Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

3.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XVII, pag. 355.)

In den beiden vorangegangenen Artikeln 1. und 2. haben wir uns streng an den in der Ueberschrift bezeichneten Gegenstand gehalten und uns ausschliesslich mit *linearen* Punktmengen d. h. mit gesetzmässig gegebenen Mannichfaltigkeiten von Punkten beschäftigt, welche einer unendlichen stetigen geraden Linie angehören. Mit Absicht hatte ich der Darstellung zunächst diese Grenze gezogen, weil, namentlich im Hinblick auf meine in der Abhandlung „Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre" (Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 242) gewonnenen Resultate, durch welche ebene, räumliche und allgemein n-fach ausgedehnte Gebilde in eindeutige Beziehung zu linearen Punktmengen gesetzt worden sind, von vornherein angenommen werden konnte, dass die meisten an linearen Punktmengen hervortretenden Eigenschaften und Beziehungen mit naheliegenden Modificationen bei Punktmengen sich nachweisen lassen, die in stetigen Flächen, Räumen oder n-dimensionalen Gebieten enthalten sind. Diese Verallgemeinerung möchte ich aber nun deutlicher hervortreten lassen, da sie nicht nur an sich und mit Rücksicht auf Anwendungen in der Functionentheorie von Interesse ist, sondern auch neue Gesichtspunkte für die Erkenntniss des Gebietes der linearen Punktmengen liefert.

Um mit Einem anzufangen, so sind die bisher vorgekommenen Begriffe der *Ableitungen* verschiedener Ordnung, wobei letztere nicht blos durch eine endliche ganze Zahl bestimmt wird, sondern unter Umständen auch durch gewisse scharf bestimmte Unendlichkeitssymbole charakterisirt werden muss, ohne Weiteres auf die in stetigen n-dimensionalen Gebieten vorkommenden Punktmengen ausdehnbar. Der Ableitungsbegriff stützt sich auch hier auf den Begriff des *Grenzpunktes* zu einer gegebenen Punktmenge P, welcher dadurch definirt ist, dass in jeder noch so kleinen *Umgebung* desselben von ihm verschiedene Punkte der Menge P vorkommen, wobei es gleichgültig ist, ob ein solcher Grenzpunkt zur Menge P mitgehört oder nicht. Der Satz, dass jede aus unendlich vielen Punkten bestehende in einem n-fach ausgedehnten stetigen und im Endlichen liegenden Gebiete verbreitete Punktmenge *zum Wenigsten einen* Grenzpunkt besitzt, dürfte in dieser Allgemeinheit zuerst von C. Weierstrass ausgesprochen, bewiesen und aufs Umfassendste in der Functionentheorie verwerthet worden sein.

Der Inbegriff *aller* Grenzpunkte einer Menge P bildet eine im Allgemeinen von P verschiedene neue Punktmenge P', welche ich die *erste Ableitung* von P nenne. Daraus ergeben sich durch Iteration dieser Begriffsbildung in endlicher oder selbst in *unendlicher* Folge mit in gewissem Sinne nothwendiger Dialectik die Begriffe der Ableitungen höherer Ordnung. Hierbei tritt immer die leicht zu begründende Erscheinung auf, dass jede Ableitung, mit Ausnahme der ersten, als Bestandtheil in den vorangehenden mit Einschluss der ersten Ableitung P' enthalten ist, während die ursprünglich gegebene Menge P im Allgemeinen ganz andere Punkte enthält als ihre Ableitungen. Ebenso ist der Begriff des *Ueberalldichtseins*, welchen wir zunächst nur an den linearen Punktmengen in Betracht gezogen haben, ohne Weiteres auf Mengen in höheren Dimensionen zu übertragen; eine in einem stetigen n-dimensionalen Gebiete A vorkommende Punktmenge P wird nämlich, wenn a ein stetiges Theilgebiet von A ist, *in dem Gebiete a überalldicht* genannt, wenn jedes stetige Theilgebiet a' von a Punkte der Menge P in seinem Innern hat.

