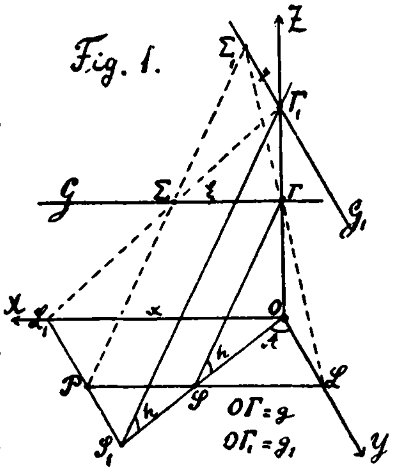
ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 217. Nr. 5190. 6.

Theorie einer Bifilar-Sonnenuhr. Von *H. Michnik*.

Wir legen im Raume folgendes Koordinatensystem fest. In der Ebene der Sonnenuhr, die wir horizontal annehmen, gehe von einem festen Punkte O aus (siehe Figur 1) die positive Richtung der x-Achse nach Osten und die der y-Achse nach Norden. Die Vertikallinie in O sei die z-Achse mit positiver Richtung nach dem Zenit. Zum Schattenwurf mögen zwei dünne Stäbe (Drähte, gespannte Fäden) dienen. Der eine Stab G gehe durch den Punkt Γ der z-Achse horizontal von Westen nach Osten und habe von der xy-Ebene den Abstand $O\Gamma = g$. Der andere Stab G_1 gehe durch den Punkt Γ_1 der z-Achse horizontal von Süden nach Norden, und es sei $O\Gamma_1 = g_1$.



Konstruktion des Schattenschnittpunktes P. Es soll die Lage des Schnittpunktes der Schattenlinien von G und G_1 in der xy-Ebene bei gegebenem Sonnenstande bestimmt werden. Die durch die Punkte Γ und Γ_1 gelegten parallelen Sonnenstrahlen mögen die xy-Ebene in den Punkten S und S_1 treffen. Diese Punkte liegen auf einer durch O gehenden Geraden. Die Ebenen (S, G) und (S_1, G_1) mögen die xy-Ebene in den Geraden SL und S_1L_1 schneiden. Die erste dieser beiden Geraden ist dann die Schattenlinie von G, die zweite die von G_1. Der Schnittpunkt P der beiden Geraden SL und S_1L_1 ist der gesuchte Schattenschnittpunkt. Seine Lage ist von der wahren Sonnenzeit t abhängig; und wir können umgekehrt aus seiner Lage die wahre Sonnenzeit bestimmen.

Die hier angewandte Projektion der Himmelskugel auf die xy-Ebene ist eine Verallgemeinerung der sonst in der Gnomonik gebräuchlichen »gnomonischen« Projektion und geht in letztere über, wenn $g_1 = g$ ist. Wir wollen sie Bifilarprojektion nennen.

Es ist SL parallel zur x-Achse und S_1L_1 parallel zur y-Achse. Daher ist

$$PL_1 : S_1L_1 = SO : S_1O = g : g_1 \tag{1}$$

ein konstantes Verhältnis; und zwischen den Punkten S_1 und P besteht eine Affinität. Die Bifilarprojektion der Himmelskugel auf die xy-Ebene kann daher durch zwei Projektionen ersetzt werden, nämlich durch die gnomonische Projektion durch den Punkt Γ_1, durch welche wir den Punkt S_1 erhalten, und durch eine Affinität, die dann den Punkt P liefert.

Die Bifilarprojektion ist ein besonderer Fall der *Steiner*schen Transformation.

