrho(1)+c_2\,\varrho(2)+\cdots+c_7\,\varrho(7)+c_8\,\varrho(8)=0,$$

wo ϱ eine beliebige quaternäre quadratische Form bedeutet und die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_7, c_8$ nur von den Coordinaten jener 8 Punkte abhängen. Es bedeute ferner P eine definite quaternäre biquadratische Form und $\{p\}$ eine Grösse, welche von Null verschieden, positiv und kleiner ist als der Werth des Quotienten:

$$\frac{c_8{}^2F(8)}{35\,\{|c_1\sqrt{P(1)}|+|c_2\sqrt{P(2)}|+\cdots+|c_7\sqrt{P(7)}|\}^2}.$$

Setzen wir dann voraus, dass sich die Form $F + \{p\} P$ als Summe von 35 oder weniger Quadraten reeller Formen darstellen liesse, so werden wir in gleicher Weise auf einen Widerspruch geführt, wie oben, als es sich um die ternäre Form der 6^{ten} Ordnung handelte. *Die definite quaternäre biquadratische Form* $F + \{p\} P$ *lässt sich somit nicht als Summe von* 35 *oder weniger Quadraten reeller Formen und folglich überhaupt nicht als endliche Summe von Quadraten reeller Formen darstellen.*

Nunmehr bedeute Φ eine definite ternäre Form der 6^{ten} Ordnung und Ψ eine definite quaternäre biquadratische Form. Weder Φ noch Ψ sei als Summe von Quadraten reeller Formen darstellbar. Sind dann n und m gleich oder grösser als vier, so ist es offenbar ohne Schwierigkeit möglich, eine definite Form der n^{ten} Ordnung von m Variablen zu construiren, welche durch Nullsetzen einer oder mehrerer Variabler in eine der Formen Φ oder Ψ übergeht. *Eine solche Form ist ebensowenig als Summe von Quadraten reeller Formen darstellbar wie die Formen* Φ *und* Ψ *selbst.*

Damit ist der vollständige Beweis für die Richtigkeit unseres Theorems erbracht.

Königsberg i. Pr., den 20. Februar 1888.