Die erste Ableitung P' (und ebenso alle folgenden) von einer in einem stetigen Gebiete a überalldichten Punktmenge P enthält das stetige Gebiet a selbst mit allen Punkten der Begrenzung des Letzteren und es kann auch umgekehrt diese Eigenschaft der Punktmenge P als Ausgangspunkt für die Definition des Ueberalldichtseins derselben in dem Gebiete a genommen werden.

Auch der *Mächtigkeitsbegriff*, welcher den Begriff der ganzen Zahl, dieses Fundament der Grössenlehre, als Specialfall in sich fasst und als das allgemeinste genuine Moment bei Mannichfaltigkeiten angesehen werden dürfte, ist so wenig auf die linearen Punktmengen beschränkt, dass er vielmehr als Attribut einer jeglichen *wohldefinirten* Mannichfaltigkeit betrachtet werden kann, welche begriffliche Beschaffenheit ihre Elemente auch haben mögen.

Eine Mannichfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgend welcher Begriffssphäre angehören, nenne ich *wohldefinirt*, wenn auf Grund ihrer Definition und in Folge des logischen Princips vom ausgeschlossenen Dritten es als *intern bestimmt* angesehen werden muss, *sowohl* ob irgend ein derselben Begriffssphäre angehöriges Object zu der gedachten Mannichfaltigkeit als Element gehört oder nicht, *wie auch* ob zwei zur Menge gehörige Objecte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht.

Im Allgemeinen werden die betreffenden Entscheidungen nicht mit den zu Gebote stehenden Methoden oder Fähigkeiten in Wirklichkeit sicher und genau ausführbar sein; darauf kommt es aber hier durchaus nicht an, sondern *allein* auf die *interne Determination*, welche in concreten Fällen, wo es die Zwecke fordern, durch Vervollkommnung der Hülfsmittel zu einer *actuellen* (*externen*) *Determination* auszubilden ist.

Ich erinnere hier zur Erläuterung an die Definition der Menge aller algebraischen Zahlen, welche zweifellos so gefasst werden kann, dass mit ihr die interne Determination dafür gegeben ist, ob eine beliebig angenommene bestimmte Zahl η zu den algebraischen Zahlen gehört oder nicht; nichtsdestoweniger zählt das Problem, für eine gegebene Zahl η diese Entscheidung thatsächlich auszuführen, wie bekannt, oft zu den *schwierigsten* und es ist beispielsweise noch immer eine offene Frage von eminentem Interesse, ob die Zahl π, welche das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser ausdrückt, eine algebraische, oder, wie höchst wahrscheinlich, eine transcendente Zahl ist. Für die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems ist diese Aufgabe erst vor acht Jahren von Ch. Hermite in der bewundernswerthen Abhandlung: „Sur la fonction exponentielle, Paris 1874" gelöst worden; hier wird gezeigt, dass die Zahl e keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen rationalen Coefficienten als Wurzel genügt.

Hat man es mit einer geometrischen Mannichfaltigkeit zu thun, deren *Elemente* nicht allein Punkte, sondern auch Linien, Flächen oder Körper sein können, so tritt, wenn sie *wohldefinirt* ist, auch hier sofort die Frage nach ihrer Mächtigkeit auf und es wird letztere entweder *gleich* sein einer bei Punktmengen vorkommenden Mächtigkeit oder *grösser* sein als alle solche Mächtigkeiten.