Koordinaten des Schattenschnittpunktes P. Das Azimut der Sonne sei A und ihre Höhe h. Dann ist in Figur 1

$$OS = g \operatorname{ctg} h \qquad OS_1 = g_1 \operatorname{ctg} h\,. \tag{2}$$

Ferner ist $\measuredangle S_1OY = A$, daher

$$\begin{aligned} OL &= OS \cos A = g \operatorname{ctg} h \cos A \\ OL_1 &= OS_1 \sin A = g_1 \operatorname{ctg} h \sin A\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Koordinaten von P sind nun $x = OL_1$ und $y = OL$. Es ist also für den Punkt P

$$x = g_1 \operatorname{ctg} h \sin A \qquad y = g \operatorname{ctg} h \cos A\,. \tag{4}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\ \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t \\ \cos h \cos A &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \end{aligned} \tag{5}$$

worin φ die Polhöhe, δ die Sonnendeklination und t den Stundenwinkel der Sonne bezeichnen.

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen erhalten wir aus (4) für den Punkt P

$$\begin{aligned} x &= g_1 \cdot \sin t / (\sin\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos\varphi \cos t) \\ y &= g \cdot (-\cos\varphi \operatorname{tg}\delta + \sin\varphi \cos t)/(\sin\varphi \operatorname{tg}\delta + \cos\varphi \cos t)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Tageskurven. Wir bestimmen die Kurve, die der Schnittpunkt P im Laufe des Tages beschreibt. Man eliminiere aus den Gleichungen (6) den Stundenwinkel t. Aus der zweiten Gleichung in (6) folgt

$$\cos t = [\operatorname{tg}\delta\,(g \cos\varphi + y \sin\varphi)]/(g \sin\varphi - y \cos\varphi)\,. \tag{7}$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung in (6) ein, so wird

$$\sin t = g\,x \operatorname{tg}\delta / [g_1\,(g \sin\varphi - y \cos\varphi)]\,. \tag{8}$$

Durch Vermittelung der Identität

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

erhält man für die gesuchte Kurve die Gleichung

$$\sin^2\delta\,(g^2x^2 + g_1^2y^2 + g^2g_1^2) = g_1^2\,(g \sin\varphi - y \cos\varphi)^2 \tag{9}$$

oder

$$\begin{aligned} & g^2x^2 \sin^2\delta + g_1^2y^2\,(\sin^2\delta - \cos^2\varphi) + \\ & + 2gg_1^2 y \sin\varphi \cos\varphi + g^2g_1^2\,(\sin^2\delta - \sin^2\varphi) = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnitts.

Die Natur des Kegelschnitts ist stets dieselbe wie bei der gnomonischen Projektion, da durch die Affinität, die hier hinzutritt, an dem Verhalten einer Kurve zur unendlich entfernten Geraden der Ebene nichts geändert wird.

Wir können nun folgende Fälle unterscheiden:

1) Nach Gleichung (9) ist der Kegelschnitt eine Gerade, wenn $\delta = 0$ ist. Ihre Gleichung ist dann $y = g \operatorname{tg}\varphi$ und stellt die Schnittlinie der durch Γ gehenden Äquatorebene mit der xy-Ebene dar.

2) Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn in (10) $\varphi > 90° - \delta$ ist, was nur in der kalten Zone *möglich ist*. Am Pol hat die Ellipse die Gleichung

$$[x/(g_1 \operatorname{ctg}\delta)]^2 + [y/(g \operatorname{ctg}\delta)]^2 = 1\,. \tag{11}$$

Die Ellipse wird bei der Polhöhe φ zu einem Kreise, wenn

$$g^2 \sin^2\delta = g_1^2(\sin^2\delta - \cos^2\varphi) \tag{12}$$

ist. Hieraus folgt

$$g/g_1 = \sqrt{(1-\cos^2\varphi/\sin^2\delta)} \qquad (13)$$

wo natürlich $\varphi > 90° - \delta$ sein muß. Es ist also stets möglich, innerhalb der kalten Zone bei passender Wahl des Verhältnisses g/g_1 die Tageskurve zu einem Kreise zu machen. Dieses Verhältnis ist für den Pol = 1.

3) Eine Parabel entsteht, wenn $\varphi = 90° - \delta$ ist, was nur in der kalten Zone möglich ist.

