Sur la théorie des quaternions*).

Par

M. Cyparissos Stéphanos à Paris.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein).

J'arrive à vos demandes relatives à mes recherches sur les quaternions.

C'est exprès que, dans le Mémoire que je vous ai déjà adressé, je n'ai point envisagé des formes bilinéaires dont tous les coefficients seraient donnés en valeur absolue, et que je n'ai point touché à la représentation géométrique de ces formes, puisque je me reservais d'arriver à ces considérations lorsque j'aurais à traiter de la théorie des quaternions.

Quant à mes recherches sur cette théorie elles ont porté successivement dans diverses directions.

D'abord je me suis proposé d'étudier la représentation des formes bilinéaires binaires, ou bien des quaternions correspondants, par des points pésants. Partant de ce que l'emploi des vecteurs d'après Hamilton était aussi bien admissible sous mon point de vue (et cela d'après l'exemple de Grassmann qui avait introduit les vecteurs, d'en profiter dans le calcul barycentrique de Möbius), j'avais pensé *Strecken*, pour déduire des opérations entre points pésants etc. une explication du côté géométrique de la théorie des quaternions, autant que cela était possible.

Je ne me suis jamais fait illusion sur le manque de toute signification intrinsèque dans l'ensemble d'opérations (addition, multiplication etc.) entre points pésants et vecteurs. Toutefois devant l'irrégularité même de ces opérations il y avait lieu de se demander si elles n'étaient point l'image d'autres opérations, bien régulières, entre des êtres géométriques correspondant d'une manière individuelle aux divers quaternions.

Hamilton avait déjà fait un premier pas vers la solution de cette question. Pour cela il se fondait sur la considération de deux vecteurs A et B dont le quotient BA^{-1} est égal à un quaternion donné Q. Ainsi en supposant que A et B aient leur origine en O (origine des

---

*) Par des explications relatives à diverses notions considérées dans ce qui suit on pourra consulter le Mémoire de M. Stéphanos inséré dans ce volume des Annalen (*Voir* surtout les §§ I, II, VI de la seconde Partie).

coordonnées) on voit que la correspondance entre les extrémités de ces vecteurs constitue une transformation de similitude du plan du quaternion Q en lui même, transformation laissant O immobile.

Il faut bien convenir que cette transformation de similitude du plan de Q constitue un représentant géométrique assez convenable du quaternion correspondant. Et en effet non seulement elle détermine Q d'une manière unique lorsqu'elle est donnée, mais aussi elle permet de donner des constructions géométriques fort simples pour les diverses opérations entre quaternions.

En réflechissant sur ces faits je me suis demandé si la représentation de $a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ par l'extrémité d'un vecteur ayant son origine en O, représentation dont l'influence sur les résultats précédents n'est aucunement défavorable, ne doit être érigée plutôt en règle, et si, en accord avec cela, on ne doit point s'attacher à une nouvelle représentation géométrique d'un quaternion complet, laquelle consisterait à représenter $a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ par un élément d'une variété à quatre dimensions dans laquelle serait contenu notre espace de points ($a_0 = 0$).

Après examen attentif des circonstances qui accompagnent le calcul des quaternions j'ai été à réconnaître qu'en effet c'est à une pareille représentation des quaternions qu'on devait s'arrêter.

La variété à quatre dimensions dont les élements doivent représenter les divers quaternions est celle formée par les diverses *sphères orientées* de notre espace, (une *sphère orientée*, *semi-sphère* de M. Laguerre, pouvant, être considerée comme une sphère dont le rayon est pris avec un signe déterminé). Un quaternion $Q = a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ serait ainsi représenté par la sphère orientée ayant pour centre l'extrémité du vecteur $VQ = a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$ et dont le rayon serait égal à $SQ \cdot \sqrt{-1} = a_0\sqrt{-1}$.

Il est à remarquer que le cône orienté ayant son sommet en O et circonscrit à la sphère orientée qui représente Q, est caractérisé par cette propriété que chacun de ses plans tangents coupe le cercle à l'infini en deux points x, y qui se correspondent dans l'homographie établie sur le cercle à l'infini par la rotation $\lambda, \mu, \nu = \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$. Il est aussi à remarquer que la norme $NQ = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ d'un quaternion Q est égale à la puissance du point O par rapport à la sphère correspondante Q.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable c'est que le carré de la distance tangentielle de deux sphères orientées Q_1 et Q_2, c'est-à-dire de la distance entre les points où un plan orienté touche ces deux sphères orientées, est égal à $N(Q_2 - Q_1)$*). C'est là un fait de la plus grande

*) Ainsi la condition pour que les deux sphères orientées Q_1 et Q_2 se touchent est $N(Q_2 - Q_1) = 0$.

importance pour l'emploi qu'on peut faire des quaternions dans l'étude des correspondances de contact entre sphères orientées.