Was im Besondern die in n-dimensionalen stetigen Gebieten enthaltenen *Punktmengen* anbetrifft, so habe ich (Borchardt's Journal Bd. 84, pag. 242) strenge gezeigt, dass ihre Mächtigkeiten mit denen der *linearen* Punktmengen übereinstimmen; es kann nämlich diese Thatsache als eine einfache Folge des dort bewiesenen Satzes aufgefasst werden, wonach ein n-fach ausgedehntes stetiges Gebilde in gegenseitig-eindeutige, durchaus gesetzmässige und verhältnissmässig einfache Beziehung zu einem eindimensionalen stetigen Gebiete, also zum geraden *Linearcontinuum* gebracht werden kann; die Frage nach den verschiedenen Mächtigkeiten bei *Punktmengen* kann somit, ohne dass hierdurch ihre Allgemeinheit eingeschränkt wird, an den *linearen*

Punktmengen untersucht werden, wie ich schon am Schlusse der soeben citirten Abhandlung hervorgehoben habe.

Den Ausdruck „*Mächtigkeit*“ habe ich J. Steiner entlehnt*) der ihn in einem ganz speciellen, immerhin jedoch verwandten Sinne gebraucht, um auszusprechen, dass zwei Gebilde durch *projectivische* Zuordnung so auf einander bezogen sind, dass jedem Element des einen ein und nur ein Element des andern entspricht; bei dem hier gemeinten absoluten Mächtigkeitsbegriff wird zwar an der gegenseitig-eindeutigen Beziehbarkeit festgehalten, dagegen für das Gesetz der Zuordnung keinerlei Beschränkung, namentlich keine Beschränkung in Bezug auf Stetigkeit und Unstetigkeit gemacht, so dass zweien Mengen dann aber auch nur dann *gleiche* Mächtigkeit zugestanden wird, wenn sie nach irgend einem Gesetze einander gegenseitig-eindeutig zugeordnet werden können; sind die beiden Mengen *wohldefinirt*, so ist es als *intern determinirt* anzusehen, ob sie gleiche Mächtigkeit haben oder nicht, die *actuelle* Entscheidung darüber gehört aber in den concreten Fällen oft zu den mühsamsten Aufgaben. So ist es mir erst nach vielen fruchtlosen Versuchen vor acht Jahren mit Hülfe eines Satzes, den ich sowohl in Borchardts J. Bd. 77, pag. 260, wie auch im Artikel 1 dieser Abh. bewiesen habe, gelungen zu zeigen, dass das Linearcontinuum *nicht* gleiche Mächtigkeit mit der natürlichen Zahlenreihe hat.

Die *Mannichfaltigkeitslehre* in der ihr hier zu Theil gewordenen Auffassung, umspannt, wenn wir das Mathematische allein ins Auge fassen und die übrigen Begriffssphären vorläufig unberücksichtigt lassen, die Gebiete der Arithmetik, der Functionenlehre und der Geometrie; sie fasst sie auf Grund des Mächtigkeitsbegriffs zu einer höheren Einheit zusammen. *Unstetiges* und *Stetiges* findet sich solcherweise von demselben Gesichtspunkte aus betrachtet und mit gemeinschaftlichem Maasse gemessen.

Die *kleinste* Mächtigkeit, welche überhaupt an *unendlichen*, d. h. aus unendlich vielen Elementen bestehenden Mengen auftreten kann, ist die Mächtigkeit der positiven ganzen rationalen Zahlenreihe; ich habe die Mannichfaltigkeiten dieser Classe *ins unendliche abzählbare Mengen* oder kürzer und einfacher *abzählbare Mengen* genannt; sie sind dadurch charakterisirt, dass sie sich (auf viele Weisen) in der Form einer einfach unendlichen, gesetzmässigen Reihe:

$$E_1, E_2, \cdots, E_\nu, \cdots$$

vorstellen lassen, so dass jedes Element der Menge an einer bestimm-

---

*) M. s. dessen Vorlesungen über synthetische Geometrie der Kegelschnitte, herausgeg. von Schröter; § 2.

ten Stelle dieser Reihe steht und auch die Reihe keine anderen Glieder enthält als Elemente der gegebenen Menge.

Jeder unendliche Bestandtheil einer abzählbaren Menge bildet wieder eine ins unendliche abzählbare Menge.

