Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg Ostpr.

Erster Theil.

Im Gegensatz zu meinen bisherigen Arbeiten über Transformationsgruppen*) schliesse ich mich in der vorliegenden Arbeit ganz den Bezeichnungen des Herrn Lie an und ich verweise für diejenigen Leser, welche mit dessen Arbeiten weniger bekannt sind, auf die Zusammenstellung, welche Herr Engel in seiner Arbeit im 27. Bande der Math. Annalen (S. 1ff) gegeben hat. Auch die von mir neu eingeführten Bezeichnungen sind im Einverständniss mit den Herren Lie und Engel, theilweise nach mündlicher Besprechung mit denselben gebildet. Demnach bezeichne ich diejenigen infinitesimalen Transformationen, durch welche eine r-gliedrige Gruppe bestimmt wird, symbolisch durch $X_1f \dots X_rf$ (wo kein Missverständniss entstehen kann, durch $X_1 \dots X_r$). Eine beliebige infinitesimale Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$ ist durch r Coefficienten $\eta_1 \dots \eta_r$ bestimmt und kann bloss durch $(\eta_1 \dots \eta_r)$ oder (η) bezeichnet werden. Jede infinitesimale Transformation führt auf eine einfach unendliche Schaar von endlichen Transformationen, und umgekehrt kann jede beliebige endliche Transformation dadurch erhalten werden, dass man eine infinitesimale unendlich oft wiederholt. Die endlichen Transformationen werden aber in den nachfolgenden Untersuchungen nur betreffs der Frage untersucht, ob sie vertauschbar sind oder nicht. Infinitesimale Transformationen sind, solange nicht das Unendlichkleine einer höhern Ordnung mit berücksichtigt wird, stets vertauschbar. Sobald aber zwischen zwei solchen eine gewisse Relation

*) Erweiterung des Raumbegriffes. Braunsberg 1884. Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. Braunsberg 1886.

Da die erste Arbeit zunächst dem Verzeichniss der Vorlesungen für den Winter 1884/85, die andere dem für den Sommer 1886 vorgesetzt wurde, soll erstere mit Pr. 1884, letztere mit Pr. 1886 citirt werden.

besteht, ist jede aus der einen hergeleitete endliche Transformation mit jeder aus der andern erhaltenen endlichen Transformation vertauschbar (Programm 1884, S. 12). Wir haben daher kein Missverständniss zu befürchten, wenn wir alle Transformationen, welche aus derselben unendlich kleinen durch Wiederholung hervorgehen, als identisch betrachten und diese Schaar endlicher Transformation durch die zugehörige infinitesimale bezeichnen. Wir sprechen daher (vielleicht im Gegensatz zu Herrn Lie) von einer Transformation $\Sigma \eta_\iota X_\iota f$.

Damit die r Systeme von Differentialgleichungen $X_1 f \dots X_r f$ zu einer Gruppe führen, hat man nach bekannter Vorschrift die $\frac{r(r-1)}{2}$ Ausdrücke $(X_\iota X_\varkappa)$ zu bilden, und dann muss sein:

$$(X_\iota X_\varkappa) = \sum\nolimits^{\sigma} c_{\iota\varkappa\sigma} X_\sigma f.$$

Zwischen den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ müssen gewisse Beziehungen bestehen, welche man entweder aus den Integrationsbedingungen oder aus einer für endliche Gruppen nahezu selbstverständlichen Gleichung*) herleiten kann, und welche sich aus den Jacobi'schen Relationen ergeben:

$$[X_\iota(X_\varkappa X_\lambda)] + [X_\varkappa(X_\lambda X_\iota)] + [X_\lambda(X_\iota X_\varkappa)] = 0,$$

oder aus

$$\sum\nolimits^{\varrho} \{c_{\varkappa\lambda\varrho}(X_\varrho X_\iota) + c_{\lambda\iota\varrho}(X_\varrho X_\varkappa) + c_{\iota\varkappa\varrho}(X_\varrho X_\lambda)\} = 0.$$

Viele Eigenschaften der Gruppe sind nicht von den Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ selbst abhängig, sondern ergeben sich bereits aus den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$. Wenn daher zwei Gruppen dieselben Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ besitzen, so werden sie als gleich zusammengesetzt bezeichnet. Da man aber die $c_{\iota\varkappa\lambda}$ dadurch verändern kann, dass man die $X_1 f \dots X_r f$ durch r von einander unabhängige homogene lineare Functionen derselben ersetzt, so hat man zwei r-gliedrige Gruppen als *gleich zusammengesetzt* zu bezeichnen, wenn sie entweder dieselben Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ haben, oder wenn man die Gleichheit durch passende Wahl der bestimmenden infinitesimalen Transformationen herbeiführen kann.

Wofern für gegebene Werthe von ι und $\varkappa$ die r Coefficienten $c_{\iota\varkappa 1} \dots c_{\iota\varkappa r}$ nicht sämmtlich verschwinden, stellt $\sum^{\varrho} c_{\iota\varkappa\varrho} X_\varrho f$ wieder eine Transformation dar. Es ist selbstverständlich, dass unter den $\frac{r(r-1)}{2}$ auf diese Weise erhaltenen Transformationen höchstens r von einander unabhängig sind; in vielen Fällen werden sie durch eine kleinere Zahl dargestellt werden können. Ich habe (Programm 1886 S. 7 und 8) die Zahl der hierin enthaltenen von einander unabhängigen

*) Engel, Beiträge zur Gruppentheorie. Leipziger Berichte 1887. S. 89ff.

Transformationen mit p bezeichnet, und bewiesen, dass diese p Transformationen eine invariante Untergruppe bestimmen, welcher ganz hervorragende Eigenschaften zukommen. Für diese Untergruppe wird man einen eigenen Namen nicht entbehren können und ich bezeichne sie als die *Hauptuntergruppe.* Hiernach ist eine Gruppe, für welche $p = r$ ist, ihre eigne Hauptuntergruppe; dagegen besitzt eine Gruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen keine Hauptuntergruppe. Jede zweigliedrige Gruppe, deren Transformationen nicht vertauschbar sind, hat bekanntlich immer eine eingliedrige Hauptuntergruppe; diese mag zuweilen als ihr Hauptelement bezeichnet werden.

Zu einer zweiten für die Gruppe charakteristischen Zahl gelangt man durch folgende Betrachtung. Das Problem, diejenigen zweigliedrigen Untergruppen zu bestimmen, in denen eine gegebene Transformation $(\eta_1 \dots \eta_r)$ vorkommt, führt auf eine Gleichung r^{ten} Grades:

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) - \cdots \pm \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0,$$

wo die $\psi_\lambda(\eta)$ homogene Functionen λ^{ten} Grades in $\eta_1 \dots \eta_r$ sind und wo das absolute Glied verschwindet. Nun entsteht die Frage, wie viele der Functionen $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ von einander unabhängig sind, so dass sich alle andern durch diese ausdrücken lassen. Die Zahl der von einander unabhängigen, welche für $r > 2$ stets kleiner als $r-1$ ist, soll mit l bezeichnet werden und der *Rang* der Gruppe heissen. Ist $l > 1$, so verschwinden nicht nur die Coefficienten $\psi_{r-1} \dots \psi_{r-l+1}$ identisch, sondern auch alle Unterdeterminanten $r-l+1^{\text{ten}}$ Grades einer gewissen Determinante, welche mit der obigen Gleichung in engem Zusammenhange steht. Ferner gehört jede Transformation einer $(l-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind. Für $l > 1$ ist also eine beliebige endliche Transformation nicht nur mit denen vertauschbar, welche aus derselben unendlich kleinen Transformation abgeleitet werden, sondern mit weiteren Schaaren, und die zugehörigen unendlich kleinen Transformationen bestimmen eine $(l-1)$-gliedrige Untergruppe.

Der Beweis für diese Sätze und für manche andere Beziehung, in welcher die Zahl l zu Eigenschaften der Gruppe steht, gründet sich einmal auf ein Formelsystem, welches aus den Jacobi'schen Relationen durch einfache Operationen hergeleitet wird. Zu einem zweiten Beweis führt eine gewisse canonische Form, in welcher die meisten Gruppen dargestellt werden können. Zu dieser Form gelangt man auf folgendem Wege. Man geht von einer ganz beliebigen inf. Transformation (η) aus, stellt für dieselbe die obige Gleichung:

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1 + \omega^{r-2}\psi_2 - \cdots \pm \omega\psi_{r-1} = 0$$

auf und bestimmt deren Wurzeln. Enthält dieselbe im allgemeinen m

verschwindende Wurzeln, verschwinden also $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-m+1}$ identisch, so kann man noch $m-1$ von einander und von der Transformation (η) unabhängige Transformationen bestimmen, welche mit der gegebenen und mit einander vertauschbar sind. Man wähle etwa die gegebene Transformation als $X_r f$ und die gefundenen als $X_{r-1} f \ldots X_{r-m+1} f$. Nun mögen zunächst die $r-m$ nicht verschwindenden Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_{r-m}$ alle von einander verschieden sein. Alsdann kann man $r-m$ Transformationen $X_1 \ldots X_{r-m}$ so wählen, dass ist:

$$(X_r X_1) = \omega_1 X_1 f, \; (X_r X_2) = \omega_2 X_2 f \ldots (X_r X_{r-m}) = \omega_{r-m} X_{r-m} f.$$

Zugleich gelten aber jetzt auch die folgenden Gleichungen:

$$(X_{r-1} X_1) = \omega_1' X_1 f, \; (X_{r-1} X_2) = \omega_2' X_2 f \ldots (X_{r-1} X_{r-m}) = \omega_{r-m}' X_{r-m} f,$$
$$(X_{r-2} X_1) = \omega_1'' X_1 f, \; (X_{r-2} X_2) = \omega_2'' X_2 f \ldots (X_{r-2} X_{r-m}) = \omega_{r-m}'' X_{r-m} f.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Um die Zusammensetzung der Gruppe zu charakterisiren, muss noch der Ausdruck $(X_\iota X_\varkappa)$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots m$ angegeben werden. Dieser ergiebt sich aber unmittelbar aus den Wurzeln ω; es ist nämlich $(X_\iota X_\varkappa) = c_{\iota\varkappa\lambda} X_\lambda f$, wenn $\omega_\iota + \omega_\varkappa = \omega_\lambda$ ist und

$$(X_\iota X_\varkappa) = (c_{\iota\varkappa r} X_r + c_{\iota\varkappa r-1} X_{r-1} + \cdots + c_{\iota\varkappa, r-m+1} X_{r-m+1}) f$$

für

$$\omega_\iota + \omega_\varkappa = 0.$$

Selbstverständlich gilt dasselbe für die Wurzeln $\omega_\varkappa', \omega_\varkappa'' \ldots$ Dadurch werden wir darauf geführt, gewisse Beziehungen zwischen den Wurzeln aufzusuchen.

Eine ähnliche Darstellung erhält man bei gleichen Wurzeln ω, so dass hier ein wesentlicher Unterschied nicht eintritt. Eine eigene Betrachtung erfordert der bei der vorstehenden Skizzirung ausgeschlossene Fall, dass eine Transformation der Gruppe mit allen andern Transformationen vertauschbar ist. Indessen lässt sich auch hier die erforderliche Aenderung leicht angeben. Dagegen wird die vorstehende Darstellung der Gruppe ganz unmöglich, wenn alle Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ identisch verschwinden. Auch hier stelle ich eine gewisse einfache Form auf, aus welcher sich manche Eigenschaften der Gruppe leicht ersehen lassen und welche deshalb als eine kanonische wohl betrachtet werden kann. Aber diese Form hat nicht die hervorragenden Eigenschaften, welche der vorhin mitgetheilten Form eigen sind und welche darauf hinauskommen, dass die meisten Jacobi'schen Relationen von selbst erfüllt sind und unter den nicht identisch befriedigten die unabhängigen von den abhängigen sich unmittelbar abtrennen. Diese Gruppen gehören zu einer Classe, welche Herr Engel ganz vor kurzem betrachtet hat (Leipziger Berichte 1887, S. 95ff), nämlich zu denen, in welchen keine dreigliedrige Untergruppe von der

Zusammensetzung der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit (Kegelschnittsgruppen) enthält. Von jeder solchen Gruppe beweist er, dass sie eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält, dass hierin wieder eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe enthalten ist u. s. w. Ausser den Gruppen vom Range Null gehören dieser von Herrn Engel betrachteten Classe diejenigen Gruppen an, für welche alle Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ sich durch lineare Functionen von $\eta_1 \ldots \eta_r$ darstellen lassen. Für letztere folgt der Engel'sche Satz aus § 4 unserer Arbeit, und hierfür war mir Satz und Beweis schon früher bekannt. Die Darstellung in § 9 für $l=0$ habe ich erst gefunden, nachdem mir Herr Engel seinen Satz mitgetheilt und den Beweis skizzirt hatte; indessen theilte er mir damals die Lie'sche Darstellung dieser Gruppen noch nicht mit; ich würde sonst einerseits leichter zu meiner Darstellung gekommen sein und dieselbe andererseits in grössere Uebereinstimmung mit der Lie'schen gebracht haben.

Um die unendlich kleine Transformation $\Sigma\eta_\nu X_\nu f$ zu bezeichnen, kommt es nur auf die Verhältnisse $\eta_1 : \eta_2 : \cdots : \eta_r$ an, so dass es gestattet ist, alle η_ι mit derselben von Null verschiedenen Zahl zu multipliciren. Wir ordnen daher mit den Herren Lie und Engel*) den sämmtlichen infinitesimalen Transformationen der Gruppe eindeutig und stetig die Punkte eines $(r-1)$-dimensionalen projectiven Raumes zu und betrachten $\eta_1 \ldots \eta_r$ als die homogenen Coordinaten des zugeordneten Punktes, des Bildpunktes der Transformation $\Sigma\eta_\iota X_\iota f$. Wenn die Transformationen $\Sigma\eta_\iota X_\iota f$ und $\Sigma\eta_i' X_\iota f$ nicht vertauschbar sind, so führt die Operation $(\Sigma\eta_\iota X_i,\ \Sigma\eta_i' X_\iota)$ wieder auf eine Transformation, und deren Bildpunkt wird als das Product der Punkte (η) und (η') bezeichnet.

Vorläufig lege ich nur einen Theil meiner Untersuchungen vor; die Fortsetzung gedenke ich bald folgen zu lassen.

§ 1.

Ein merkwürdiges Gleichungssystem zwischen den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gehen wir von den Gleichungen aus:

$$(1) \qquad (X_\iota X_\varkappa) = \sum_\sigma c_{\iota\varkappa\sigma} X_\sigma f,$$

$$(2) \qquad \sum_\varrho \left\{ c_{\varkappa\lambda\varrho}(X_\varrho X_\iota) + c_{\lambda\iota\varrho}(X_\varrho X_\varkappa) + c_{\iota\varkappa\varrho}(X_\varrho X_\lambda) \right\} = 0.$$

*) Engel, zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformations-Gruppen. Leipziger Berichte 1886. S. 83—94.