4) Eine Hyperbel ergibt sich, wenn $\varphi < 90° - \delta$ ist. Dieser Fall tritt in jeder Zone ein, in der kalten jedoch nur mit Beschränkung. Die Hyperbel ist gleichseitig, wenn

$$g/g_1 = \sqrt{(\cos^2\varphi/\sin^2\delta - 1)} \qquad (14)$$

ist, eine Bedingung, die immer erfüllbar ist. Durch passende Wahl des Verhältnisses g/g_1 kann man also jede Tageshyperbel gleichseitig machen.

Stundenlinien für wahre Sonnenzeit. Diese Stundenlinien sind die Bifilarprojektionen der Stundenkreise am Himmel. Um die Gleichung der Stundenlinie für eine gegebene Stunde t zu finden, eliminiere man aus den Gleichungen (6) den Parameter $\operatorname{tg}\delta$. Da x und y lineare gebrochene Funktionen dieses Parameters sind und einen gemeinsamen Nenner haben, so ist die resultierende Gleichung in den Koordinaten x und y linear. Dieselbe lautet

$$g x \operatorname{ctg} t - g_1 y \sin\varphi = g g_1 \cos\varphi\,. \qquad (15)$$

Die Stundenlinien für wahre Sonnenzeit sind demnach gerade Linien.

Setzt man in (15) $x = 0$, so wird $y = -g \operatorname{ctg}\varphi$. Dieser Wert ist von t unabhängig. Daher gehen alle Stundenlinien der Bifilar-Sonnenuhr durch einen festen Punkt Q, der auf der y-Achse liegt und von der x-Achse den Abstand $-g \operatorname{ctg}\varphi$ hat. Dieser Punkt ist von g_1 unabhängig. Er ist der Punkt, in dem die durch Γ gehende Himmelsachse die xy-Ebene trifft. In ihm schneiden sich auch alle Stundenlinien einer gemeinen Horizontal-Sonnenuhr, deren schattenwerfender Stab $Q\Gamma$ ist. Letztere Linien gelten natürlich auch für die Ablesung der Schattenspitze des senkrechten Gnomons $O\Gamma = g$.

Der Schnittpunkt der Stundenlinie (15) mit der x-Achse hat die Abszisse

$$v = g_1 \cos\varphi \operatorname{tg} t\,. \qquad (16)$$

Wenn wir den Winkel, den diese Stundenlinie mit der y-Achse bildet, mit ω bezeichnen, so ist $\operatorname{tg}\omega = v/g \operatorname{ctg}\varphi$ oder

$$\operatorname{tg}\omega = k \operatorname{tg} t \qquad (17)$$

wo

$$k = (g_1/g)\sin\varphi \text{ ist.} \qquad (18)$$

Zwei Folgerungen ergeben sich hieraus:

1) Der Winkel ω_1, den die Stundenlinie für t^h auf der gemeinen Horizontal-Sonnenuhr in der Breite φ_1 mit der Mittagslinie bildet, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \sin\varphi_1 \operatorname{tg} t\,. \qquad (19)$$

Wenn wir in (18) die Konstante $k = \sin\varphi_1$ machen, was immer statthaft ist, da das Verhältnis g_1/g beliebig gewählt werden kann, so ist nach Gleichung (17)

$$\operatorname{tg}\omega = \sin\varphi_1 \operatorname{tg} t, \quad \text{also } \omega_1 = \omega\,. \qquad (20)$$

Demnach sind die Stundenlinien einer gemeinen Horizontal-Sonnenuhr für die Breite φ_1 identisch mit den Stundenlinien einer horizontalen Bifilar-Sonnenuhr in der Breite φ, wenn die Beziehung besteht

$$\sin\varphi_1 = (g_1/g)\sin\varphi\,. \qquad (21)$$

Man kann also eine gemeine Horizontal-Sonnenuhr als horizontale Bifilar-Sonnenuhr für alle Breiten verwenden, wenn man das Verhältnis g_1/g der Gleichung (21) entsprechend wählt.