Hat man eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Mengen (E), (E'), (E''), $\cdots$, deren jede ihrerseits abzählbar ist, so ist auch die aus der Zusammenfassung aller Elemente von (E), (E'), (E''), $\cdots$ hervorgehende Menge abzählbar.

Diese beiden einfachen, leicht zu beweisenden Sätze bilden die Grundlage für den Nachweis der Abzählbarkeit. So erkennt man aus ihnen bald, wie ich schon wiederholt bemerkt habe, dass alle Mengen, die in Form einer n-fach unendlichen Reihe mit dem allgemeinen Gliede $E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}$ (wo $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlenwerthe zu erhalten haben) gegeben sind, abzählbare Mengen sind, d. h. sich in Form *einfach* unendlicher Reihen vorstellen lassen; aber auch Mengen, deren allgemeines Glied die Form hat:

$$E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu},$$

wo nun auch μ alle positiven ganzen Zahlwerthe zu erhalten hat, gehören in diese Classe; ein besonders merkwürdiger Fall der letzten Art ist der Inbegriff aller algebraischen Zahlen (S. Borchardt's J. Bd. 77, pag. 258.) Arithmetik und Algebra bieten demnach eine unerschöpfliche Fülle von Beispielen der Abzählbarkeit; doch nicht weniger ergiebig ist in dieser Rücksicht die Geometrie. Der folgende Satz, welcher manche schönen Anwendungen in der Zahlentheorie und Functionenlehre gestattet, dürfte eine Vorstellung hiervon geben.

In einem n-dimensionalen überall ins Unendliche ausgedehnten stetigen Raume A sei eine unendliche Anzahl von n-dimensionalen stetigen*), von einander getrennten und höchstens an ihren Begrenzungen zusammenstossenden Theilgebieten (a) definirt; *die Mannichfaltigkeit* (a) *solcher Theilgebiete ist immer abzählbar.*

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass hier keinerlei Voraussetzung über die Vertheilung und über die Grösse des Rauminhaltes der Gebiete a gemacht wird, sie können mit beliebiger Kleinheit ihrer Ausdehnung an jeden ihnen nicht zugehörigen Punkt von A unendlich nahe heranrücken, der Satz hat keinerlei Ausnahme, wenn nur jedes Theilgebiet a (alle a sind vorausgesetztermassen n-dimensional) einen bestimmten (beliebig kleinen) Rauminhalt hat und die verschiedenen a höchstens in ihren Begrenzungen zusammenfallen.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich wie folgt führen: es werde der n-dimensionale unendliche Raum A mittelst reciproker Radii vectores

*) Bei jedem stetigen Gebilde werden die Punkte seiner Begrenzung als ihm zugehörig betrachtet.

auf ein innerhalb eines $\overline{n+1}$-dimensionalen unendlichen Raumes A verlaufendes n-fach ausgedehntes Gebilde B bezogen, welches dadurch bestimmt ist, dass dessen Punkte von einem festen Punkte des Raumes A' die constante Entfernung 1 haben. (Im Falle $n = 1$ ist dies ein Einheitskreis, im Falle $n = 2$ eine Einheitskugel.) Jedem n-dimensionalen Theilgebiete a von A entspricht ein n-dimensionales Theilgebiet b von B mit bestimmtem Rauminhalt; lässt sich nun die Abzählbarkeit für die Menge (b) nachweisen, so folgt hieraus wegen der gegenseitig eindeutigen Zuordnung die Abzählbarkeit der Menge (a).

Die Menge (b) ist aber aus dem Grunde abzählbar, weil die Anzahl der Gebiete b, welche ihrem Rauminhalte nach grösser sind als eine beliebig gegebene Zahl γ nothwendig eine endliche ist; denn ihre Summe ist kleiner als die Zahl $2^n\pi$, nämlich kleiner als der Rauminhalt des Gebildes B, in welchem die b alle enthalten sind; daraus folgt, dass die Gebiete b nach der Grösse ihres Rauminhaltes in eine einfach unendliche Reihe geordnet werden können, so dass die kleineren den grösseren folgen und in dieser Folge zuletzt unendlich klein werden.