Unsere Aufgabe wird es sein, aus dem System von Gleichungen zwischen den $c_{\iota\varkappa\varrho}$, welches durch diese beiden Gleichungen dargestellt wird, Schlüsse über die Zusammensetzung von Gruppen zu ziehen. Eine Reihe von Folgerungen ergiebt sich aus einem gewissen Gleichungssystem, welches aus dem ursprünglich gegebenen leicht durch blosse Summation erhalten werden kann. Dieses Gleichungssystem ist:

$$(3)\qquad \sum_{\varkappa\lambda} c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\lambda} = 0,$$

$$(4)\qquad \sum_{\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\beta\varkappa} c_{\mu\gamma\lambda} + c_{\alpha\gamma\varkappa} c_{\mu\beta\lambda})\, c_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

$$(5)\qquad \sum_{\varkappa\lambda\mu\nu} (c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\mu\gamma\nu}\, c_{\nu\delta\lambda} + c_{\alpha\gamma\varkappa}\, c_{\mu\delta\nu}\, c_{\nu\beta\lambda} + c_{\alpha\delta\varkappa}\, c_{\mu\beta\nu}\, c_{\nu\gamma\lambda})\, c_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

. . . .

$$(6)\qquad \sum_{\iota\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_s} \big(c_{\alpha\beta_1\iota}\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} + c_{\alpha\beta_2\iota}\, c_{\beta_3\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_4\varkappa_2\varkappa_4} \cdots c_{\beta_1\varkappa_s\varkappa_1} + \cdots$$
$$\cdots + c_{\alpha\beta_s\iota}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_{s-1}\varkappa_s\varkappa_1}\big)\, c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} = 0.$$

In der Gleichung (6) erstreckt sich die Summation nach den $s+1$ Marken $\iota, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_s$ über die Zahlen $1 \ldots r$; $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_s$ sind $s+1$ feste Marken; in der Klammer stehen s Producte, von denen jedes folgende aus dem vorangehenden erhalten wird, wenn man $\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_s$ durch $\beta_2\beta_3\beta_4 \ldots \beta_1$ cyklisch ersetzt.

Die erste dieser Gleichungen ist bereits früher von Herrn Engel*) aufgestellt und bewiesen; die übrigen dürften bisher nicht veröffentlicht sein.

Damit der Beweis für die Formel (6) recht deutlich hervortritt; führen wir den Beweis für die Formeln (4) und (5) aus und wiederholen den Beweis, den Herr Engel für die Formel (3) gegeben hat.

Nach der Gleichung (2) ist:

$$\sum_{\varkappa} (c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\lambda} + c_{\beta\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\lambda} + c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\beta\lambda}) = 0.$$

Summiren wir nach λ, so heben sich die beiden letzten Producte weg und wir erhalten die Formel (3).

Um die Relation (4) zu bilden, gehen wir von den beiden Gleichungen aus:

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\beta\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu} + c_{\beta\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu} + c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\beta\mu})\, c_{\gamma\mu\lambda} = 0,$$

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\gamma\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu} + c_{\gamma\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu} + c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\gamma\mu})\, c_{\beta\mu\lambda} = 0$$

*) Leipziger Berichte 1886. p. 89.

und addiren dieselben. Nun ist

$$\sum c_{\beta\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu}\, c_{\gamma\mu\lambda} + \sum c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\gamma\mu}\, c_{\beta\mu\lambda} = 0,$$

wie man sofort sieht, wenn man in der zweiten Summe die Summationsbuchstaben $\varkappa\,\lambda\,\mu$ durch $\mu\,\varkappa\,\lambda$ ersetzt; ebenso ist

$$\sum c_{\lambda\alpha\varkappa}\, c_{\varkappa\beta\mu}\, c_{\gamma\mu\lambda} + \sum c_{\gamma\lambda\varkappa}\, c_{\varkappa\alpha\mu}\, c_{\beta\mu\lambda} = 0,$$

wo $\varkappa\,\lambda\,\mu$ der zweiten Summe durch $\lambda\,\mu\,\varkappa$ zu ersetzen ist. Somit erhält man die Gleichung (4).

Zu der Gleichung (5) gelangt man auf folgendem Wege. Man bilde die Gleichung:

$$\sum_{\iota\varkappa\lambda\mu} (c_{\alpha\beta\iota}\, c_{\iota\varkappa\lambda} + c_{\beta\varkappa\iota}\, c_{\iota\alpha\lambda} + c_{\varkappa\alpha\iota}\, c_{\iota\beta\lambda})\, c_{\gamma\lambda\mu}\, c_{\delta\mu\varkappa} = 0,$$

und bilde noch diejenigen beiden Gleichungen, welche man hieraus erhält, wenn man $\beta\,\gamma\,\delta$ durch $\gamma\,\delta\,\beta$ und durch $\delta\,\beta\,\gamma$ ersetzt. Die linke Seite einer jeden dieser drei Gleichungen enthält drei Summen (nach ι, $\varkappa$, λ, μ). Die dritte Summe der ersten Reihe ist entgegengesetzt gleich der zweiten Summe der zweiten Gleichung; ebenso die dritte Summe der zweiten entgegengesetzt gleich der zweiten Summe der dritten Gleichung, und die dritte Summe der dritten Gleichung entgegengesetzt gleich der zweiten Summe der ersten. Addirt man also die drei Gleichungen, so bleiben nur die ersten Summen, und diese liefern die Gleichung (5).

Zum Beweise von (6) bilde man die Gleichung:

$$\sum_{\iota,\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_s} (c_{\alpha\beta_1\iota}\, c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} + c_{\beta_1\varkappa_1\iota}\, c_{\iota\alpha\varkappa_2} + c_{\varkappa_1\alpha\iota}\, c_{\iota\beta_1\varkappa_2})\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} = 0.$$

Dieselbe Gleichung bilde man, indem man $\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_s$ durch eine cyklische Vertauschung $\beta_2\beta_3\beta_4 \ldots \beta_1$; $\beta_3\beta_4\beta_5 \ldots \beta_2$; …; $\beta_s\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{s-1}$ ersetzt. Nun ist

$$\sum c_{\beta_1\varkappa_1\iota}\, c_{\iota\alpha\varkappa_2}\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1}$$

entgegengesetzt gleich

$$\sum c_{\varkappa_1\alpha\iota}\, c_{\iota\beta_2\varkappa_2}\, c_{\beta_3\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_4\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_1\varkappa_s\varkappa_1},$$

wie man unmittelbar sieht, wenn man die Summationsbuchstaben $\iota\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4 \ldots \varkappa_s$ der zweiten Summe durch $\varkappa_1\varkappa_s\iota\varkappa_2\varkappa_3 \ldots \varkappa_{s-1}$ ersetzt. Somit ist die zweite Summe in jeder Gleichung entgegengesetzt gleich der dritten Summe der folgenden Gleichung, und die zweite Summe der s^{ten} Gleichung entgegengesetzt gleich der dritten Summe in der ersten. Werden also die s so gebildeten Gleichungen addirt, so bleibt jedesmal nur das erste Glied, so dass die Richtigkeit von (6) bewiesen ist.

§ 2.

Die Invarianten einer gewissen linearen Gruppe, welche zu der gegebenen Gruppe adjungirt ist.

Mit jeder Transformationsgruppe stehen zwei Gruppen von linearen Transformationen in enger Beziehung. Die einzelnen infinitesimalen Transformationen der einen werden für $\varkappa = 1 \ldots r$ dargestellt durch das Gleichungssystem:

$$dx_\iota = dt \sum_\varrho c_{\varrho \varkappa \iota}\, x_\varrho,$$

oder bei der symbolischen Bezeichnung des Herrn Lie durch die r Gleichungen:

$$\sum_{\iota\varrho} c_{\varrho\varkappa\iota}\, x_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\iota}.$$

Diese Gruppe bezeichnen die Herren Lie und Engel*) als die *adjungirte lineare Gruppe.*

Eine zweite ist

$$d\eta_\iota = dt \sum_\varrho \eta_\varrho\, c_{\iota\varkappa\varrho} \quad \text{oder} \quad \sum_{\iota\varrho} \eta_\varrho\, c_{\iota\varkappa\varrho} \frac{\partial f}{\partial \eta_\iota}.$$

Diese wird als die *zweite adjungirte lineare Gruppe* bezeichnet. Beide sind in derselben Weise zusammengesetzt wie die gegebene.

Mit den Invarianten der zweiten adjungirten Gruppe habe ich mich früher beschäftigt (Programm 1886), die Invarianten der andern will ich jetzt herleiten.

Zu dem Ende stelle ich die Gleichung auf:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \sum\limits_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho 11} - \omega & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 21} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 1} \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 12} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 22} - \omega & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1 r} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 2 r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r r} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Der Kürze wegen setzen wir:

$$(8) \qquad \sum_\varrho \eta_\varrho\, c_{\varrho\varkappa\lambda} = \gamma_{\varkappa\lambda}(\eta) = \gamma_{\varkappa\lambda},$$

und können dann die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \omega & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{r1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} - \omega & \cdots & \gamma_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{1r} & \gamma_{2r} & \cdots & \gamma_{rr} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

*) Briefliche Mittheilung. Man vergl. Engel, Leipziger Berichte 1886. S. 88

Da $c_{\iota\varkappa\lambda} + c_{\varkappa\iota\lambda} = 0$ ist, so ist auch

$$\sum_{\sigma} \eta_\sigma \gamma_{\sigma\lambda} = \sum_{\varrho\sigma} \eta_\varrho \eta_\sigma c_{\varrho\sigma\lambda} = 0$$

und daher verschwindet die Determinante der $\gamma_{\iota\varkappa}$ identisch; es ist:

$$(9) \qquad |\gamma_{\iota\varkappa}| = 0.$$

Entwickeln wir also die Gleichung (7) nach Potenzen von ω, so erhalten wir:

$$(10) \quad \omega^r - \psi_1(\eta)\cdot\omega^{r-1} + \psi_2(\eta)\cdot\omega^{r-2} - \psi_3(\eta)\omega^{r-3} + \cdots \pm \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0,$$

Für $\nu = 1 \cdots r-1$ ist hier jedes ψ_ν, wenn es nicht identisch verschwindet, eine homogene Function ν^{ten} Grades der Grössen $\eta_1 \ldots \eta_r$.

Jetzt gilt der Satz:

Die Coefficienten $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta) \ldots \psi_{r-1}(\eta)$ *in der Gleichung* (10) *sind invariante Functionen der adjungirten linearen Gruppe*,

oder mit andern Worten:

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_\varrho c_{\varrho 11} - \omega & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 21} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 1} \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 12} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 22} - \omega & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1 r} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 2 r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r r} - \omega \end{vmatrix}$$

ändert sich bei beliebigem Werthe von ω *nicht, wenn man sie irgend einer Transformation derjenigen Gruppe unterwirft, welche durch die* r *unendlich kleinen Transformationen*

$$\mathrm{H}_\alpha f = \sum_{\varrho\iota} \eta_\varrho c_{\varrho\alpha\iota} \frac{\partial f}{\partial \eta_\iota}$$

bestimmt wird.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für die niedrigsten Functionen ψ_1, ψ_2, ψ_3. Es ist $\psi_1 = \sum_{\iota\sigma} \eta_\iota c_{\iota\sigma\sigma}$. Unter Anwendung der inf. Transformation $\mathrm{H}_\alpha f$ hat man $d\eta_\iota$ zu ersetzen durch $dt \sum_{\varrho} \eta_\varrho c_{\varrho\alpha\iota}$; also ist

$$d\psi_1 = -dt \sum_{\iota\varrho\sigma} \eta_\varrho c_{\varrho\alpha\iota} c_{\iota\sigma\sigma},$$

wo der Coefficient von jedem η_ϱ infolge von (3) verschwindet. Da also durch jede inf. Transformation der Gruppe die Function ψ_1 ungeändert bleibt, so ändert sie sich auch nicht bei einer beliebigen der Gruppe angehörenden Transformation.

Der Coefficient ψ_2 von ω^{r-2} ist

$$\underset{(\mu\lambda)}{S}(\gamma_{\lambda\lambda}\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\mu\lambda}),$$

wo nur die verschiedenen Combinationen $(\lambda\mu)$ aus der Reihe $1 \ldots r$ zu nehmen sind. Statt dessen können wir setzen:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}(\gamma_{\lambda\lambda}\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\mu\lambda})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\gamma\varkappa\lambda\mu}\eta_\gamma\eta_\varkappa(c_{\gamma\lambda\lambda}c_{\varkappa\mu\mu} - c_{\varkappa\lambda\mu}c_{\gamma\mu\lambda}).\end{aligned}$$

Somit ist unter Anwendung der inf. Transformation $\mathsf{H}_\alpha f$:

$$d\psi_2 = -\frac{1}{2}\,dt\sum_{\beta\gamma\varkappa\lambda\mu}\eta_\beta\eta_\gamma c_{\alpha\beta\varkappa}(c_{\gamma\lambda\lambda}c_{\varkappa\mu\mu} - c_{\varkappa\lambda\mu}c_{\gamma\mu\lambda}).$$

Hier ist der Coefficient von $-\frac{1}{2}\,dt\cdot\eta_\beta\eta_\gamma$:

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu}\{(c_{\alpha\beta\varkappa}c_{\gamma\lambda\lambda}c_{\varkappa\mu\mu} + c_{\alpha\gamma\varkappa}e_{r\lambda\lambda}c_{\varkappa\mu\mu}) - c_{\varkappa\lambda\mu}(c_{\alpha\beta\varkappa}c_{\gamma\mu\lambda} + c_{\alpha\gamma\varkappa}c_{\beta\mu\lambda})\}.$$

Jede der beiden ersten Summen verschwindet wegen der Relation (3), der übrig bleibende Theil wegen (4). Somit ist in der That: $d\psi_2(\eta) = 0$.

Ganz entsprechend ist:

$$\psi_3 = \frac{1}{6}\sum_{\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu}\eta_\gamma\eta_\delta\eta_\varkappa\begin{vmatrix}c_{\varkappa\lambda\lambda} & c_{\varkappa\lambda\mu} & c_{\varkappa\lambda\nu}\\ c_{\gamma\mu\lambda} & c_{\gamma\mu\mu} & c_{\gamma\mu\nu}\\ c_{\delta\nu\lambda} & c_{\delta\nu\mu} & c_{\delta\nu\nu}\end{vmatrix},$$

also unter Anwendung derselben inf. Transformation:

$$d\psi_3 = -\frac{1}{6}\,dt\sum_{\substack{\beta\gamma\delta\\ \varkappa\lambda\mu\nu}}\eta_\beta\eta_\gamma\eta_\delta c_{\alpha\beta\varkappa}\begin{vmatrix}c_{\varkappa\lambda\lambda} & c_{\varkappa\lambda\mu} & c_{\varkappa\lambda\nu}\\ c_{\gamma\mu\lambda} & c_{\gamma\mu\mu} & c_{\gamma\mu\nu}\\ c_{\delta\nu\lambda} & c_{\delta\nu\mu} & c_{\delta\nu\nu}\end{vmatrix}.$$

Bis auf denjenigen Theil, welcher infolge der Relation (3) und (4) verschwindet, ist der Coefficient von

$$-\frac{1}{6}\,dt\,\eta_\beta\eta_\gamma\eta_\delta \text{ gleich:}$$

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu\nu}c_{\varkappa\lambda\mu}(c_{\alpha\beta\varkappa}c_{\gamma\mu\nu}c_{\delta\nu\lambda} + \cdots),$$

wo in der Klammer alle diejenigen Glieder hinzuzufügen sind, welche aus dem hingeschriebenen durch Permutation von $\beta\gamma\delta$ erhalten werden. Diese Permutationen lassen sich in zwei Reihen von Cyklen zerlegen; die Summe eines jeden Cyklus verschwindet wegen (5); also ist $d\psi_3 = 0$.