2. Wenn man in (17) und (18) die Konstante $k = 1$ macht, so wird

$$\sin\varphi = g/g_1 \quad \text{und} \quad \omega = t\,. \qquad (22)$$

Der Winkel ω, den die Stundenlinie der horizontalen Bifilar-Sonnenuhr mit dem Meridian bildet, ist dann dem Stundenwinkel t der Sonne gleich. Dieselbe Eigenschaft besitzt auch die gemeine Horizontal-Sonnenuhr am Pol. Die Stundenlinien folgen in gleichen Intervallen von 15°, wenn die Zeit immer um 1^h zunimmt. Sie bilden ein homogenes System und gelten für alle geographischen Breiten. Das Verhältnis g/g_1 hängt nach (22) nur von der Polhöhe, jedoch nicht von der Sonnendeklination ab und ist daher für einen gegebenen Ort das ganze Jahr konstant.

Auch die gnomonische Projektion liefert in einem besonderen Falle ein homogenes System von Stundenlinien. Bringt man über der Horizontalebene eines Ortes in beliebiger Breite einen Stab an, dessen Verlängerung durch den Nordpol oder Südpol der Erde geht, so dreht sich sein Schatten auf der Horizontalebene an einem Äquinoktialtage in jeder Stunde um 15°.

Für den Abstand $PQ = \varrho$ hat man auf der Bifilar-Sonnenuhr bei homogenen Stundenlinien den für jede Tageszeit geltenden Ausdruck

$$\varrho = g_1 \cos\delta/\sin h\,. \qquad (23)$$

In der Breite von 50° ergeben sich hieraus folgende Werte für ϱ:

am Tage der Sommersonnenwende	$1.03\, g_1$	zu Mittag
an einem Äquinoktialtage	$1.56\, g_1$	zu Mittag
am Tage der Wintersonnenwende	$3.22\, g_1$	zu Mittag

am Tage der Sommersonnenwende um 7^h nachmittags $6.03\, g_1$
am Tage der Wintersonnenwende um 3^h nachmittags $8.18\, g_1$

Es darf also der Abstand g_1 im Verhältnis zur Dimension der Fläche nicht zu groß sein.

Konstruktion der Bifilar-Sonnenuhr mit homogenen Stundenlinien. Nachdem man in der Horizontalebene durch einen beliebigen Punkt Q (Figur 2) die Stundenlinien im Intervall von 15° gezogen hat, errichte man in einem beliebigen Punkte O der Mittagsstundenlinie auf dieser Ebene das Lot, das die durch Q gelegte Himmelsachse in Γ trifft. Es ist $O\Gamma = g$ und $Q\Gamma = g_1$. Man verlängere dann $O\Gamma$ über Γ hinaus bis Γ_1, sodaß $O\Gamma_1 = g_1$ wird. Durch Γ lege man den horizontalen Stab G in ostwestlicher und durch Γ_1 den Stab G_1 horizontal in nordsüdlicher Richtung. Man zeichne auch den Äquator und die Solstitialhyperbel ein. Die Figur gilt für die Polhöhe von 50°.