Der Fall $n = 1$ liefert folgenden Satz, welcher für die weitere Ausbildung der Theorie der linearen Punktmengen wesentlich ist: *jeder Inbegriff von getrennten, höchstens in ihren Endpunkten zusammenfallenden Intervallen* $(\alpha \cdots \beta)$, *welche in einer unendlichen geraden Linie definirt sind, ist nothwendig ein abzählbarer Inbegriff;* das Gleiche gilt folglich auch von der Menge der Endpunkte α und β, jedoch nicht immer von der Ableitung der letzteren Punktmenge.

Der Fall $n = 2$, welcher die Eigenschaft der Abzählbarkeit einem jeden Inbegriffe von getrennten höchstens in ihren Begrenzungen zusammenstossenden Flächentheilen in einer unendlichen Ebene zuweist, scheint in der Functionentheorie complexer Grössen von Bedeutung zu sein. Hierbei bemerke ich, dass es nicht schwer ist, diesen Satz auch auf Inbegriffe getrennter Flächentheile auszudehnen, die in einem Gebiete definirt sind, welches die Ebene m-fach oder selbst abzählbar unendlich oft bedeckt.

Was die abzählbaren *Punktmengen* anbetrifft, so bieten sie eine merkwürdige Erscheinung dar, welche ich im Folgenden zum Ausdruck bringen möchte. Betrachten wir irgend eine Punktmenge (M), welche innerhalb eines n-dimensionalen stetig zusammenhängenden Gebietes A *überalldicht* verbreitet ist und die Eigenschaft der Abzählbarkeit besitzt, so dass die zu (M) gehörigen Punkte sich in der Reihenform:

$$M_1, M_2, \cdots, M_\nu, \cdots$$

vorstellen lassen; als Beispiel diene die Menge aller derjenigen Punkte unseres dreidimensionalen Raumes, deren Coordinaten in Bezug auf ein orthogonales Coordinatensystem x, y, z alle drei *algebraische* Zahlenwerthe haben. Denkt man sich aus dem Gebiete A die abzählbare

Punktmenge (M) entfernt und das alsdann übrig gebliebene Gebiet mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet, so besteht der merkwürdige Satz, dass für $n \gtreqless 2$ das Gebiet $\mathfrak{A}$ *nicht aufhört stetig zusammenhängend* zu sein, dass mit anderen Worten je zwei Punkte N und N' des Gebietes $\mathfrak{A}$ immer verbunden werden können durch eine *stetige Linie*, welche mit allen ihren Punkten dem Gebiete $\mathfrak{A}$ angehört, so dass auf ihr kein einziger Punkt der Menge (M) liegt.

Es genügt, diesen Satz für den Fall $n = 2$ als richtig zu erkennen; sein Beweis beruht wesentlich auf dem in Art. 1 bewiesenen Satze, dass, wenn irgend eine gesetzmässige Reihe reeller Grössen:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_\nu,\ \cdots,$$

(unter denen auch gleiche vorkommen können, was an dem Wesen des Satzes offenbar nichts ändert) vorliegt, in jedem noch so kleinen willkürlich gegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ reelle Grössen η gefunden werden können, die in jener Reihe *nicht* vorkommen.

Sei in der That A irgend ein zusammenhängendes stetiges Stück der unendlichen Ebene, in A nehme man die überalldichte abzählbare Punktmenge (M) an und es seien N und N' irgend zwei der Menge (M) nicht angehörige Punkte des Gebietes A, die wir zunächst unbekümmert um die Punkte (M) durch eine stetige innerhalb A verlaufende Linie l mit einander verbinden; es soll nun gezeigt werden, dass die Linie l durch eine andere stetige Linie l' ersetzt werden kann, welche gleichfalls die Punkte N und N' mit einander verbindet, ebenfalls im Innern von A verläuft, jedoch keinen einzigen Punkt der Menge (M) enthält. —

Auf l werden im Allgemeinen unendlich viele Punkte der Menge (M) liegen, jedenfalls bilden sie auf ihr einen Bestandtheil von (M), also gleichfalls eine *abzählbare* Menge.