En partant de cette représentation des quaternions isolés, on a à chercher l'interprétation du rôle que revêtent les sphères correspondantes dans les diverses opérations entre quaternions.

Et d'abord pour ce qui concerne l'addition des quaternions on doit supposer qu'une sphère orientée Q représente une translation égale à VQ suivie d'une *dilatation* égale à $SQ \cdot \sqrt{-1}$ (cette dernière opération ayant pour effet d'ajouter au rayon de toute sphère orientée la longueur $SQ \cdot \sqrt{-1}$). L'addition des quaternions n'est ainsi autre chose que l'image de la composition de ces transformations ($Y = Q + X$).

Maintenant, pour ce qui concerne la multiplication, on doit considérer une sphère orientée Q comme définissant une correspondance

(1) $$Y = XQ.$$

Au produit de deux sphères Q_1, Q_2 correspondrait ainsi le produit des deux transformations

$$Y = XQ_1, \quad Y = XQ_2.$$

La transformation (1) fait en général correspondre à des points des sphères orientées. Les seuls points $X = A$ auxquels correspondent ainsi des points $Y = B$ sont situés dans le plan de Q; il en est de même pour les points B. C'est cette même correspondance A, B que nous avons déjà eu à considérer.

Il est à remarquer qu'à des *plans orientés**) parallèles correspondent par cette transformation aussi des plans orientés parallèles. Deux plans correspondants se coupent toujours suivant une droite qui rencontre le cercle à l'infini C_∞. Les deux autres points d'intersection de ces plans avec le cercle C_∞ sont correspondants dans l'homographie établie sur ce cercle par la rotation $\lambda, \mu, \nu = \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$.

Dans cette transformation les divers cônes de révolution orientés ayant leur centre en O se transforment les uns dans les autres. Deux pareils cônes correspondants sont circonscrits à une infinité de sphères orientées correspondantes. Les puissances par rapport à O de deux sphères X, Y correspondantes sont du reste liées entre elles par la relation $NY = NX : NQ$. Enfin il est à remarquer que les cercles suivant lesquels deux pareilles sphères coupent le plan de Q sont correspondants dans la transformation de similitude $B = AQ$ du plan de Q.

Dans les opérations de l'addition et de la multiplication le point O joue le rôle de *zéro*, tandisque la sphère orientée ayant le point O pour centre et $\sqrt{-1}$ pour rayon jour le rôle d'*unité* ($Q = 1$). Enfin ce sont les plans orientés qui se présentent comme des *infinis*. Il est à noter

---

*) *Semi-plans* de M. Laguerre.

qu'étant donnés le point O et la sphère orientée 1 la somme et le produit de deux sphères orientées sont parfaitement déterminés.

Les propriétés précédentes montrent déjà combien la représentation des quaternions par des sphères orientées est naturelle. Quant au calcul géométrique de Hamilton, envisagé sous son véritable aspect, on peut dire qu'il répose sur la représentation des formes bilinéaires symétriques (vecteurs) par des points de l'espace. Aussi je trouve que les applications de ce calcul doivent être cherchées dans l'étude des propriétés élémentaires des systèmes de points dans l'espace*). Cela tiendrait à ce que les opérations S et V, appliquées aux produits de plusieurs vecteurs pris deux à deux ou trois à trois, conduisent à tous les invariants et covariants des formes quadratiques correspondantes, relatifs à des substitutions linéaires de déterminant égal à 1, et par conséquent à tous les invariants et covariants des points de l'espace correspondants, relatifs à des rotations effectuées autour du point O.

Par contre avec l'extension de la représentation des quaternions, par l'emploi de sphères orientées, le champ des applications de ce calcul paraît s'étendre de lui-même dans les limites de la Géométrie des sphères de M. Lie.

Ainsi par exemple A, B, C, D désignant des quaternions arbitraires et X, Y deux quaternions variables la relation

$$XAY + XB + CY + D = 0$$

représente la transformation de contact la plus générale entre sphères orientées.

Pour $A = 0$ on a des transformations entre plans orientés; etc. etc.

En se servant de la correspondance entre sphères (orientées) et droites de M. Lie on pourrait aussi représenter les quaternions par des droites de l'espace. On aurait ainsi une nouvelle application du calcul des quaternions qui ne serait peut-être moins intéressante.

Ce n'est que dernièrement que je suis parvenu à cette interprétation des quaternions au moyen de sphères orientées. Ainsi je n'ai pas encore eu le temps d'achever l'exposé dont je parlais en commençant. Malheureusement le temps va, paraît-il, encore me manquer, de sorte que je ne sais pas si je pourrai vous envoyer ce travail de sitôt, d'autant plus que d'autres recherches me pressent également. C'est pourquoi je me suis permis de vous présenter ici les traits principaux.

Paris, le 3. Mai 1883.

---

*) Ou tout au plus à des études relatives au groupe des transformations par rayons vecteurs réciproques.