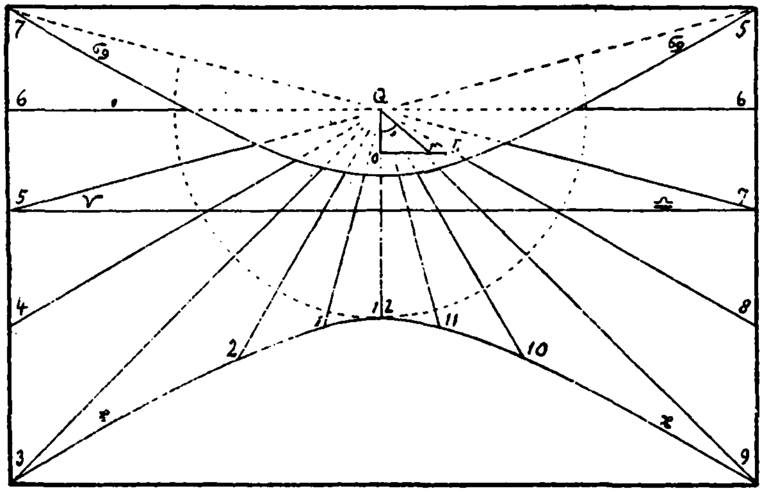
Länge der Stäbe G und G_1. Man kann die Stäbe über die ganze Fläche legen, obwohl sie nicht in dieser Ausdehnung beansprucht werden. Es entsteht die Frage nach der notwendigen Länge der Stäbe, wenn der Schattenschnittpunkt P noch auf der Fläche liegen soll.

Zunächst soll ermittelt werden, in welchen Punkten der nach P gerichtete Sonnenstrahl die Stäbe trifft. Der Strahl treffe G in Σ und G_1 in Σ_1 (siehe Figur 1). Wir setzen $\Gamma\Sigma = \xi$ und $\Gamma_1\Sigma_1 = \eta$. Offenbar ist $\xi = PS$ und $\eta = PS_1$. Nun ist

$$PS : x = SS_1 : OS_1 = (g_1 - g) : g_1$$

und

$$PS_1 : y = SS_1 : OS = (g_1 - g) : g\,.$$



Figur 2.

Hieraus folgt

$$\xi = x \cdot (g_1 - g)/g_1 \qquad \eta = y \cdot (g_1 - g)/g \,. \tag{24}$$

Hierdurch ist die Lage der Punkte Σ und Σ_1 bestimmt. Es ist ξ proportional x und η proportional y.

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man erwägt, daß Σ auf der Geraden $L_1 \Gamma_1$ und Σ_1 auf $L\Gamma$ liegen muß. Man erhält dann aus den ähnlichen Dreiecken $\Gamma_1 L_1 O$ und $\Gamma_1 \Sigma \Gamma$ die Proportion $\xi : x = (g_1 - g) : g_1$, woraus sich der obige Wert von ξ ergibt.

Aus (24) folgt, daß ξ mit wachsendem x und η mit wachsendem y zunimmt. In unseren Breiten ist die Tageskurve des Punktes P eine Hyperbel. Es werden daher beim Aufgang und Untergang der Sonne x und y, folglich auch ξ und η unendlich groß. Durch die Fläche der Sonnenuhr, auf der nur ein Teil des Sonnenlaufs abgebildet wird, sind diese Größen begrenzt. Offenbar ist ξ stets kleiner als x. Wenn $g_1 < 2g$ ist, so ist auch $\eta < y$. Bei Annahme homogener Stundenlinien ist

$$\xi = x - x \sin\varphi \qquad \eta = y/\sin\varphi - y \,. \tag{25}$$

Für die Breite von 50° ist daher

$$\xi = 0.234\, x \qquad \eta = 0.305\, y \,. \tag{26}$$

Hierdurch ist die notwendige Länge der Stäbe bestimmt.

Regelfläche der Sonnenstrahlen. Bei der gnomonischen Projektion bilden die Sonnenstrahlen, die durch die Spitze des Gnomons gehen, einen Rotationskegel, falls sie von einem Parallelkreise des Himmels herkommen, wie bei der täglichen Bewegung der Sonne. Der Kegel wird zu einer Ebene, wenn der Parallelkreis in einen Hauptkreis (Äquator, Ekliptik, Stundenkreis) übergeht.

Es ist von Interesse, die Gestalt der durch die Sonnenstrahlen gebildeten Regelfläche für die Bifilarprojektion zu ermitteln.