In derselben Weise können wir fortfahren. Es ist:

$$\psi_s(\eta) = \frac{1}{s!}\sum \eta_\iota\,\eta_{\beta_2}\eta_{\beta_3}\cdots\eta_{\beta_s}\begin{vmatrix} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_1} & c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} & \cdots & c_{\iota\varkappa_1\varkappa_s} \\ c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_1} & c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_2} & \cdots & c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} & c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_2} & \cdots & c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_s}\end{vmatrix}.$$

Wenden wir also wieder die inf. Transformation an:

$$d\eta_\iota = -\,dt\sum_{\beta_1}\eta_{\beta_1}c_{\alpha\beta_1\iota},$$

so ist bis auf solche Glieder, deren Verschwinden aus Gl. (3), (4), (5) und den entsprechenden für $4, 5 \cdots s-1$ folgt, der Coefficient von

$$-\frac{dt}{s!}\eta_{\beta_1}\cdots\eta_{\beta_s} \text{ gleich:}$$

$$c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2}\left(c_{\alpha\beta_1\iota}\,c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\,c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4}\cdots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1}+\cdots\right),$$

wo in der Klammer diejenigen Glieder hinzuzufügen sind, welche sich aus dem niedergeschriebenen Producte durch Permutation von $\beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ ergeben. Da alle Permutationen sich in eine Reihe von Cyklen zerlegen, so folgt der Satz aus (6). *)

---

*) Herr Engel, dem ich Ende Juli 1886 den vorstehenden Satz nebst dem hier gegebenen Beweise mittheilte, hat für den Satz einen andern Beweis geliefert, welchen ich hier wörtlich folgen lasse.

„Ich setze

$$B_\varkappa f = \sum_{ij}^{1\cdots r} c_{jki}y_j\frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \sum_1^r{}_j\, c_{jki}y_j - \varepsilon_{ki}\,\omega = u_{ki},$$

wo $\varepsilon_{ik}=0$ für $i \neq k$, und $\varepsilon_{ii}=1$. Dann sei

$$\Delta = \sum \pm u_{11}\ldots u_{rr};$$

es soll bewiesen werden, dass $B_k\Delta \equiv 0$.

Ich finde

$$B_s\Delta = \sum_{ki}^{1\cdots r}\frac{\partial\Delta}{\partial u_{\varkappa i}}B_s u_{ki},$$

$$B_s u_{ki} = \sum_{\nu j}^{1\cdots r} c_{jki}\,c_{\nu sj}\,y_\nu,$$

$$\sum_1^r{}_j\left(c_{\nu sj}\,c_{jki}+c_{skj}\,c_{j\nu i}+c_{k\nu j}\,c_{jsi}\right)=0,$$

also wird

$$B_s u_{ki} = \sum_1^r{}_j\, c_{skj}\sum_1^r{}_\nu\, c_{\nu ji}y_\nu + \sum_1^r{}_j\, c_{jsi}\sum_1^r{}_\nu\, c_{\nu kj}y_\nu$$

$$= \sum_1^r{}_j\, c_{skj}\left(u_{ji}+\varepsilon_{ji}\,\omega\right)+\sum_1^r{}_j\, c_{jsi}\left(u_{kj}+\varepsilon_{kj}\,\omega\right);$$

Von den hier betrachteten Functionen $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ ist die Function ψ_1 bereits vor längerer Zeit von Herrn Lie betrachtet. Derselbe hat nämlich den Satz aufgestellt*), dass wenn nicht alle Ausdrücke $\sum c_{\alpha\lambda\lambda}$ verschwinden, (wenn also die Function $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet), die Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe besitzt, und dass diese durch $\psi_1(\eta)=0$ dargestellt wird. Daraus folgt dann (Pr. 1886, S. 11), dass die von mir eingeführte Zahl p kleiner als r ist. Herr Engel hat für die beiden genannten Sätze einen sehr einfachen Beweis geliefert**). Seinem Beweise kann man leicht eine Form geben, die mit der in den folgenden Untersuchungen angewandten Methode eng zusammenhängt. Dennoch halte ich es nicht für überflüssig, aus der Formel (3), auf die sich auch Hr. Engel stützt, einen weiteren Beweis herzuleiten. Nur beweise ich die Sätze in der entgegengesetzten Reihenfolge und zeige zunächst:

Wenn $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet, so genügen die Coordinaten $\zeta_1 \dots \zeta_r$ derjenigen Transformationen, zu denen man durch die Operation

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum \eta_\iota' X_\iota\right) = \sum \zeta_\varrho X_\varrho f$$

bei ganz beliebigen Werthen von η und η' gelangt, der Gleichung

$$\psi_1(\zeta) = 0.$$

In der That seien $\sum \eta_\iota X_\iota f$ und $\sum \eta_\iota' X_\iota f$ zwei beliebige inf. Transformationen, und es sei

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum \eta_\iota' X_\iota\right) = \sum \zeta_\varrho X_\varrho f,$$

so ist

$$\zeta_\varrho = \sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho},$$

---

da $(c_{ski} + c_{ksi})\ \omega$ verschwindet, ist

$$B_s u_{ki} = \sum_1^r {}^j (c_{skj} u_{ji} + c_{jsi} u_{kj}).$$

$$B_s \Delta = \sum_{kj}^{1\dots r} c_{skj} \sum_1^r {}^i u_{ji} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{ki}} + \sum_{ij}^{1\dots r} c_{jsi} \sum_1^r {}^k u_{kj} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{ki}}$$

$$= \Delta \sum_{kj}^{1\dots r} c_{skj}\, \varepsilon_{jk} + \Delta \sum_{ij}^{1\dots r} c_{jsi}\, \varepsilon_{ji}$$

$$= \Delta \left\{ \sum_1^r {}^k c_{skk} + \sum_1^r {}^i c_{isi} \right\} \equiv 0.\text{“}$$

*) Archiv for Math. og Naturw. X, 88.

**) Leipziger Berichte 1886, S. 89.

also ist

$$\psi_1(\zeta) = \sum_{\varrho\sigma} \zeta_\varrho c_{\varrho\sigma\sigma} = \sum_{\iota\varkappa\varrho\sigma} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho} c_{\varrho\sigma\sigma} = 0$$

infolge der Relation (3).

Der Bildpunkt einer jeden inf. Transformation, zu der man durch die Operation $\left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \eta_\iota' X_\iota\right)$, oder durch Multiplication der Punkte η und η' gelangt, gehört also immer der Ebene $\psi_1(\eta) = 0$ an. Somit wird auch der Bildpunkt dieser Ebene angehören, wenn der eine der gegebenen Punkte auf ihr angenommen wird; d. h. diese Ebene stellt eine invariante Untergruppe dar. Das ist aber der von Herrn Lie zuerst bewiesene Satz.

§ 3.

Herleitung einer für die Gruppe charakteristischen Gleichung.

Die beiden vorangehenden Paragraphen wurden vorausgeschickt, um die folgenden Entwicklungen recht im Zusammenhang darlegen zu können. Deshalb habe ich auch die Gleichung (7) aufgestellt, ohne das Problem zu erwähnen, welches naturgemäss auf diese Gleichung führt. Das soll jetzt geschehen, und dann wird es uns möglich sein, aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze weitere Folgerungen zu ziehen.

Jede zweigliedrige Gruppe, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind, enthält eine eingliedrige Hauptuntergruppe, und wenn $X_1 f$ dieselbe für die durch $X_1 f$ und $X_2 f$ bestimmte Gruppe darstellt, so ist:

$$(X_1 X_2) = \omega X_1 f,$$

wo ω von null verschieden ist.

Wir suchen jetzt diejenigen zweigliedrigen Untergruppen der vorgelegten Gruppe $(X_1 X_2 \ldots X_r)$, in denen eine gegebene inf. Transformation $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ enthalten ist. Zunächst sollen die Transformationen der gesuchten zweigliedrigen Gruppen nicht vertauschbar sein, und $(\zeta_1 \ldots \zeta_r)$ soll die eingliedrige Hauptuntergruppe darstellen. Dann kommt die Aufgabe, alle zweigliedrige Untergruppen zu suchen, denen die gegebene Transformation $\eta_1 \ldots \eta_r$ angehört, darauf hinaus, $r+1$ Grössen $\zeta_1 \ldots \zeta_r$, ω so zu bestimmen, dass die Gleichung besteht:

$$(11) \qquad \left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \zeta_\iota X_\iota\right) = \omega \sum \zeta_\iota X_\iota f.$$

Diese Gleichung liefert auch die zweigliedrigen Untergruppen mit vertauschbaren Transformationen, da alsdann $\omega = 0$ wird. Nur wenn die gegebene Transformation $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ die Hauptuntergruppe für eine zweigliedrige Untergruppe darstellt, muss man von einer andern Gleichung ausgehen. Wir werden aber zeigen, dass dies nur für ausgezeichnete Lagen des Punktes $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ möglich ist, so dass wir von diesem Falle absehen können.

Indem wir in die Gleichung (11) aus (1) die Werthe einsetzen, erhalten wir eine Gleichung, welche in die folgenden r Gleichungen zerfällt:

$$\sum_{\iota \varkappa} \eta_\iota \xi_\varkappa c_{\iota \varkappa \varrho} = \omega \xi_\varrho. \tag{12}$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, hat man bekanntlich zunächst ω vermittelst der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sum \eta_\varrho c_{\varrho 11} - \omega & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 21} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 1} \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 12} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 22} - \omega & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \eta_\varrho c_{\varrho 1 r} & \sum \eta_\varrho c_{\varrho 2 r} & \cdots & \sum \eta_\varrho c_{\varrho r r} - \omega \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

zu berechnen. Es ist dies dieselbe Gleichung, welche wir bereits vorhin aufgestellt und auch in der Form

$$\omega^r - \omega^{r-1} \psi_1(\eta) + \omega^{r-2} \psi_2(\eta) - \cdots \pm \omega \psi_{r-1}(\eta) = 0 \tag{10}$$

geschrieben haben.

Zu jeder von null verschiedenen Wurzel ω lässt sich ein System von Grössen ξ bestimmen, welches der Gl. (12) und damit auch der Gl. (11) genügt. Wenn aber ω eine α-fache von null verschiedene Wurzel ist, und es verschwinden für diesen Werth von ω alle Unterdeterminanten $r - \alpha + 1^{\text{ten}}$ Grades auf der linken Seite von (7), so lassen sich α Systeme $\xi, \xi', \xi'' \ldots \xi^{(\alpha-1)}$ derartig bestimmen, dass für ganz beliebige Coefficienten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{\alpha-1}$ die Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} &\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum \left(\lambda \xi_\iota + \lambda_1 \xi_\iota' + \lambda_2 \xi_\iota'' + \cdots + \lambda_{\alpha-1} \xi_\iota^{(\alpha-1)}\right) X_\iota\right) \\ &\qquad = \omega \sum_\iota \left(\lambda \xi_\iota + \lambda_1 \xi_\iota' + \lambda_2 \xi_\iota'' + \cdots + \lambda_{\alpha-1} \xi_\iota^{(\alpha-1)}\right) X_\iota f. \end{aligned}$$

In diesem Falle geht durch den Bildpunkt der gegebenen Transformation $(\eta_1 \ldots \eta_r)$ eine α-dimensionale Ebene, in welcher jede durch diesen Punkt gezogene Gerade eine zweigliedrige Untergruppe darstellt.

Wenn ferner ω eine von null verschiedene mehrfache Wurzel ist, für welche nicht wenigstens alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so liefert dieselbe nur eine einzige zweigliedrige Untergruppe. Aber man kann in diesem Falle α Systeme $\xi, \xi' \ldots \xi^{(\alpha-1)}$ so bestimmen, dass sich bei beliebigen Werthen von $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{\alpha-1}$ die Gleichung erfüllen lässt:

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum\left(\lambda \xi_\iota + \lambda_1 \xi_\iota' + \lambda_2 \xi_\iota'' + \cdots + \lambda_{\alpha-1} \xi^{(\alpha-1)}\right) X_\iota\right)$$
$$= \sum\left(\mu \xi_\iota + \mu_1 \xi_\iota' + \mu_2 \xi_\iota'' + \cdots + \mu_{\alpha-1} \xi^{(\alpha-1)}\right) X_\iota f,$$

wofern die $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{\alpha-1}$ in passender Weise als lineare Functionen von $\lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_{\alpha-1}$ bestimmt werden.

Dass von den r Wurzeln der Gl. (7) immer eine verschwindet, wurde bereits oben angegeben. Eine einfache verschwindende Wurzel führt aber zu keiner zweigliedrigen Untergruppe, sondern zu der selbstverständlichen Relation

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota,\ \sum \eta_\iota X_\iota\right) = 0.$$

Wenn aber $\omega = 0$ eine α-fache Wurzel der Gl. (7) ist und zugleich für $\omega = 0$ alle Unterdeterminanten $r - \alpha + 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so gelangen wir zu einer α-gliedrigen Untergruppe, deren Transformationen sämmtlich mit der gegebenen vertauscht werden können. Was endlich den Fall anbetrifft, dass $\omega = 0$ eine α-fache Wurzel ist, ohne dass die sämmtlichen Unterdeterminanten $r - \alpha + 1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so wollen wir zunächst davon absehen, da wir uns in § 10 um so ausführlicher mit diesem Fall beschäftigen müssen. Hier genüge die Bemerkung, dass dann entweder alle Functionen $\psi_1(\eta) \ldots \psi_{r-1}(\eta)$ für einen solchen Werth verschwinden oder alle Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ gleich null sind.

§ 4.

Eintheilung der Gruppen nach ihrem Range.

Schreibt man wieder die Gleichung (7) in der Form (10):

$$\omega^r - \omega^{r-1}\psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\psi_2(\eta) + \cdots + \omega\psi_{r-1}(\eta) = 0,$$

so soll die kleinste Zahl derjenigen Functionen, durch welche sich alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ ausdrücken lassen, mit l bezeichnet, und die Gruppen sollen nach dem zugehörigen Werthe von l eingetheilt werden. Für $l = 0$ verschwinden alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ identisch; für $l = 1$ lassen sich alle Functionen ψ_ν, soweit sie nicht identisch verschwinden, rational durch eine einzige Function von η darstellen. Auch für ein beliebiges l lassen sich l Functionen $P_1 \ldots P_l$ so wählen, dass alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ sich rational durch $P_1 \ldots P_l$ ausdrücken lassen. Diese Zahl l bezeichne ich als den *Rang* der Gruppe.

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$\gamma_{\varkappa\iota} = \sum_\varrho \eta_\varrho c_{\varrho\varkappa\iota},$$

so gilt für jede Function $\psi_\nu(\eta)$, wenn $\nu = 1 \cdots r-1$ genommen wird, nach den Entwicklungen des zweiten Paragraphen, die Gleichung

$$(13) \qquad \sum_\iota \frac{\partial \psi_\nu}{\partial \eta_\iota} \gamma_{\varkappa\iota} = 0.$$

Da sich die Functionen $\psi_\nu(\eta)$ durch die l Functionen $P_1 \ldots P_l$ ausdrücken lassen, so muss für jeden Werth von $\varkappa$ die Gleichung bestehen:

$$\gamma_{\varkappa 1} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta_1} + \gamma_{\varkappa 2} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta_2} + \cdots + \gamma_{\varkappa r} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta_r} = 0,$$

wo $\alpha = 1 \cdots l$ gesetzt werden muss. Hier sind aber die $P_1 \ldots P_l$ von einander unabhängig, und daher gilt der Satz:

Wenn die sämmtlichen Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ sich durch l von einander unabhängige Functionen darstellen lassen, so verschwinden alle Unterdeterminanten $r-l+1^{ten}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch. Zugleich sind natürlich auch $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-l+1}$ identisch gleich null.