Folglich giebt es, dem soeben erwähnten arithmetischen Satze zufolge, in jedem noch so kleinen Intervalle der Linie l Punkte, welche nicht zu (M) gehören. Von diesen Punkten der Linie l fassen wir eine endliche Anzahl $N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_k$ derart ins Auge, dass die geraden Strecken $NN_1,\ N_1N_2,\ \cdots,\ N_kN'$ ebenfalls ganz im Innern von A liegen. Diese Strecken lassen sich nun immer durch Kreisbögen mit denselben Endpunkten ersetzen, welche gleichfalls innerhalb A verlaufen, keinen einzigen Punkt der Menge (M) enthalten und in ihrer Zusammensetzung eine stetige Linie l' von der oben charakterisirten Beschaffenheit bilden. —

Es wird genügen, wenn wir diese Thatsache an einer der Strecken, wir nehmen die erste NN_1, nachweisen.

Die durch die Punkte N und N_1 hindurchgehenden Kreise bilden eine einfach unendliche Schaar, ihre Mittelpunkte liegen auf einer bestimmten Geraden g; die Lage eines solchen Mittelpunktes werde durch den Abstand u von einem festen Punkte O der Geraden g mit Vorzeichen bestimmt; jedenfalls kann alsdann der Grösse u ein Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ als Spielraum derart zugewiesen werden, dass für jeden einem solchen u entsprechenden Kreis einer der beiden N und N_1 verbindenden Kreisbögen ganz im Gebiete A zu liegen kommt.

Die Mittelpunkte derjenigen Kreise unserer Kreischaar, welche durch die Punkte:

$$M_1, M_2, \cdots, M_\nu, \cdots$$

der Menge (M) gehen, bilden auf der geraden g eine abzählbare Punktmenge:

$$P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots,$$

die zugehörigen Werthe von u seien:

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots$$

Nimmt man alsdann im Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ eine Zahl η an, welche keinem ω_ν gleich ist, (was nach dem angeführten Satze immer möglich ist), so erhält man durch die Annahme:

$$u = \eta$$

einen Kreis der Schaar, auf dessen Umfang kein einziger Punkt der Menge (M) liegt und der uns, wegen $\alpha < \eta < \beta$, einen die Punkte N und N_1 verbindenden Kreisbogen von der verlangten Beschaffenheit liefert. —

Auf diese Weise ist gezeigt, dass je zwei Punkte N und N' des Gebietes $\mathfrak{A}$, welches nach Abzug einer überalldichten abzählbaren Punktmenge (M) vom Gebiete A übrig bleibt, sich durch eine stetige aus einer endlichen Anzahl von Kreisbögen zusammengesetzte Linie l' verbinden lassen, welche mit allen ihren Punkten dem Gebiete $\mathfrak{A}$ angehört, d. h. keinen einzigen Punkt der Menge (M) enthält. Uebrigens würde es mit demselben Hülfsmittel auch möglich sein, die Verbindung der Punkte N und N' durch eine nach einem *einzigen analytischen Gesetze* verlaufende continuirliche Linie herzustellen, welche ganz im Gebiete $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