Wir wählen zunächst den einfacheren Fall des Stundenkreises. Die Sonnenstrahlen, die von diesem Kreise kommen und die Stäbe G und G_1 treffen, schneiden, wie wir gesehen haben, die xy-Ebene in einer Stundenlinie für wahre Sonnenzeit. Da sie zur Ebene des Stundenkreises parallel gehen, so bilden sie ein hyperbolisches Paraboloid. Wir wollen die Gleichung dieser Regelfläche ableiten. Der gegebene Stundenwinkel sei t und die Koordinaten des Punktes P seien x_1 und y_1 (siehe Figur 1). Der durch P gehende Sonnenstrahl ist der Durchschnitt der beiden Ebenen (P, G) und (P, G_1). Ihre Gleichungen sind

$$y/y_1 + z/g = 1 \quad \text{und} \quad x/x_1 + z/g_1 = 1 \,. \tag{27}$$

Zwischen x_1 und y_1 besteht die Relation (15)

$$g\, x_1 \operatorname{ctg} t - g_1\, y_1 \sin\varphi = g\, g_1 \cos\varphi \,. \tag{28}$$

Aus (27) folgt

$$y_1 = gy/(g - z) \qquad x_1 = g_1 x/(g_1 - z) \,. \tag{29}$$

Setzt man diese Werte in (28) ein, so erhält man die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids

$$x \operatorname{ctg} t/(g_1 - z) - y \sin\varphi/(g - z) = \cos\varphi \,. \tag{30}$$

Gehen die Sonnenstrahlen von einem Parallelkreise aus, dessen Deklination δ ist, so bestehen wieder die Gleichungen (27) und (29), und die Koordinaten x_1 und y_1 des Punktes P genügen der Gleichung (9)

$$\sin^2\delta\,(g^2 x_1^2 + g_1^2 y_1^2 + g^2 g_1^2) = g_1^2\,(g \sin\varphi - y_1 \cos\varphi)^2 \,. \tag{31}$$

Durch Einsetzen der Werte (29) in (31) erhält man die Gleichung der Regelfläche

$$\sin^2\delta\,[1 + x^2/(z - g_1)^2 + y^2/(z - g)^2] = [\sin\varphi + y \cos\varphi/(z - g)]^2 \,. \tag{32}$$

Diese Fläche 4. Ordnung hat einen Richtungskegel, da alle Sonnenstrahlen mit einer festen Geraden, der Himmelsachse, den konstanten Winkel $90° - \delta$ bilden. Sie besitzt 3 Doppelgeraden, nämlich die Geraden G und G_1, und die unendlich ferne Gerade der xy-Ebene. Die beiden ersten sind Leitlinien. Die letztere gehört der Regelschar an, ohne Leitlinie zu sein. Die 3 Doppelgeraden liegen derart, daß eine, nämlich die unendlich ferne Gerade, die beiden anderen schneidet. Hieraus erklärt es sich, warum alle Horizontalschnitte der Fläche nur Kegelschnitte und nicht Kurven 4. Ordnung sind.

Im Spezialfall $\varphi = 90°$ geht die Gleichung der Regelfläche (32) über in

$$x^2/(z - g_1)^2 + y^2/(z - g)^2 = \operatorname{ctg}^2\delta \,. \tag{33}$$

Bei dieser Fläche haben die Strahlen zwischen den Leitlinien G und G_1 die konstante Länge $(g_1 - g)/\sin\delta$. Die Fläche entsteht also durch die Bewegung einer Geraden, von der zwei feste Punkte auf den Leitlinien G und G_1 gleiten. Die Horizontalebene durch den Mittelpunkt von $\Gamma\Gamma_1$ schneidet die Fläche in einem Kreise. Die senkrechten Projektionen der Strahlen der Fläche auf die Horizontalebene umhüllen eine reguläre Astroide.