Wenn wir mit diesem Satze eine im vorigen Paragraphen über das Verschwinden von ω gemachte Bemerkung verbinden, so kommen wir zu folgendem Ergebniss:

Wenn für eine Gruppe der Rang grösser ist als eins, so gehört jede Transformation einer $(l-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit an, deren Transformationen sämmtlich mit der gegebenen vertauschbar sind.

Ich erinnere hier daran, in welchem Sinne das Wort „vertauschbar“ nach der in der Einleitung getroffenen Festsetzung zu nehmen ist. Gehen wir also bei $l > 1$ von einer beliebigen endlichen Transformation aus, so ist dieselbe nicht nur mit allen denjenigen Transformationen vertauschbar, welche mit der gegebenen Transformation aus derselben infinitesimalen Transformation hergeleitet werden, sondern auch mit allen denjenigen Transformationen, für welche die zugehörigen unendlich kleinen Transformationen eine bestimmte $(l-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden.

Umgekehrt schliessen wir:

Geht durch jeden Punkt des Bildraumes eine $(k-1)$-dimensionale Ebene, welche lauter mit der gegebenen vertauschbare Transformationen abbildet, aber keine k-dimensionale derartige Ebene, so verschwinden natürlich $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-k+1}$ identisch; zugleich lassen sich alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{r-k}$ rational durch höchstens k Functionen darstellen, oder es ist $l \leq k$.

Speciell ergiebt sich der Satz:

Wenn es in einer Gruppe eine endliche Transformation giebt, welche nur vertauschbar ist mit den aus derselben infinitesimalen Transformation (wie sie selbst) hervorgehenden Transformationen, so lassen sich *alle $r-1$ Functionen $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{r-1}$ rational durch eine einzige Function darstellen.*

Jetzt kann der Lie'sche Satz, dass die Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe hat, wenn die Function $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet, in folgender Weise verallgemeinert werden:

Wählt man die l Functionen $P_1 \dots P_l$, durch welche sich die sämmtlichen $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ rational ausdrücken lassen, in der einfachsten Weise und ist dann eine derselben, etwa $P_1(\eta)$ eine lineare Function, so stellt $P_1(\eta) = 0$ eine invariante Untergruppe dar.

Der Beweis ist genau derselbe wie der für den Lie'schen Satz am Schluss von § 2 gegebene. Wenn wir setzen:

$$P_1(\eta) = \sum p_\iota \eta_\iota,$$

so ist nach (13) für jede Combination α, β:

$$\sum_\nu c_{\alpha\beta\nu} p_\nu = 0.$$

Bilden wir also

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \eta_\iota' X_\iota\right) = \sum \zeta_\varrho X_\varrho f,$$

so ist

$$\zeta_\varrho = \sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho},$$

also

$$P_1(\zeta) = \sum p_\varrho \zeta^\varrho = \sum_{\iota\varkappa\varrho} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho} p_\varrho,$$

so dass der Coefficient eines jeden Productes $\eta_\iota \eta_\varkappa'$ verschwindet, und der Bildpunkt einer jeden durch die Operation

$$\left(\sum \eta_\iota X_\iota, \sum \eta_\iota' X_\iota\right)$$

erhaltenen inf. Transformation auf der Ebene $P_1(\eta) = 0$ liegt.

Als speciellen Fall des vorstehenden Satzes erwähne ich:

Wenn eine der Functionen $\psi_2(\eta) \dots \psi_{r-1}(\eta)$ die Potenz einer linearen Function ist, so stellt deren Verschwinden eine invariante Untergruppe dar.

Man kann aber den Satz noch erweitern:

Wenn i unter den l Functionen $P_1 \dots P_l$, durch welche sich die Functionen $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ darstellen lassen, etwa $P_1 \dots P_i$ linear sind, so ist die Hauptuntergruppe höchstens $(r-i)$-gliedrig und in derjenigen Gruppe, welche durch die Gleichungen

$$P_1(\eta) = P_2(\eta) = \dots = P_i(\eta) = 0$$

dargestellt wird, enthalten oder mit ihr identisch. Für diese Hauptuntergruppe lassen sich die Functionen ψ^ν durch die Functionen $P_{i+1} \dots P_l$ darstellen.

Der Satz bedarf keines Beweises. Ich mache nur darauf aufmerksam, dass wenn alle Functionen $P_1 \ldots P_l$ linear sind, die Haupt-Untergruppe höchstens $r-1$-gliedrig und ihr Rang gleich null ist, so dass alle zweigliedrigen Untergruppen der letzteren vertauschbare Transformationen enthalten.

Mit den vorstehenden Sätzen hängen auch die folgenden auf's Engste zusammen:

Wenn eine Gruppe nicht ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so ist der Rang der letzteren kleiner als der der gegebenen Gruppe.

Besitzt eine Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, so ist der Rang der letzteren um eins kleiner als der der gegebenen Gruppe.

Hierbei ist nur vorausgesetzt, dass für die gegebene Gruppe selbst nicht bereits $l=0$ ist. Speciell folgt:

Wenn in einer r-gliedrigen Gruppe nicht mit jeder Transformation eine andere vertauschbar ist und zugleich entweder $\psi_1(\eta)$ nicht identisch verschwindet oder doch eine der Functionen $\psi_2(\eta) \ldots \psi_{r-1}(\eta)$ die Potenz einer linearen Function ist, so hat sie eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, für welche $l=0$ ist.

§ 5.

Die Haupttransformationen der in der Gruppe enthaltenen zweigliedrigen Untergruppen.

Wenn die inf. Transformation $\sum \eta_\iota' X_\iota f$ die eingliedrige Hauptuntergruppe und $\sum \eta_\iota X_\iota f$ eine beliebige Transformation einer zweigliedrigen Untergruppe ist, so müssen bei nicht-verschwindendem ω die Gleichungen (12) bestehen, denen wir jetzt die Form geben:

$$\text{(12a)} \qquad \sum_{\iota\varkappa} \eta_\iota \eta_\varkappa' c_{\iota\varkappa\varrho} = -\sum_\iota \eta_\iota \gamma_{\iota\varrho}' = \omega \eta_\varrho',$$

wenn für $\gamma_{\iota\varrho}(\eta')$ kurz $\gamma_{\iota\varrho}'$ geschrieben wird.

Wird wieder eine beliebige der Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ mit ψ_ν bezeichnet und ψ_ν' kurz statt $\psi_\nu(\eta')$ geschrieben, so ist nach (13):

$$\sum_\varrho \frac{\partial \psi_\nu'}{\partial \eta_\varrho'} \gamma_{\iota\varrho}' = 0.$$

Multipliciren wir also beide Seiten der Gl. (12a) mit $\frac{\partial \psi_\nu'}{\partial \eta_\varrho'}$ und summiren nach ϱ, so verschwindet die linke Seite und es ist bei nicht-verschwindendem Werthe von ω:

$$\text{(14)} \qquad \psi_1(\eta') = 0, \; \psi_2(\eta') = 0 \; \cdots \; \psi_{r-1}(\eta') = 0.$$

Daraus folgt der Satz:

Die Coefficienten $\eta_1' \dots \eta_r'$ *einer jeden Transformation* $\sum \eta_\iota' X_\iota f$, *welche die Haupttransformation für irgend eine der Gruppe angehörige zweigliedrige Untergruppe ist, genügen den Gleichungen* (14), *und die Gleichung* (7) *hat für dieselben nur verschwindende Wurzeln.*

Dieser Satz lässt auch folgenden Ausspruch zu:

Jeder Punkt, welcher die Haupttransformation einer in der Gruppe enthaltenen zweigliedrigen Untergruppe abbildet, liegt auf demjenigen Gebilde, welches durch das Verschwinden der Functionen $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ *dargestellt wird. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet also höchstens eine* $(r - l - 1)$*-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*

Es folgt aus den vorangehenden Entwicklungen keineswegs, dass jede Transformation, für welche die Gl.

$$\psi_1(\eta) = \psi_2(\eta) = \cdots = \psi_{r-1}(\eta) = 0$$

erfüllt werden, die Haupttransformationen einer zweigliedrigen Untergruppe sind; in der That genügen in vielen Gruppen die Coordinaten der bezeichneten Transformationen noch weiteren Gleichungen, und ihre Gesammtheit bildet also eine Mannigfaltigkeit von weniger als $r - l - 1$ Dimensionen.

Als Corollar zu dem vorangehenden Satze möge der folgende erwähnt werden:

Gehört eine Transformation, welche das Hauptelement einer zweigliedrigen Untergruppe ist, noch weiteren zweigliedrigen Untergruppen an, so sind deren Transformationen entweder mit einander vertauschbar, oder die gegebene Transformation ist auch für die weiteren Untergruppen das Hauptelement.

Dieser Satz kann uns dazu führen, die am Schlusse von § 3 aufgestellte Behauptung zu beweisen; wir werden aber dem Satze noch bei einer andern Betrachtung begegnen und dann wird sich die weitere Folgerung unmittelbar anschliessen.

Dieselbe Entwicklung, welche von der Formel (12a) zu (14) geführt hat, liefert bei leichter Aenderung der Buchstaben den folgenden Satz:

Die sämmtlichen zweigliedrigen Untergruppen, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind, bilden sich ab als Tangenten an ein $(r - l - 1)$*-dimensionales Gebilde und dieses wird durch das Verschwinden sämmtlicher Functionen* $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{r-2}$ *bestimmt.*

Ich hebe hierbei aber hervor, dass, selbst in dem Falle, wo alle Punkte des genannten Gebildes Haupttransformationen von zweigliedrigen Untergruppen abbilden, nicht immer die sämmtlichen Tangenten zweigliedrigen Untergruppen entsprechen. Mit Ausnahme der Kegelschnittsgruppe (s. u. § 8 am Ende) dürfte keine weitere Gruppe existiren, in welcher sämmtliche Tangenten an das Gebilde

$$\psi_1 = \cdots = \psi_{r-1} = 0$$

zweigliedrige Untergruppen abbilden.

§ 6.

Beispiele zu den vorstehenden Entwicklungen.

Als Beispiele zu den Resultaten, welche uns durch die vorangehenden Paragraphen geliefert sind, und zur Vorbereitung auf die im zweiten Theile durchzuführenden Untersuchungen wollen wir zwei allbekannte Classen von einfachen Gruppen etwas näher betrachten. Hierbei bezeichnen wir mit Herrn Lie eine Gruppe als einfach, wenn sie keine invariante Untergruppe besitzt.

Wir untersuchen zunächst diejenige Gruppe, welche die allgemeinste projective Umgestaltung eines l-dimensionalen Raumes liefert. Bei passender Wahl der Coordinaten $x_1 \dots x_l$ gelangt bei der allgemeinsten unendlich kleinen Umgestaltung der Punkt $(x_\varkappa)$ nach $(x_\varkappa + \delta x_\varkappa)$, wofern bei ganz beliebig gewählten unendlich kleinen Grössen $\alpha_{0\varkappa}$, $\alpha_{\varkappa 0}$, $\alpha_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1 \cdots l)$ die Gleichung besteht:

$$x_\varkappa + \delta x_\varkappa = \frac{x_\varkappa + \sum^\lambda \alpha_{\varkappa\lambda} x_\lambda + \alpha_{\varkappa 0}}{1 + \sum^\lambda \alpha_{0\lambda} x_\lambda}.$$

Demnach ist:

$$\delta x_\varkappa = \alpha_{\varkappa 0} + \sum^\lambda \alpha_{\varkappa\lambda} x_\lambda - \sum^\lambda \alpha_{0\lambda} x_\varkappa x_\lambda.$$

Indem man diejenigen Transformationen zu Grunde legt, für welche alle $\alpha_{\varrho\sigma}$ bis auf eines verschwindet, und indem man das nichtverschwindende gleich δt setzt, erhält man $l(l+2)$ infinitesimale Transformationen $X_{\varkappa 0}$, $X_{0\varkappa}$, $X_{\iota\varkappa}$, welche sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$\text{(a)} \qquad X_{\varkappa 0} = \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \quad X_{0\varkappa} = -\sum^\nu x_\varkappa x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad X_{\iota\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial x_\iota} x_\varkappa.$$

Wenn weder $\iota = \mu$, noch $\varkappa = \lambda$ ist, so ist $(X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0$. Dagegen ist im übrigen:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} &(X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = -X_{\iota\lambda} + \varepsilon_{\iota\lambda} X_{\varkappa\varkappa}, \\ &(X_{\varkappa 0} X_{0\lambda}) = -X_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda} \sum X_{\mu\mu}, \\ &(X_{0\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = -X_{0\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa 0}) = -X_{\iota 0}, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon_{\varkappa\lambda} = 1$ oder 0 ist, jenachdem $\varkappa$ und λ gleich oder ungleich sind.

Um zu zeigen, dass diese Gruppe einfach ist, gehen wir von einer beliebigen inf. Transformation $\sum \eta_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma} f$ aus. Wenn hier nicht alle $\eta_{\varrho 1}$ verschwinden, verbinden wir sie für $\nu = 0, 1 \cdots l$ mit allen $X_{1\nu}$ durch die Operation $\left(\sum \eta_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma}, X_{1\nu}\right)$; dann gelangt man mindestens zu einigen unter den Transformationen

$$X_{10} \cdots X_{l0}, \quad 2X_{11} + X_{22} + \cdots + X_{ll}, \quad X_{12} \cdots X_{1l}.$$

Eine beliebige unter diesen mit allen $l(l+2)$ zu Grunde gelegten inf. Transformationen führt nothwendig auf weitere, und die Wiederholung der Operation für diese auf alle inf. Transformationen. Die Gruppe hat also keine invariante Untergruppe.

Wir wollen einige Eigenschaften dieser Gruppe anführen und zunächst diejenigen Functionen angeben, welche durch alle Transformationen

$$\mathsf{H}_{\lambda\mu} f = \sum_{\iota,\varkappa,\varrho,\sigma} c_{\iota\varkappa,\lambda\mu,\varrho\sigma}\, \eta_{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\iota\varkappa}}$$

ungeändert bleiben, welche also nach einem Lie'schen Ausdrucke zu dieser Transformationsgruppe gehören. Diese lassen sich durch Einführung einer unbestimmten Grösse z in folgender Weise darstellen:

$$\text{(c)} \quad D(z) = \begin{vmatrix} -z + \eta_{11} + \cdots + \eta_{ll} & \eta_{10} & \eta_{20} & \cdots & \eta_{l0} \\ \eta_{01} & z + \eta_{11} & \eta_{21} & \cdots & \eta_{l1} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & z + \eta_{22} & \cdots & \eta_{l2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{0l} & \eta_{1l} & \eta_{2l} & \cdots & z + \eta_{ll} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante ist der Coefficient von z^{l+1} gleich -1, der von z^l gleich 0, und die Coefficienten der Potenzen $z^{l-1}, z^{l-2} \cdots z, z^0$ sind die gesuchten Functionen.