An diese Sätze knüpfen sich Erwägungen über die Beschaffenheit des der realen Welt, zum Zwecke begrifflicher Beschreibung und Erklärung der in ihr vorkommenden Erscheinungen, zu Grunde zu legenden dreidimensionalen Raumes. Bekanntlich wird derselbe sowohl wegen der in ihm auftretenden Formen, wie auch namentlich mit Rücksicht auf die darin vor sich gehenden Bewegungen als *durchgängig stetig* angenommen. Diese letztere Annahme besteht nach den gleichzeitigen, von einander unabhängigen Untersuchungen Dedekind's (M. s. das Schriftchen: Stetigkeit und irrationale Zahlen von R. Dedekind, Braunschweig 1872) und des Verfassers (Mathem. Annalen Bd. V, p. 127 und 128) in nichts anderem, als dass jeder

Punkt, dessen Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch *irgend welche* bestimmte reelle rationale oder irrationale Zahlen vorgegeben sind, als *wirklich zum Raume gehörig* gedacht wird, wozu im Allgemeinen kein innerer Zwang vorliegt und worin daher ein freier Act unserer gedanklichen Constructionsthätigkeit gesehen werden muss. Die *Hypothese der Stetigkeit des Raumes* ist also nichts Anderes, als die an sich willkürliche Voraussetzung der vollständigen, gegenseitig-eindeutigen Correspondenz zwischen dem dreidimensionalen *rein arithmetischen Continuum* (x, y, z) und dem der Erscheinungswelt zu Grunde gelegten Raume.*) —

Unser Denken kann aber mit gleicher Leichtigkeit von einzelnen Raumpunkten, sogar wenn sie überalldicht vorkommen, sehr wohl abstrahiren und sich den Begriff eines *unstetigen* dreidimensionalen Raumes $\mathfrak{A}$ von der im Vorhergehenden charakterisirten Beschaffenheit bilden. Die sich alsdann ergebende Frage, ob auch in so *unstetigen* Räumen $\mathfrak{A}$ *stetige Bewegung* gedacht werden könne, muss nach dem Vorhergehenden unbedingt *bejaht* werden, weil wir gezeigt haben, dass je zwei Punkte eines Gebildes $\mathfrak{A}$ durch unzählig viele stetige, vollkommen reguläre Linien verbunden werden können. Es stellt sich also merkwürdigerweise heraus, dass aus der blossen Thatsache der stetigen Bewegung auf die durchgängige Stetigkeit des zur Erklärung der Bewegungserscheinungen gebrauchten dreidimensionalen Raumbegriffs zunächst kein Schluss gemacht werden kann. Daher liegt es nahe, den Versuch einer modificirten, für Räume von der Beschaffenheit $\mathfrak{A}$ gültigen Mechanik zu unternehmen, um aus den Consequenzen einer derartigen Untersuchung und aus ihrem Vergleich mit Thatsachen möglicherweise wirkliche Stützpunkte für die Hypothese der durchgängigen Stetigkeit des der Erfahrung unterzulegenden Raumbegriffs zu gewinnen. —

Berlin, den 31. März 1882.

*) Ich glaube hier als bekannt voraussetzen zu können, dass eine allgemeine, rein arithmetische, d. h. von allen geometrischen Anschauungsgrundsätzen vollkommen unabhängige Grössenlehre möglich und in ihren Grundzügen auch ausgebildet ist; ich verweise in dieser Beziehung ausser auf die citirten freilich nur sehr kurz gehaltenen Aufsätze von Dedekind und mir noch auf die ausgezeichnete Schrift des Herrn Lipschitz: Grundlagen der Analysis, Bonn 1877. Die meisten principiellen Schwierigkeiten, welche in der Mathematik gefunden werden, scheinen mir ihren Ursprung darin zu haben, dass die Möglichkeit einer rein arithmetischen Grössen- und Mannichfaltigkeitslehre verkannt wird. Namentlich sind hierauf die Irrthümer derjenigen Autoren zurückzuführen, welche das *Unendlichkleine* als *Grösse* und nicht als einen *Modus* der Veränderlichkeit von Grössen auffassen. Vom Standpunkte der reinen *arithmetischen Analysis* aus *giebt es keine* unendlich kleinen Grössen, wohl aber unendlich klein *werdende*, veränderliche Grössen.