Im Falle $\varphi = 0°$ nimmt die Gleichung der Regelfläche (32) die Gestalt an

$$y^2 \operatorname{ctg}^2\delta/(z - g)^2 - x^2/(z - g_1)^2 = 1 \,. \tag{34}$$

Da die Himmelsachse die Richtung der Geraden G_1 hat, bilden alle Strahlen mit G_1 den konstanten Winkel $90° - \delta$. Bewegt man diesen Winkel so, daß der eine Schenkel immer mit der Geraden G_1 zusammenfällt, während der andere die Gerade G trifft, so erzeugt der letztere die Regelfläche.

Höhenkurven. Eine Höhenkurve ist der Ort des Schattenschnittpunktes für eine gegebene Sonnenhöhe h. Durch Elimination des Azimuts A aus den Gleichungen (4) erhält man die Gleichung der Höhenkurve

$$(x\,\mathrm{tg}\,h/g_1)^2+(y\,\mathrm{tg}\,h/g)^2 = 1 \tag{35}$$

die mit der Gleichung (11) übereinstimmt, wenn $\delta = h$ gesetzt wird. Die Höhenkurve ist also eine Ellipse. Sie geht im Falle $g_1 = g$ in einen Kreis über.

Azimutallinien. Um den Ort des Punktes P für ein gegebenes Sonnenazimut A zu finden, eliminiere man aus (7) die Sonnenhöhe h. Man erhält die Gleichung

$$x/y = (g_1/g)\,\mathrm{tg}\,A \tag{36}$$

die eine Gerade durch den Anfangspunkt O darstellt. Diese Gerade ist die gesuchte Azimutallinie. Ihr Azimut A' ist durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\,A' = x/y \tag{37}$$

bestimmt. Zwischen A und A' besteht daher die Relation

$$\mathrm{tg}\,A = (g/g_1)\,\mathrm{tg}\,A' \tag{38}$$

die im Falle homogener Stundenlinien nach Gleichung (22) in

$$\mathrm{tg}\,A = \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,A' \tag{39}$$

übergeht. Die Differenz $A'-A$ wird ein Maximum, wenn $A'+A = 90°$ ist. Auf einfache Weise lassen sich nach Gleichung (39) die Azimutallinien für gegebene Sonnenazimute konstruieren.

Siderische Stundenlinien. Die siderischen Stundenlinien dienen zur direkten Bestimmung der Sternzeit vermittels des Sonnenstandes.[1]) Wir bezeichnen die Sternzeit, d. h. die seit der Kulmination des Frühlingspunktes verflossene Zeit oder, was dasselbe ist, den Stundenwinkel des Frühlingspunktes mit θ, den gleichzeitigen Stundenwinkel der Sonne mit t, ihre Rektaszension mit α und ihre Deklination mit δ. Es handelt sich nun um die Bestimmung des geometrischen Ortes des Schattenschnittpunktes P auf der Fläche der Bifilar-Sonnenuhr bei gegebener Sternzeit θ. Dieser Ort ist die siderische Stundenlinie für θ^h. Die Größen t, δ und α sind hierbei veränderlich. Wir drücken t und δ durch α aus vermittels der Gleichungen

$$t = \theta-\alpha \qquad \mathrm{tg}\,\delta = \mathrm{tg}\,\varepsilon\sin\alpha \tag{40}$$

worin ε die Schiefe der Ekliptik ist, und setzen diese Werte in die Gleichungen (6) ein. Es wird dann, wenn man nach dem Parameter $\mathrm{tg}\,\alpha$ ordnet,

$$\begin{aligned} x &= g_1\,\frac{\sin\theta-\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon+\cos\varphi\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos\varphi\cos\theta} \\ y &= g\,\frac{-(\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon-\sin\varphi\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\varphi\cos\theta}{(\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon+\cos\varphi\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos\varphi\cos\theta} \end{aligned} \tag{41}$$

Die Elimination des Parameters führt zur Gleichung der siderischen Stundenlinie

$$\begin{aligned} g\,x\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos\theta-g_1\,y\,(\cos\varphi+\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sin\theta)+ \\ +g\,g_1\,(\sin\varphi-\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sin\theta) = 0\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Die siderischen Stundenlinien sind demnach gerade Linien.