Da die Transformationen im Wesentlichen gleichartig sind, genügt es zu zeigen, dass die Function $D(z)$ durch irgend eine, etwa $\mathsf{H}_{12} f$, nicht geändert wird. Für diese Transformation hat man aber, wofern ϱ von 1 verschieden ist, zu ersetzen $d\eta_{\varrho 2}$ durch $dt \cdot \eta_{\varrho 1}$, und wenn σ von 2 verschieden ist, $d\eta_{1\sigma}$ durch $-dt\, \eta_{2\sigma}$; für $d\eta_{12}$ hat man aber beide Aenderungen vorzunehmen, welche sich sowohl bei der Annahme $\varrho = 1$, als für $\sigma = 2$ ergeben. Demnach besteht die durch die Transformation $\mathsf{H}_{12} f$ hervorgerufene Aenderung von $D(z)$, wofern dieselbe durch dt dividirt wird, in der Summe:

$$\begin{vmatrix} -z+\eta_{11}+\cdots+\eta_{11} & \eta_{10} & -\eta_{10} & \cdots & \eta_{10} \\ \eta_{01} & \eta_{11}+z & -\eta_{11} & \cdots & \eta_{l1} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & -\eta_{12} & \cdots & \eta_{l2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{0l} & \eta_{1l} & -\eta_{1l} & \cdots & z+\eta_{ll} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} -z+\eta_{11}+\cdots+\eta_{11} & \eta_{10} & \eta_{20} & \cdots & \eta_{l0} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{l2} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & z+\eta_{22} & \cdots & \eta_{l2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{0l} & \eta_{1l} & \eta_{2l} & \cdots & z+\eta_{ll} \end{vmatrix},$$

von denen die erste dadurch erhalten wird, dass man die dritte Verticalreihe von $D(z)$ durch $-\eta_{10}, \ldots -\eta_{l0}$ ersetzt, und die zweite dadurch, dass man die zweite Horizontalreihe durch $\eta_{02} \ldots \eta_{l2}$ ersetzt. Man übersieht aber sofort, dass diese Summe verschwindet.

Ganz ähnlich lassen sich diejenigen Functionen darstellen, welche durch die $l(l+2)$ inf. Transformationen

$$\sum_{\varrho,\sigma,\iota,\varkappa} \eta_{\varrho\sigma}\, c_{\varrho\sigma,\alpha\beta,\iota\varkappa} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\iota\varkappa}}$$

ungeändert bleiben. Diese werden bei beliebigem z, wenn man noch $\eta_{11}+\eta_{22}+\cdots+\eta_{ll}=\sigma$ setzt, durch die Determinante angegeben:

$$\text{(d)}\quad E(z)=\begin{vmatrix} -z+\frac{\sigma}{l+1} & \eta_{01} & \eta_{02} & \cdots & \eta_{0l} \\ \eta_{10} & z+\eta_{11}-\frac{\sigma}{l+1} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_{l0} & \eta_{l1} & & \cdots & z+\eta_{ll}-\frac{\sigma}{l+1} \end{vmatrix}$$

$$=-z^{l+1}+z^{l-1}P_1+P_2\cdot z^{l-2}+\cdots+P_{l-1}\cdot z+P_l.$$

Es wird nicht nöthig sein, den Beweis durchzuführen. Ebenso möge es gestattet sein, die folgenden Sätze ohne Beweis anzuführen.

Genügt das System $(\eta_{01}, \eta_{02} \ldots \eta_{ll})$ keiner der l Gleichungen

$$P_1=0,\ P_2=0 \cdots P_l=0,$$

so gehört die Transformation $\sum \eta_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma} f$ genau $l(l+1)$ zweigliedrigen Untergruppen ohne vertauschbare Elemente an. Die Hauptelemente aller auf diese Weise erhaltenen zweigliedrigen Untergruppen bilden nur eine $(2l-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Diese wird analytisch dargestellt durch das Verschwinden aller Unterdeterminanten zweiten Grades in der Determinante $E(z)$ für $z = 0$. Diese Mannigfaltigkeit gehört auch allen l Gebilden $P_1 = P_2 = \cdots = P_l = 0$ an.

Wenn ein Punkt Hauptpunkt einer zweigliedrigen Untergruppe ist und letztere nicht dem Gebilde $P_1 = \cdots = P_l = 0$ angehört, so ist der Punkt auch Hauptpunkt für eine $(l^2 - 1)$-gliedrige Schaar von zweigliedrigen Untergruppen, und alle diese bilden eine $(l^2 + 1)$-gliedrige Untergruppe.

Der Gruppe gehören allgemeine projective Gruppen des Ranges $1, 2 \ldots l - 1$ an. Die allgemeinen projectiven Gruppen des Ranges $l - 1$ gehören sämmtlich dem Gebilde $P_l = 0$ an; die des Ranges $l - 2$ liegen auf dem Gebilde $P_l = P_{l-1} = 0$, u. s. w. Endlich gehören die Kegelschnittsgruppen (allgemeine projective Gruppen für $l = 1$) den Gebilden $P_l = P_{l-1} = \cdots = P_2 = 0$ an.

Aus jeder allgemeinen projectiven Gruppe des Ranges l' lässt sich, wie man leicht übersieht und wie im zweiten Theile noch besonders hervorgehoben werden soll, eine zusammengesetzte Gruppe desselben Ranges l' bilden, deren Gliederzahl $l'^2 + 3l' + 1$ beträgt. Für $l' < l$ sind auch jedesmal solche als Untergruppen in der vorgelegten Gruppe enthalten, und zwar füllen die betreffenden Gruppen des Ranges $l - 1$ das Gebilde $P_l = 0$ an, die des Ranges $l - 2$ das Gebilde $P_l = P_{l-1} = 0$ u. s. w. Somit gehen durch jeden Punkt von $P_l = 0$ ebene Mannigfaltigkeiten von $(l-1)(l+2)$ Dimensionen; der Schnitt von $P_l = 0$ und $P_{l-1} = 0$ enthält $(l-2)(l+1)$-dimensionale, der Schnitt der λ Gebilde $P_l = 0$, $P_{l-1} = 0 \ldots P_{l-\lambda+1} = 0$ ebenso $(l-\lambda)(l-\lambda+3)$-dimensionale Ebenen.

Durch jeden Punkt des Bildraumes geht ein $(l-1)$-dimensionales ebenes Gebilde, dessen Punkte mit einander vertauschbare Transformationen abbilden. Durch $\frac{l(l+1)}{2}$ Punkte einer solchen Ebene gehen Kegelschnittsgruppen, welche Untergruppen der vorgelegten Gruppe sind.

Eine zweite Classe von einfachen Gruppen wird durch diejenigen continuirlichen projectiven Transformationen bestimmt, welche in einem Raume von mehr als drei Dimensionen ein eigentliches Gebilde zweiter Ordnung in sich verschieben, wobei als „eigentliches" Gebilde im Gegensatz zum Kegelgebilde ein solches verstanden wird, dessen Determinante nicht verschwindet. Diese Gruppe ist in derselben Weise gebildet, wie diejenige Gruppe eines $(m+1)$-dimensionalen Raumes, wenn alle Variabeln durch lineare ganze Transformationen geändert werden und eine eigentliche Form zweiten Grades ungeändert bleibt. Setzt man zwischen den $m+1$ Variabeln $x_1 \ldots x_{m+1}$ die Beziehung fest:

$$\text{(e)} \qquad x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1,$$

so sollen für die Gruppe die $\frac{m(m+1)}{2}$ inf. Transformationen

$$(e') \qquad X_{\iota\varkappa}f = x_\iota \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} - x_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_\iota}$$

zu Grunde gelegt werden. Hieraus folgt

$$(f) \qquad (X_{\iota\varkappa}X_{\iota\lambda}) = X_{\varkappa\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa}X_{\lambda\mu}) = 0,$$

wenn ι, $\varkappa$, λ, μ sämmtlich ungleich sind. Dass die so gebildeten Gruppen für $m > 3$ einfach sind, hat Herr Lie im zehnten Bande seines Archivs S. 412 bewiesen.

Die im Anfang von § 2 aufgestellten adjungirten linearen Gruppen werden für diese Gruppe identisch. Die Invarianten ergeben sich aus folgender Determinante, in welcher $\eta_{\iota\varkappa} + \eta_{\varkappa\iota} = 0$ zu nehmen ist:

$$(g) \qquad \begin{vmatrix} z & \eta_{12} & \cdots \eta_{1,m+1} \\ \eta_{21} & z & \eta_{2,m+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \eta_{m+1,1} & \eta_{m+1,2} & z \end{vmatrix} = z^{m+1} + P_1 z^{m-1} + P_3 z^{m-3} + \cdots$$

Daher ist $l = \frac{m+1}{2}$ oder $= \frac{m}{2}$, jenachdem m ungerade oder gerade ist. Ist m gerade, so sind die $2l^2$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung (7): $\pm\omega_\varkappa$, $\pm\omega_\varkappa \pm \omega_\lambda$; für ein ungerades m nehme man l Grössen $\pi_1 \ldots \pi_l$ und bilde daraus die $2l(l-1)$ Wurzeln $\pm\pi_\varkappa \pm \pi_\lambda$. Die ersteren $2l$ Wurzeln $\pm\omega_\varkappa$ für ein gerades m gehören einer $(4l-3)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, welche, durch das Verschwinden aller Ausdrücke $(\iota\varkappa\lambda\mu)$ und von $P_1 = \Sigma\eta_{\iota\varkappa}^2$ bestimmt wird.*) Dieses $(4l-3)$-fach ausgedehnte Gebilde hat ein $(4l-5)$-dimensionales Doppelgebilde, welches durch die Gleichungen

$$\sum\nolimits^{\varrho} \eta_{\iota\varrho}\,\eta_{\varkappa\varrho} = 0$$

bei beliebigen Werthen von ι und $\varkappa$ gegeben ist. Dieses Doppelgebilde liefert die zu den Wurzeln $\pm\omega_\iota \pm \omega_\varkappa$ gehörigen Hauptpunkte.

Für ein gerades m enthält die vorgelegte Gruppe solche Untergruppen, welche für $m' = 1 \cdots m-1$ in entsprechender Weise gebildet sind. Setzt man $m' = m - 1$, so haben die entsprechenden Untergruppen denselben Rang $l = \frac{m}{2}$ und erfüllen dieselbe Mannigfaltigkeit, wie die gegebene Gruppe, so dass jede Transformation der gegebenen Gruppe einer solchen Untergruppe angehört. Die entsprechend gebildeten Untergruppen des Ranges $l-1$, deren Gliederzahl $(l-1)(2l-1)$

*) Sollen alle $(\iota\varkappa\lambda\mu) = \eta_{\iota\lambda}\eta_{\lambda\mu} + \eta_{\iota\lambda}\eta_{\mu\varkappa} + \eta_{\iota\mu}\eta_{\varkappa\lambda}$ verschwinden, so ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass für $\eta_{12} \neq 0$ alle Ausdrücke $(12\lambda\mu)$ verschwinden, was $(l-1)(2l-1)$ Gleichungen liefert.

oder $(l-1)(2l-3)$ beträgt, gehören einer $(2l^2+l-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an u. s. w. In jeder $(l-1)$-dimensionalen Ebene des Bildraumes, welche durch einen beliebigen Punkt geht und lauter mit einander vertauschbare Transformationen abbildet, liegen nur einzelne Punkte, für welche die entsprechende infinitesimale Transformation einer Kegelschnittsgruppe angehört. Auch allgemeine projective Gruppen, deren Rang l' kleiner als l ist, gehören der gegebenen Gruppe an.

Diese Resultate ändern sich sehr wenig für ein ungerades m. Jede allgemeine Transformation gehört $2l(l-1)$ zweigliedrigen Untergruppen ohne vertauschbare Elemente an, und ihre Hauptpunkte füllen eine $(4l-7)$-dimensionale Mannigfaltigkeit an, für welche alle Gleichungen $(\iota\varkappa\lambda\mu)=0$ und $\sum^{\varrho}\eta_{\iota\varrho}\eta_{\varkappa\varrho}=0$ bestehen müssen. Damit eine Transformation $\sum\eta_{\iota\varkappa}X_{\iota\varkappa}f$ einer r-gliedrigen Untergruppe angehört, für welche $p=r$ ist, müssen die Coefficienten $\eta_{\iota\varkappa}$ gewissen Bedingungen genügen, die im einzelnen aufzuführen hier wohl nicht der Ort sein dürfte.

§ 7.

Die charakteristische Gleichung hat lauter ungleiche Wurzeln.

Wir machen eine Annahme, welche auf den ersten Blick recht allgemein scheinen könnte, welche aber wegen der zwischen den c bestehenden Bedingungen, wie aus den Entwicklungen des § 4 folgt, ganz speciellen Charakter hat. Wir setzen nämlich voraus, die Gleichung (7) habe für ein bestimmtes Werthsystem $\eta_1\ldots\eta_r$ keine zwei gleiche Wurzeln. Wie schon bemerkt, ist eine Wurzel gleich Null; die andern $\omega_1\ldots\omega_{r-1}$ sollen also unter einander und von Null verschieden sein. Zu jeder Wurzel ω_ν gehört ein einziges System von Coefficienten $\zeta_1^{(\nu)}\cdots\zeta_r^{(\nu)}$ und die $r-1$ hierdurch bestimmten infinitesimalen Transformationen $\sum_\iota\zeta_\iota^{(\nu)}X_\iota f$ sind unter einander und von der gegebenen Transformation $\sum\eta_\iota X_i f$ unabhängig. Wir können also diese r infinitesimalen Transformationen zur Bestimmung der Gruppe benutzen. Um sofort diejenige Form zu erhalten, welche für die weitere Untersuchung am geeignetsten ist, bezeichnen wir die gegebene Transformation als $X_{r-1}f$, die anderen als $X_1\ldots X_{r-2}$, X_r, so dass die Gleichungen bestehen:

$$(15)\quad (X_{r-1}X_1)=\omega_1X_1f,\ldots(X_{r-1}X_{r-2})=\omega_{r-2}X_{r-2}f, (X_{r-1}X_r)=\omega_rX_rf.$$

Indem wir die Jacobi'sche Relation für $r-1$, $\varkappa$, λ bilden, folgt:

$$(16)\qquad (\omega_\varkappa+\omega_\lambda-\omega_\mu)\,c_{\varkappa\lambda\mu}=0,$$

worin auch für $\nu = r - 1$ die Gleichung enthalten ist:

(16a) $$(\omega_\varkappa + \omega_\lambda)\, c_{\varkappa \lambda r-1} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass wenn nicht zwischen den Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_{r-2}, \omega_r$ der Gleichung (7) bestimmte Relationen bestehen, die $r-1$ infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_{r-2} f$, $X_r f$ eine Gruppe bestimmen, in welcher zwei beliebige Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Zu der eben gemachten Voraussetzung fügen wir jetzt eine weitere hinzu, nämlich die, dass von den $\frac{r(r-1)}{2}$ Transformationen $\sum_\varrho c_{\varkappa \lambda \varrho} X_\varrho f$ r von einander unabhängig sind, dass also $p = r$ ist. In diesem Falle muss wegen (16a) mindestens zu einer Wurzel die entgegengesetzt gleiche vorkommen. Es sei demnach $\omega_{r-2} + \omega_r = 0$ und $c_{r, r-2, r-1}$ von Null verschieden, so dass gesetzt werden kann:

$$(X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f.$$

Nun wenden wir die Jacobi'sche Relation auf die Nummern $r, r-2, \varkappa$ an, wo $\varkappa$ eine der Zahlen $1 \ldots r-3$ ist, und erhalten:

(17) $$\omega_\varkappa X_\varkappa f = \sum_\varrho \left\{ c_{r-2, \varkappa \varrho} (X_\varrho X_r) - c_{r \varkappa \varrho} (X_\varrho X_{r-2}) \right\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nicht verschwinden kann, so folgt aus dieser Gleichung in Verbindung mit (16), dass, wenn $\omega_\varkappa$ eine Wurzel ist, entweder $\omega_\varkappa + \omega_r$ oder $\omega_\varkappa - \omega_r$ eine neue Wurzel ist oder dass man aus $\omega_\varkappa$ sowohl durch Addition als Subtraction von ω_r eine neue Wurzel erhält.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, dürfen wir $\omega_r = 2$ setzen. Ist dann $\omega_\varkappa$ eine beliebige Wurzel, so ist auch mindestens eine der beiden Grössen $\omega_\varkappa + 2$ und $\omega_\varkappa - 2$ unter den Wurzeln enthalten. Wir gehen von einer beliebigen Wurzel $\omega_\varkappa$ aus und suchen alle diejenigen Wurzeln, zu denen man durch wiederholte Addition und Subtraction von 2 gelangt. Die Zahl derselben sei m, und der Einfachheit wegen mögen sie als $\omega_1 \ldots \omega_m$ bezeichnet werden. Da sie sich nur um Vielfache von 2 unterscheiden, so kann man sie nach der Grösse des reellen Theiles ordnen und setzen:

$$\omega_2 = \omega_1 - 2,\ \omega_3 = \omega_1 - 4,\ \omega_4 = \omega_1 - 6 \cdots \omega_m = \omega_1 - (m-1)2.$$

Jetzt liefert die Gleichung (17) das Resultat:

(17a) $$\begin{cases} \omega_1 = & c_{r-2,1,2}\, c_{2r1}, \\ \omega_2 = & c_{r-2,2,3}\, c_{3r2} - c_{r21}\, c_{1,r-2,2}, \\ \omega_3 = & c_{r-2,3,4}\, c_{4r3} - c_{r32}\, c_{2,r-2,3}, \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_m = & - c_{r\,m\,m-1}\, c_{m-1,r-2,m}, \end{cases}$$

woraus sich durch Addition ergiebt:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_m = 0,$$

so dass $\omega_1 = m - 1$ ist. Ist hier m eine ungerade Zahl, so muss die mittlere Wurzel gleich Null sein. Wenn aber m eine gerade Zahl ist, so sind die beiden mittleren Wurzeln gleich ± 1. Unsere Voraussetzung, dass alle Wurzeln ungleich sein sollen, verlangt also, dass $m = r - 3$ und dass dies eine gerade Zahl ist. Zugleich ergiebt sich:

$$\omega_1 = r - 4,\ \omega_2 = r - 6,\ \omega_3 = r - 8 \cdots \omega_{r-3} = -r + 4.$$

Aus (17) schliesst man sofort, dass $(X_\nu X_{r-2-\nu}) = 0$ ist für $\nu = 1 \cdots r - 3$, und dann folgt leicht, dass $(X_\alpha X_\beta) = 0$ ist, wenn α und β irgend zwei der Zahlen $1 \ldots r - 3$ sind. Die weiteren Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ lassen sich dadurch vereinfachen, dass man die $X_1 f \ldots X_{r-3} f$ mit passenden Constanten multiplicirt. Dadurch findet man aus (17a):

$$(X_r X_\alpha) = (r - \alpha - 3)\, X_{\alpha+1} f \quad \text{für} \quad \alpha = 1 \ldots r - 4,$$
$$(X_r X_{r-3}) = 0,\ (x_{r-2} X_\alpha) - (\alpha - 1)\, X_{\alpha-1} f.$$

Dadurch sind wir zu dem Resultate gelangt, dass die gemachten Voraussetzungen die Zusammensetzung der Gruppe vollständig bestimmen, sobald noch r gegeben ist, und dass dies eine ungerade Zahl sein muss. Um dies Resultat recht bequem aussprechen zu können, berücksichtigen wir, dass gleiche Wurzeln der Gleichung (7) entweder nur zu einer einzigen zweigliedrigen Untergruppe oder zu einer Schaar von solchen führen. Somit sprechen wir das Ergebniss jetzt in folgender Weise aus:

In einer r-gliedrigen Gruppe, welche ihre eigne Hauptuntergruppe ist, soll eine gegebene eingliedrige Untergruppe gerade $r - 1$ zweigliedrigen Untergruppen angehören und unter diesen soll keine mit vertauschbaren Transformationen vorkommen. Dann muss r eine ungerade Zahl sein. Die Gruppe enthält eine (und zwar eine einzige) invariante Untergruppe, welche aus $r - 3$ Gliedern gebildet ist; alle Transformationen, welche dieser Untergruppe angehören, sind vertauschbar. Die Zusammensetzung der Gruppe ist durch die gemachten Voraussetzungen vollständig bestimmt; bezeichnet man die gegebene eingliedrige Untergruppe mit $X_{r-1} f$, so kann man die übrigen $X_1, X_2 \ldots X_{r-2}, X_r$ so wählen, dass ist:

$$(X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f,\ (X_{r-1} X_r) = 2 X_r f,\ (X_{r-1} X_{r-2}) = -2 X_{r-2} f,$$
$$(X_{r-1} X_\alpha) = (r - 2(\alpha + 1))\, X_\alpha f,$$
$$(X_r X_\alpha) = (r - \alpha - 3)\, X_{\alpha+1} f,\ (X_{r-2} X_\alpha) = -(\alpha - 1)\, X_{\alpha-1} f,$$
$$(X_\alpha X_\beta) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha, \beta = 1 \ldots r - 3.$$

Bilden wir nach derselben Vorschrift eine Gruppe für ein gerades r, so bestimmen $X_{r-1} f$ und $X_{\frac{r-2}{2}} f$ eine zweigliedrige Gruppe mit vertauschbaren Transformationen. Aber jedesmal ist $l = 1$ und alle Func-

tionen $\psi_\nu \eta$) *verschwinden für ein ungerades* ν *und bilden für ein gerades* ν *bis auf einen constanten Factor die Potenz von* $\eta_{r-1}^2 - \eta_r \eta_{r-2}$.

Eine in dieser Weise gebildete Gruppe existirt bei beliebigem r für zwei Variabele. Dieselbe ist von Herrn Lie in seiner Aufzählung*) unter B) an der vorletzten Stelle aufgeführt und hat bei seiner Bezeichnung die Form:

$$q,\ xq \ldots x^{r-4}q,\ p,\ 2xp + (r-4)yq,\ x^2p + (r-4)xyq.$$

§ 8.

Die charakteristische Gleichung hat gleiche nicht verschwindende Wurzeln.

Die im vorigen Paragraphen gegebene Bestimmung von Gruppen gründete sich wesentlich auf den Umstand, dass alle Wurzeln der Gleichung (7) als ungleich vorausgesetzt wurden. Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Einfachheit des Ergebnisses nicht auch bei mehrfachen Wurzeln bestehen bleibt.

Wir bezeichnen mit Xf (ohne Marke) eine beliebige Transformation. Für diese stellen wir die Gleichung (7) auf und bestimmen die Wurzeln derselben. Hat diese Gleichung gleiche Wurzeln und ist ω_α eine solche, so soll ω_α dann, und nur dann als eine $(\lambda+1)$-fache Wurzel gerechnet werden, wenn sich $\lambda+1$ von einander und von Xf unabhängige infinitesimale Transformationen $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\lambda}$ bestimmen lassen, für welche die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&(XX_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0},\\
&(XX_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + e_{\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0},\\
(18)\quad &(XX_{\alpha_2}) = \omega_\alpha X_{\alpha_2} + e_{\alpha_2\alpha_1} X_{\alpha_1} + e_{\alpha_2\alpha_0} X_{\alpha_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(XX_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + e_{\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}} + \cdots + e_{\alpha_\lambda\alpha_1} X_{\alpha_1} + e_{\alpha_\lambda\alpha_0} X_{\alpha_0},
\end{aligned}$$

und wenn sich dieses System nicht in mehrere Systeme von einer kleineren Zahl λ und von gleicher Zusammensetzung zerlegen lässt. Die Willkür, welche bei der Wahl $X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\varkappa}$ hier besteht, kann benutzt werden, um alle Coefficienten $e_{\alpha_\varkappa\alpha_\iota}$ für $\varkappa > \iota + 1$ zum Verschwinden zu bringen. Man kann demnach folgende Form zu Grunde legen:

$$\begin{aligned}
&(XX_{\alpha_0}) = \omega_\alpha X_{\alpha_0},\\
&(XX_{\alpha_1}) = \omega_\alpha X_{\alpha_1} + e_{\alpha_1\alpha_0} X_{\alpha_0},\\
(18a)\quad &(XX_{\alpha_2}) = \omega_\alpha X_{\alpha_2} + e_{\alpha_2\alpha_1} X_{\alpha_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(XX_{\alpha_\lambda}) = \omega_\alpha X_{\alpha_\lambda} + e_{\alpha_\lambda\alpha_{\lambda-1}} X_{\alpha_{\lambda-1}},
\end{aligned}$$

*) Math. Annalen XVI, S. 524.

wo keiner der Coefficienten verschwinden darf. Indem wir die infinitesimale Transformation Xf zu Grunde legen, wollen wir von den infinitesimalen Transformationen $X_{\alpha_0} \dots X_{\alpha_\lambda}$ sagen, sie *gehörten* zur Wurzel ω_α.

Nun seien $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma \dots$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, und jede Wurzel führe zu einer Reihe von Transformationen $X_\varkappa$ (resp. zu einer einzigen solchen Transformation). Hiermit wird also keineswegs vorausgesetzt, dass ω_α und ω_β ungleich sind.

Wir bilden jetzt die Jacobi'sche Relation für $X, X_{\alpha_0}, X_{\beta_0}$, so folgt:

$$\sum_\varrho c_{\alpha_0\beta_0\varrho}\,[(\omega_\alpha + \omega_\beta)X_\varrho f - (XX_\varrho)] = 0.$$

Wir entwickeln diese Gleichung vollständig nach denjenigen X_ϱ, welche zu einer beliebigen Wurzel ω_γ gehören. Dann erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}(19)\qquad (\omega_\alpha + \omega_\beta)&(c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}X_{\gamma_0} + c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}X_{\gamma_1} + \cdots + c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}X_{\gamma_\nu}) \\ &= c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}\,\omega_\gamma X_{\gamma_0} + c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}(\omega_\gamma X_{\gamma_1} + e_{\gamma_1\gamma_0}X_{\gamma_0}) \\ &+ \cdots + e_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}(\omega_\gamma X_{\gamma_\nu} + e_{\gamma_\nu\gamma_{\nu-1}}X_{\gamma_{\nu-1}}).\end{aligned}$$

Wenn hier nicht $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma$ ist, so muss, damit $X_{\gamma_\nu}f$ beiderseits denselben Coefficienten hat, $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu} = 0$ sein; jetzt muss, damit $X_{\gamma_{\nu-1}}f$ beiderseits denselben Coefficienten hat, $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_{\nu-1}} = 0$ sein. In gleicher Weise erkennt man, dass alle Coefficienten $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu} \dots c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}$, $c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}$ gleich Null sind, wenn nicht $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma$ ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so vergleiche man beiderseits die Coefficienten von $X_{\gamma_{\nu-1}} \dots X_{\gamma_1} X_{\gamma_0}$ und erhält:

$$c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu}e_{\gamma_\nu\gamma_{\nu-1}} = 0,\ c_{\alpha_0\beta_0\gamma_{\nu-1}}e_{\gamma_{\nu-1}\gamma_{\nu-2}} = 0 \cdots c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1}e_{\gamma_1\gamma_0} = 0,$$

woraus folgt:

$$c_{\alpha_0\beta_0\gamma_\nu} = c_{\alpha_0\beta_0\gamma_{\nu-1}} = \cdots = c_{\alpha_0\beta_0\gamma_1} = 0$$

oder

$$(20)\qquad (X_{\alpha_0}X_{\beta_0}) = \sum c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}X_{\gamma_0}f, \qquad (\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma)$$

wo die Summation sich auf die erste Transformation X_{γ_0} bezieht, welche zu einer Wurzel $\omega_\gamma = \omega_\alpha + \omega_\beta$ gehört.

Die Jacobi'sche Relation für $X, X_{\alpha_0}, X_{\beta_1}$ führt zu einer Gleichung, welche sich von der Gleichung (19) nur dadurch unterscheidet, dass auf der rechten Seite noch hinzukommt:

$$e_{\beta_1\beta_0}c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}X_{\gamma_0}.$$

Daraus folgt, wie vorher, dass nur solche Coefficienten

$$c_{\alpha_0\beta_0\gamma_0}\ldots c_{\alpha_0\beta_1\gamma_\nu}$$

von Null verschieden sein können, für welche $\omega_\alpha+\omega_\beta=\omega_\gamma$ ist und dass unter dieser Bedingung ist:

$$(20\text{a})\qquad (X_{\alpha_0}X_{\beta_1})=\sum(c_{\alpha_0\beta_1\gamma_1}X_{\gamma_1}+c_{\alpha_0\beta_1\gamma_0}X_{\gamma_0}),$$
$$(\omega_\alpha+\omega_\beta=\omega_\gamma).$$

In derselben Weise kann man fortfahren. Unter der Bedingung $\omega_\alpha+\omega_\beta=\omega_\gamma$ lässt sich $(X_{\alpha_0}X_{\beta_\iota})$ durch X_{γ_0}, $X_{\gamma_1}\ldots X_{\gamma_\iota}$ und entsprechend $(X_{\alpha_\iota}X_{\beta_\varkappa})$ nur durch solche X_{γ_ϱ} ausdrücken, wo ϱ höchstens bis $\iota+\varkappa$ ansteigt.

Ganz entsprechend leitet man die Gleichungen her:

$$(X_{\alpha_0}X_{\alpha_1})=\sum c_{\alpha_0\alpha_1\gamma_0}X_{\gamma_0}f,\ (X_{\alpha_0}X_{\alpha_2})=\sum(c_{\alpha_0\alpha_2\gamma_0}X_{\gamma_0}+c_{\alpha_0\alpha_2\gamma_1}X_{\gamma_1})f\ldots$$
$$(2\omega_\alpha=\omega_\gamma).$$

Diese Sätze reichen hin, um alle Gruppen zu finden, welche den beiden Bedingungen genügen:

a) es soll $p=r$ sein,

b) nicht jede Transformationen der Gruppe soll mit einer andern vertauschbar sein.

Indem wir von der Transformation $X_{r-1}f$ ausgehen, soll die Gleichung (7) nur eine einfache verschwindende Wurzel haben. Wir setzen:

$$(X_{r-1}X_{r-2})=-2X_{r-2}f,\ (X_{r-1}X_r)=2X_rf,\ (X_{r-2}X_r)=X_{r-1}f,$$

und haben dadurch vorausgesetzt, dass $X_{r-1}f$ im Ausdruck für ein $(X_\iota X_\varkappa)$ vorkommt, in welchem $X_\iota f$ und $X_\varkappa f$ gerade je als *erste* Transformationen zu den Wurzeln ± 2 gehören. Die Berechtigung dieser Annahme werden wir am Schluss beweisen. Es ist vorläufig nicht ausgeschlossen, dass zu den Wurzeln $+2$ und -2 noch weitere Transformationen gehören; ebensowenig ist vorausgesetzt, dass $X_{r-1}f$ nicht noch in andern Ausdrücken $(X_\iota X_\varkappa)$ vorkommt. Die $X_\lambda f$ für $\lambda=1\ldots r-3$ gruppiren wir nach den zugehörigen Wurzeln ω_α, $\omega_\beta\ldots$.

Die Relation $(r, r-2, \alpha_0)$ liefert:

$$(21)\qquad \omega_\alpha X_{\alpha_0}f=\sum_\varrho[c_{r-2,\alpha_0,\varrho}(X_\varrho X_r)-c_{r\alpha_0\varrho}(X_\varrho X_{r-2})].$$

Soll $c_{r-2,\alpha_0\varrho}$ nicht verschwinden, so muss $\varrho=\beta_0$ und $\omega_\beta=\omega_\alpha-2$ sein, und ebenso kann $c_{r\alpha_0\varrho}$ nur von Null verschieden sein, wenn

$\varrho = \gamma_0$ und $\omega_\gamma = \omega_\alpha + 2$ ist. Wenn also ω_α irgend eine Wurzel ist, so muss auch mindestens eine der beiden Grössen $\omega_\alpha + 2$ oder $\omega_\alpha - 2$ eine Wurzel sein. Man kann also, wie im vorigen Paragraphen, die Wurzeln bestimmen, indem man die vorstehende Gleichung für alle X_{α_0} bildet, die als *erste* Transformationen zu denjenigen Wurzeln gehören, welche aus einer unter ihnen durch mehrmalige Addition und Subtraction von 2 erhalten werden. Da zudem die Wurzel Null ausgeschlossen ist, so sind nur verschiedene Gruppen

$$-2m-1,\ -2m+1, \cdots -1,\ +1, \cdots 2m-1,\ 2m+1$$

möglich.

Hieraus folgt, dass zu den Wurzeln ± 2 keine weiteren Transformationen gehören, was auch auf mancherlei andere Weise erkannt werden kann.

Nun bilde man die Jacobi'sche Relation für $r, r-2, \alpha_\lambda$, wo $X_{\alpha_\lambda} f$ die *letzte* Transformation ist, welche zu der Wurzel ω_α gehört. Dann erhält man:

$$\omega_\alpha = \sum_\varrho (c_{r-2, \alpha_\lambda \varrho}\, c_{\varrho r \alpha_\lambda} - c_{r \alpha_\lambda \varrho}\, c_{\varrho, r-2, \alpha_\lambda}).$$

Hier beachte man, dass X_{α_λ} nur im Ausdruck von $(X_{r-2} X_{\beta_\lambda})$ für $\omega_\beta - 2 = \omega_\alpha$ und im Ausdruck von $(X_r X_{\gamma_\lambda})$ für $\omega_\gamma + 2 = \omega_\alpha$ vorkommen kann. Also kann ϱ in der vorstehenden Gleichung gleich einem β_λ oder einem γ_λ sein. Daraus ergiebt sich, dass zu allen derselben Reihe angehörigen Wurzeln $\omega_\varkappa$ dieselbe Zahl von Transformationen $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_\lambda}$ gehört.

Daraus ergiebt sich der Satz:

Um alle Wurzeln, welche bei den die beiden aufgestellten Forderungen befriedigenden Transformationsgruppen neben den Wurzeln $+2$ und -2 auftreten können, zu erhalten, wähle man zwei Zahlen λ und m so, dass $2(m+1)(\lambda+1) \leqq r-3$ ist, bilde die Wurzeln $\pm 1, \pm 3 \pm \cdots \pm (2m+1)$ und lasse jede dieser $2m+2$ Zahlen eine $\lambda+1$-fache Wurzel sein. Dann wähle man zwei neue Zahlen λ' und m', so dass $2(m'+1)(\lambda'+1) \leqq r-3-2(m+1)(\lambda+1)$ ist und lasse jede der Zahlen $\pm 1, \pm 3 \pm \cdots \pm (2m'+1)$ eine $\lambda'+1$-fache Wurzel sein. So fahre man fort, bis alle $r-3$ Nummern erschöpft sind.

Beiläufig ergiebt sich hieraus der Satz:

Wenn r eine Paarzahl ist, so muss in jeder r-gliedrigen Gruppe, welche ihre eigne Hauptuntergruppe ist, jede Transformation einer zweigliedrigen Gruppe mit vertauschbaren Transformationen angehören;
oder:

Für ein gerades $r > 2$ hat eine r-gliedrige Gruppe, in welcher nicht jede Transformation mit einer andern vertauschbar ist, nothwendig eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe.

Wie im vorigen Paragraphen, sieht man auch hier leicht, dass für $\iota, \varkappa = 1, 2 \cdots r-3$ nothwendig $(X_\iota X_\varkappa) = 0$ ist. Ebenso ist es unmittelbar klar, dass $(X_{r-2} X_\iota)$ und $(X_r X_\iota)$ sich für $\iota = 1 \cdots r-3$ durch die $r-3$ ersten Transformationen $X_1 \cdots X_{r-3}$ darstellen lassen. Es wird nicht nöthig sein, die Coefficienten selbst hinzuschreiben. Ich mache nur darauf aufmerksam, dass alle Functionen $\psi_\nu(\eta)$ sich rational durch $\eta_{r-1}^2 - \eta_r \eta_{r-2}$ ausdrücken lassen, und dass für

$$\eta_r \eta_{r-2} = \eta_{r-1}^2$$

alle Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ verschwinden. Somit folgt der Satz:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe den beiden Bedingungen genügt, dass $p = r$ ist und dass nicht durch jeden Punkt des Bildraumes eine Gerade geht, welche vertauschbare Transformationen darstellt, so muss r eine ungerade Zahl sein. Die Gruppe hat eine $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppe und die Transformationen dieser Untergruppe sind sämmtlich mit einander vertauschbar. Genügen die Coefficienten einer Transformation $\sum \eta_\iota X_\iota f$ der Bedingung $\eta_r \eta_{r-2} = \eta_{r-1}^2$, so ist dieselbe mit anderen Transformationen vertauschbar.

Dass die invariante Untergruppe hier in mehrere Gruppen zerfallen kann, von denen jede eine invariante Untergruppe ist, wird durch die Fassung des Satzes nicht ausgeschlossen.

Den Satz, dass jede Gruppe, deren Ordnungszahl grösser als drei ist, vertauschbare Transformationen enthält, hatte ich schon früher (Programm 1884) aufgestellt, ohne den Beweis mitzutheilen. Herr Engel hat dann (Leipziger Berichte 1886, S. 91) einen Beweis hierfür geliefert und dabei $r-3$ als Zahl der Dimensionen desjenigen Gebildes bestimmt, dessen Punkte einer zweigliedrigen Untergruppe vertauschbarer Transformationen angehören; wir erkennen hier, dass für $p = r$ diese Zahl $= r-2$ ist und dass nur die in diesem und dem vorangehenden Paragraphen angegegebenen Gruppen dieser Bedingung genügen. Uebrigens erkennt man mit Leichtigkeit, dass für $p < r$ entweder durch jeden Punkt des $(r-2)$-dimensionalen Bildraumes oder doch durch jeden Punkt einer $(r-1)$-dimensionalen Ebene eine gerade Linie vertauschbarer Transformationen hindurchgeht. Soll nämlich nicht durch jeden Punkt eine solche Gerade hindurchgehen, so muss $l = 1$ sein; also müssen sich alle $\psi_\nu(\eta)$ durch eine Function $P(\eta)$ ausdrücken lassen, und da die Gruppe eine invariante Untergruppe besitzt, so muss $P(\eta) = 0$ dieselbe darstellen, also linear sein; für die Untergruppe ist aber $l = 0$. Somit folgt:

Ist die Ordnung r einer Gruppe grösser als drei, so geht entweder durch jeden Punkt des $(r-1)$-dimensionalen Bildraumes oder durch *jeden Punkt eines $(r-2)$-dimensionalen Kegels zweiter Ordnung oder durch jeden Punkt einer $(r-2)$-dimensionalen Ebene eine gerade Linie, welche mit einander vertauschbare Transformationen abbildet.*

Es giebt überhaupt, wie ich früher schon bemerkt habe, nur drei Gruppen, in denen keine vertauschbare Transformationen vorkommen, eine ein-, eine zwei- und eine dreigliedrige. Die letzte, für welche sich alle zweigliedrigen Untergruppen als Tangenten an einen Kegelschnitt abbilden, wird von den Herren Lie und Engel als Kegelschnittsgruppe bezeichnet.

Im Vorstehenden ist eine Voraussetzung gemacht, deren Berechtigung noch bewiesen werden muss. Wir haben nämlich angenommen, dass diejenigen beiden Transformationen X_λ und X_μ für welche im Ausdrucke $(X_\lambda X_\mu)$ die Transformation X_{r-1} vorkommt, beidemale die ersten Transformationen sind, welche zu den betreffenden Wurzeln gehören. Da die Gleichung (7) nur eine verschwindende Wurzel hat, müssen alle $(X_{\alpha_\iota} X_{\beta_\varkappa})$ für $\omega_\alpha + \omega_\beta = 0$, wofern sie nicht verschwinden, durch $X_{r-1}f$ ausgedrückt werden. Unsere bisherige Annahme war: $(X_{\alpha_0} X_{\beta_0}) = c \cdot X_{r-1}$; wir nehmen jetzt an: $(X_{\alpha_0} X_{\beta_0}) = 0$.

Dann folgt aus der Jacobi'schen Relation $(\alpha_0 \beta_0 \alpha_1)$:

$$c_{\beta_0 \alpha_1, r-1}\, \omega_\alpha X_{r-1} + c_{\alpha_0 \alpha_1 \gamma_0} (X_{\gamma_0} X_{\beta_0}) = 0,$$

wegen $\omega_\alpha + \omega_\beta = 0$, wo $\omega_\gamma = 2\omega_\alpha$ ist, dass $(X_{\gamma_0} X_{\beta_0})$ die $X_{r-1}f$ nicht enthält, dass also auch $(X_{\alpha_0} X_{\beta_1}) = 0$ ist; dasselbe gilt für $(X_{\alpha_1} X_{\beta_0})$ u. s. w. Es kann also, wenn $(X_{\alpha_0} X_{\beta_0}) = 0$ vorausgesetzt wird, kein $(X_{\alpha_\iota} X_{\beta_\varkappa}) = X_{r-1}f$ sein.

Hiermit sind die aufgestellten Sätze nach allen Seiten bewiesen.

Nachtrag. Die Forderung, dass nicht jede beliebige Transformation mit einer andern vertauschbar sein soll, hat die zwei Bedingungen nach sich gezogen, dass erstens die Zahl r der Glieder eine *ungerade* sein muss und dass zweitens jedem $\lambda + 1$ eine *gerade* Zahl $2m + 2$ von $\lambda + 1$-fachen Wurzeln zugeordnet werden muss. Beide Bedingungen sind aber, wenn man von jener Forderung absieht, durchaus nicht nothwendig. Wir bilden also jetzt Gruppen nach folgender Vorschrift:

Für ein beliebiges r nehme man zunächst die Transformationen X_r, X_{r-1}, X_{r-2} so an, dass ist:

$$(X_{r-1} X_r) = 2 X_r f, \quad (X_{r-1} X_{r-2}) = -2 X_{r-2} f, \quad (X_{r-2} X_r) = X_{r-1} f.$$

Dann wähle man zwei Zahlen σ und s so, dass $\sigma s \leqq r - 3$ und bilde die Wurzeln

$$\pm(s-1), \quad \pm(s-3), \quad \pm(s-5) \ldots$$

und lasse jede dieser s Zahlen eine σ-fache Wurzel der charakteristischen

Gleichung für $X_{r-1}f$ *sein. Dann wählt man zwei neue Zahlen* σ' *und* s' *so, dass* $\sigma' s' \leqq r-3-s\sigma$ *ist, und lasse jede der* s' *Zahlen* $\pm(s'-1)$, $\pm(s'-3)\ldots$ *eine* σ'*-fache Wurzel sein. So fahre man fort, bis alle* $r-3$ *Nummern erschöpft sind. Jeder dieser* σ*-fachen Wurzeln ordne man* σ *Transformationen nach den Gleichungen* (18) *zu, dann jeder* σ'*-fachen Wurzel* σ' *Transformationen u. s. w.*

Wie bei den vorhin betrachteten Gruppen sieht man auch hier unmittelbar, dass für $\iota, \varkappa = 1, 2 \ldots r-3$ nothwendig $(X_\iota X_\varkappa) = 0$ und dass sich $(X_{r-2} X_\iota)$ und $(X_r X_\iota)$ durch die $r-3$ ersten Transformationen darstellen lassen. Der ganze Charakter der Gruppen bleibt daher im wesentlichen ungeändert; nur wird, wenn r gerade oder eine der Zahlen $s, s' \ldots$ ungerade ist, jede beliebige Transformation mit einer andern vertauschbar sein. Im übrigen gelten aber alle im letzten Paragraphen hergeleiteten Sätze auch für die nach der verallgemeinerten Vorschrift gebildeten Gruppen. Namentlich ist für die in dieser Weise gebildeten Gruppen $l = 1$ und $p = r$. Die Frage, ob dies die einzigen Gruppen seien, für welche $l = 1$ und $p = r$ ist, wird sich erst in einem späteren Theile unserer Arbeit beantworten lassen.

§ 9.

Einige Eigenschaften der Gruppen vom Range Null.

Die Resultate der beiden vorangehenden Paragraphen gestatten uns, sämmtliche Gruppen, welche den dort angegebenen Bedingungen genügen, sobald die Gliederzahl gewählt ist, in expliciter Form hinzuschreiben. Die dort angewandte Methode, welche sich auch für andere Voraussetzungen als wichtig erweisen wird, ist für die Gruppen vom Range Null nicht brauchbar. Es ist mir aber nicht möglich, Sätze anzugeben, welche die explicite Darstellung solcher Gruppen gestatten; da ich aber im folgenden einen Satz aus der Theorie dieser Gruppen bedarf, so möge es mir gestattet sein, die wichtigsten Sätze, welche für $l = 0$ gelten, hier mit ihren Beweisen zusammenzustellen.

Aus der Schlussbemerkung in § 3 folgt unmittelbar, dass, wenn $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ identisch verschwinden, jede beliebige Transformation der Gruppe mindestens mit einer zweiten Transformation derselben vertauschbar ist. Durch jeden Punkt des Bildraumes geht also mindestens eine gerade Linie, welche solche Transformationen abbildet, die mit einander vertauschbar sind. Es verschwinden also auch alle Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch. Für manche dieser Gruppen verschwinden auch sämmtliche Unterdeterminanten von einem niedrigeren Grade identisch und dann ist jede Transformation mit einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von Transformationen vertauschbar. Dasselbe erkennt man ohne Rücksicht auf frühere Sätze, wenn man eine gewisse Form für die Gruppen zu Grunde legt und berücksichtigt, dass jede der Gruppe angehörige zweigliedrige Untergruppe nur vertauschbare Elemente enthält.

Zu dieser Form gelangt man auf folgendem Wege. Man wähle zwei ganz allgemeine (infinitesimale) Transformationen als $X_0 f$ und $X_1 f$. Dann wird $(X_0 X_1)$ eine Transformation liefern, welche von beiden unabhängig ist und mit $X_2 f$ bezeichnet werden soll. Ebenso möge $(X_0 X_2)$ nicht durch X_0, $X_1 X_2$ dargestellt werden können und mit $X_3 f$ bezeichnet werden. In derselben Weise fährt man fort, so dass man hat:

$$(X_0 X_1) = X_2 f,\ (X_0 X_2) = X_3 f,\ (X_0 X_3) = X_4 f \ldots (X_0 X_{m-1}) = X_m f;$$

aber die Transformation $X_m f$ sei die erste, zu der man auf diesem Wege gelangt, für welche $(X_0 X_m)$ durch $X_0 X_1 \ldots X_m$ dargestellt werden kann. Es sei also:

$$(X_0 X_m) = \sum_0^m {}^{\nu}\, e_\nu X_\nu f.$$

Wenn aber hier die $e_0, e_1 \ldots e_m$ nicht sämmtlich verschwinden, und man für ω eine nicht verschwindende Wurzel der Gleichung:

$$\omega^m = e_1 + e_2 \omega + e_3 \omega^2 + \cdots + e_m \omega^{m-1}$$

nimmt, so kann man Coefficienten $p_0, p_1 \ldots p_m$ so bestimmen, dass

$$\left(X_0, \sum p_\iota X_\iota\right) = \omega \sum p_\iota X_\iota$$

ist, also die Gruppe eine zweigliedrige Untergruppe ohne vertauschbare Elemente enthält. Daher müssen $e_0, e_1 \ldots e_m$ sämmtlich verschwinden und da spätestens für $m = r - 1$ sich $(X_0 X_m)$ durch $X_0, X_1 \ldots X_m$ muss ausdrücken lassen, so sieht man, dass jede Transformation mit einer andern vertauschbar ist.

Wenn man aber für $m < r - 1$ auf dem angegebenen Wege zu der Gleichung $(X_0 X_m) = 0$ gelangt, so dürfen wir annehmen, m sei die grösste Zahl, welche in dieser Hinsicht möglich ist. Alsdann wähle man wieder eine Transformation $X_{m+1} f$ ganz willkürlich, nur unabhängig von $X_0, X_1 \ldots X_m$, bilde $(X_0 X_{m+1})$ und wenn der Ausdruck hierfür von $X_0 X_1 \ldots X_m X_{m+1}$ unabhängig ist, setze man

$$(X_0 X_{m+1}) = X_{m+2};$$

man bilde

$$(X_0 X_{m+2}) = X_{m+3} f \ldots (X_0 X_{m+m'-1}) = X_{m+m'} f, (X_0 X_{m+m'}) = \sum_0^{m+m'} {}^{\nu}\, e_\nu X_\nu f,$$

wo der Fall $m' = 1$ eingeschlossen ist. Wir suchen zunächst aus

$X_0, X_1 \ldots X_{m+m'}$ eine zweigliedrige Untergruppe zu finden. Diese hat wegen der Gleichung:

$$\omega^{m'} = e_{m+1} + \omega e_{m+2} + \cdots + \omega^{m'-1} e_{m+m'}$$

stets ein Hauptelement, wenn nicht die Coefficienten $e_{m+1}, e_{m+2} \ldots e_{m+m}$ verschwinden. Wenn dann aber die Coefficienten $e_0, e_1 \ldots e_m$ alle oder zum Theil von Null verschieden sind, so beachte man, dass nach unserer Voraussetzung die m-fache Wiederholung der Operation $(X_0 Y_1) = Y_2 \ldots$ auf $(X_0 Y_m) = 0$ führen muss. Wenden wir dies auf X_{m+1} an, so erkennen wir, dass m' höchstens gleich m sein kann und dass für $m' = m$ nothwendig $(X_0 X_{2m}) = 0$ sein muss. Andererseits zeigt aber die Fortsetzung dieser Operation für $m' < m$ unmittelbar, dass man X_{m+1} nur durch eine lineare Function von $X_{m+1}, X_1 \ldots X_{m-1}$ zu ersetzen braucht, damit auch die Coefficienten $e_1 \ldots e_m$ und hiermit auch e_0 verschwinden.

In gleicher Weise kann man fortfahren. Bildet man wieder

$$(X_0 X_{m+m'+1}) = X_{m+m'+2} \cdots (X_0 X_{m+m'+m''}) = \sum_0^{m+m'+m''} {}^{\nu} e_\nu X_\nu f,$$

so muss $m'' \leq m'$ sein und da spätestens eine m'-fache Wiederholung der angegebenen Operation, auf $X_{m+m'+1}$ angewandt, zu $(X_0 X_\varrho) = 0$ führt, so wird man wieder $(X_0 X_{m+m'+m''}) = 0$ annehmen können.

Daraus ergiebt sich der Lehrsatz:

In jeder Gruppe vom Range Null lassen sich r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_0, X_1 \ldots X_{r-1}$ so wählen, dass die Gleichungen bestehen:

(A) $(X_0 X_1) = a_1 X_2 f, (X_0 X_2) = a_2 X_3 f \ldots (X_0 X_\nu) = a_\nu X_{\nu+1} f \ldots (X_0 X_{r-1}) = 0$

wo alle Coefficienten $a_1 \ldots a_{r-2}$ gleich 1 oder 0 sind. Ist bei allgemeiner Wahl von $X_0 f$ und $X_1 f$ für $m < r-1$ bereits $a_m = 0$, so muss auch unter den $a_{m+1} \ldots a_{2m}$ mindestens ein verschwindender Coefficient vorkommen; ist $a_{m+m'}$ der erste, so verschwindet auch mindestens einer der Coefficienten $a_{m+m'+1} \ldots a_{m+2m'}$ u. s. w.

Die Jacobi'sche Relation für $(0, m, m+m')$, $(0, m, m+m'+m'') \ldots$ sowie für $(0, \alpha, m)$, $(0, \alpha, m+m') \ldots$, wo α eine von $m, m+m' \ldots$ verschiedene Marke bedeutet, liefert:

(a) $(X_0(X_m X_{m+m'})) = 0, \ldots$

(b) $(X_0(X_\alpha X_m)) = (X_{\alpha+1} X_m), \ (X_0(X_\alpha X_{m+m'})) = (X_{\alpha+1} X_{m+m'}) \ldots$

Aus (a) in Verbindung mit (b) für $\alpha = m-1, m+m'-1 \ldots$ folgt unmittelbar, dass $(X_m X_{m+m'})$ und die entsprechenden Ausdrücke sich durch $X_m, X_{m+m'}, X_{m+m'+m''} \ldots$ darstellen lassen. Berücksichtigt man aber, dass sich $X_{m+1}, X_{m+m'+1} \ldots$, wenn auch die Gleichungen

(A) bestehen sollen, noch immer so wählen lassen, dass zu X_{m+m} noch X_m mit beliebigem Factor hinzukommt, und dass man zu $X_{m+m'+m''}$ noch eine beliebige lineare Function von X_m und $X_{m+m'}$ hinzufügen kann, und berücksichtigt man ferner den Charakter der überhaupt möglichen zweigliedrigen Untergruppen, so folgt

$$(X_m X_{m+m'}) = 0, \quad (X_m X_{m+m'+m''}) = 0 \ldots$$

Dieselbe Betrachtung zeigt jetzt, dass auch

$$(X_{m-1} X_m) = (X_{m-1} X_{m+m'}) = \cdots = 0$$

ist. Angenommen, man habe auf diese Weise gefunden, dass

$$(X_{\alpha+1} X_m) = (X_{\alpha+1} X_{m+m'}) = \cdots = 0$$

ist; dann folgt aus den Gleichungen (b) unmittelbar, dass $(X_\alpha X_m)$, $(X_\alpha X_{m+m'})$ höchstens X_m, $X_{m+m'} \ldots$ enthalten können, und dann lehrt die soeben skizzirte Betrachtung, dass auch $(X_\alpha X_m)$, $(X_\alpha X_{m+m'}) \ldots$ verschwinden. Somit sind alle diejenigen Transformationen, welche sich auf dem angegebenen Wege mit X_0 als vertauschbar herausstellen, mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar. Wir sehen also:

Jede Gruppe vom Range Null hat eine Untergruppe, deren Transformationen mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind. Verschwinden in der Determinante $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ *alle Unterdeterminanten vom Grade* $r-k$, *so enthält jede Mannigfaltigkeit von Transformationen, welche mit einer beliebig gewählten vertauschbar sind, eine* $(k-1)$*-dimensionale Mannigfaltigkeit von solchen, welche mit allen vertauschbar sind.*

Eine Untergruppe der angegebenen Art nennt Herr Lie (Ann. Bd. 25, S. 77, Note) eine ausgezeichnete Untergruppe. Wir finden also in den hier betrachteten Gruppen stets ausgezeichnete Untergruppen.

Ebenso hat sich eine einfache Methode ergeben, um diese Untergruppe zu finden.

Wenn α und β von m, $m+m' \ldots$ verschieden sind, so liefert die Jacobi'sche Relation für $(0, \alpha, \beta)$ die Gleichung:

$$\text{(c)} \qquad (X_0(X_\alpha X_\beta)) = (X_{\alpha+1} X_\beta) + (X_\alpha X_{\beta+1}).$$

Indem wir diese Gleichung benutzen, beschränken wir uns der Bequemlichkeit wegen im Ausdruck auf solche Gruppen, für welche nur die sämmtlichen Unterdeterminanten $r-1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ verschwinden, für welche also in (A) $a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-2} = 1$ zu setzen ist. Indem man der Reihe nach $\beta = \alpha + 1$, $\beta = \alpha + 3 \ldots$ setzt und ferner die Gleichung $(X_{r-2} X_{r-1}) = 0$ berücksichtigt, ersieht man unmittelbar, dass im Ausdruck von $(X_\alpha X_\beta)$ die $X_0 f$ und $X_1 f$ nicht vorkommen.

Wenn für $l=0$ *nicht alle Unterdeterminanten* $r-2^{\text{ten}}$ *Grades der charakteristischen Determinante identisch verschwinden, so bilden* *die nach der obigen Vorschrift bestimmten Transformationen $X_2 f \ldots X_{r-1} f$ die Hauptuntergruppe.*

Ebenso ergiebt sich aus (c) unmittelbar, dass $(X_{r-3} X_{r-2})$, überhaupt $(X_\alpha X_{r-2})$ nur durch $X_{r-1} f$ ausgedrückt wird. Hätten wir überhaupt bewiesen, dass für $\alpha < \beta$ die $(X_{\alpha+1} X_\beta)$ und $(X_\alpha X_{\beta+1})$ nur durch $X_{\beta+1}, X_{\beta+2} \ldots X_r$ ausgedrückt werden, so zeigt die Gleichung (c), dass in $(X_\alpha X_\beta)$ nur $X_\beta, X_{\beta+1} \ldots X_r$ vorkommen können, wo aber der Coefficient von X_β wieder verschwinden muss, damit in der Gruppe nur zweigliedrige Untergruppen mit vertauschbaren Elementen vorkommen können. Die Aenderungen, welche hier nothwendig werden, wenn die Form (A) in voller Allgemeinheit vorausgesetzt wird, brauchen wohl nicht angegeben zu werden. Wir gelangen somit zu folgendem Satze, den Herr Engel zuerst unter einer etwas allgemeineren Voraussetzung aufgestellt und bewiesen hat:

Jede r-gliedrige Gruppe G_r, für welche $l = 0$ ist, hat eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-1}, diese wieder eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe G_{r-2}, welche sowohl in Bezug auf G_r wie auf G_{r-1} invariant ist; diese eine $(r-3)$-gliedrige, welche für G_{r-2}, G_{r-1} und G_r invariant ist u. s. w.

Da jede invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe die Hauptuntergruppe in sich schliesst, so folgt:

Ist $l = 0$ und verschwinden nur die Unterdeterminanten $r - 1^{\text{ten}}$ Grades von $|\gamma_{\iota\varkappa}|$ identisch, so hat die Gruppe eine einfach unendliche Schaar von $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppen; jede Transformation, welche der Hauptuntergruppe nicht angehört, gehört einer $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppe an.

Aus den Gleichungen (c) ziehen wir jetzt weitere Folgerungen, indem wir α, β die kleinsten Werthepaare der Reihe nach annehmen lassen. Dann ist für $\alpha = 1$ bereits bewiesen, dass jedes $(X_\alpha X_\beta)$ durch diejenigen $X_\iota f$ dargestellt wird, deren Marke $\iota \geq \alpha + \beta - 1$ ist. Angenommen, dies sei für α, β und $\alpha, \beta + 1$ bewiesen; dann ergiebt sich dieselbe Eigenschaft aus (c) auch für $(X_{\alpha+1} X_\beta)$. Somit gilt die Eigenschaft ganz allgemein (natürlich nur für $a_1 = \cdots a_{r-2} = 1$ in (A)). Demnach liegt in dem $(r-1)$-dimensionalen Bildraume, welcher die gegebene Gruppe abbildet, eine bestimmte $(r-3)$-dimensionale Ebene E_{r-3}, durch welche die Hauptuntergruppe abgebildet wird; in dieser liegt wieder eine bestimmte $(r-4)$-dimensionale Ebene E_{r-4} u. s. w. Das Product eines beliebigen Punktes des Bildraumes mit einem Punkte der $E_{r-\varkappa}$ führt auf einen Punkt der $E_{r-\varkappa-1}$, und das Product eines Punktes der $E_{r-\varkappa}$ mit einem Punkte der $E_{r-\lambda}$ führt auf einen Punkt der $E_{r-\varkappa-\lambda}$ und verschwindet, wenn diese Marke negativ ist. Speciell ergiebt sich:

Bildet man aus den $\varkappa$ Transformationen $X_{r-\varkappa}, X_{r-\varkappa+1} \cdots X_{r-1}$

und einer ganz allgemeinen Transformation eine $k+1$*-gliedrige Gruppe, so ist dieselbe eine invariante Untergruppe und hat die aus den Transformationen* $X_{r-\varkappa+1}\cdots X_{r-1}$ *gebildete Gruppe zur Hauptuntergruppe.*

Man könnte nun ausser den Gleichungen (A) noch folgende Gleichungen voraussetzen:

$$(X_1 X_2) = \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_{r-1} X_{r-1},$$
$$(X_2 X_3) = \beta_4 X_4 + \cdots + \beta_{r-1} X_{r-1},$$
$$(X_3 X_4) = \gamma_6 X_6 + \cdots + \gamma_{r-1} X_{r-1} \ldots$$

und daraus mit Hülfe von (c) alle $(X_\alpha X_\beta)$ herleiten. Aber für $r > 6$ müssen hier weitere Bedingungen hinzugenommen werden, und so ist mir die explicite Darstellung dieser Gruppen bis jetzt nicht möglich.

Braunsberg, Anfang November 1887.