Die Gleichung (42) bezeichnen wir kurz mit $f = 0$. Wenn wir aus dieser Gleichung und aus der Gleichung $\partial f/\partial\theta = 0$ den Parameter θ eliminieren, erhalten wir die Gleichung

$$\sin^2\varepsilon\,(g^2x^2+g_1^2y^2+g^2g_1^2) = g_1^2\,(g\sin\varphi-y\cos\varphi)^2 \tag{43}$$

welche die Enveloppe der siderischen Stundenlinien für alle Werte von θ darstellt. Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (9) überein, wenn $\delta = \varepsilon$ ist. Die Enveloppe der siderischen Stundenlinien ist also ein Kegelschnitt, das bifilare Bild der Solstitialkreise am Himmel. Dies leuchtet auch ohne Rechnung ein. Denn eine siderische Stundenlinie ist das bifilare Bild der Ekliptik. Letztere umhüllt am Himmel die Solstitialkreise; und das bifilare Bild der letzteren ist der in (43) bestimmte Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt ist in der kalten Zone eine Ellipse, am Polarkreise eine Parabel, sonst eine Hyperbel. Bei geeigneter Wahl des Verhältnisses g/g_1 nach Gleichung (13), worin $\delta = \varepsilon$ zu setzen ist, wird die Ellipse zu einem Kreise. Bestimmt man dieses Verhältnis nach Gleichung (14) für $\delta = \varepsilon$, so wird die Hyperbel gleichseitig.

Am Polarkreise ist der Winkel ψ, den die siderische Stundenlinie mit der y-Achse bildet, bestimmt durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\,\psi = (g_1\sin\varphi/g)\cdot\mathrm{tg}(45°+{}^1/_2\theta) \tag{44}$$

wo $\varphi = 90°-\varepsilon = 66°\,33'$ ist. Diese Gleichung geht im Falle $g/g_1 = \sin\varphi = 0.9174$ über in

$$\psi = 45°+{}^1/_2\theta \tag{45}$$

d. h. macht man auf einer Bifilar-Sonnenuhr eines Ortes des Polarkreises die Stundenlinien für wahre Sonnenzeit homogen, so bilden auch die siderischen Stundenlinien ein homogenes System. Erstere gehen durch einen festen Punkt und drehen sich in einer Stunde um 15°, letztere umhüllen eine Parabel und drehen sich in der Stunde um $7^1/_2°$.

Babylonische und italienische Stundenlinien. Die babylonischen Stunden (Horae ab ortu Solis, Nürnberger Stunden) und italienischen Stunden (Horae ab occasu Solis, Ore al tramonto del Sole, böhmische Stunden) waren früher im Gebrauch. Man zählte in beiden Fällen von 0^h bis 24^h.

Es handelt sich hier um die Gleichung des geometrischen Ortes des Schattenschnittpunktes P auf der Fläche der Bifilar-Sonnenuhr für das Ende der b^{ten} babylonischen Stunde, d. h. wenn b Stunden seit dem Aufgange der Sonne verflossen sind.

Es bedeute t den Stundenwinkel der Sonne für das Ende der b^{ten} babylonischen Stunde. Ferner sei für denselben Tag T der halbe Tagbogen und δ die Deklination der Sonne. Diese drei Größen t, T und δ sind von Tag zu Tag veränderlich. Wir drücken t und δ durch T aus vermittels der Gleichungen

$$t = b-T \qquad \mathrm{tg}\,\delta = -\mathrm{ctg}\,\varphi\cos T\,. \tag{46}$$

Diese Werte sind in (6) einzusetzen. Die Substitution ist im wesentlichen dieselbe wie in (40). Setzen wir nämlich in (40)

$$\varepsilon = 90°-\varphi \qquad \alpha = T-90° \qquad \theta = b-90° \tag{47}$$

so erhalten wir die Gleichungen (46). Wir können also nach Gleichung (42) sofort die Gleichung der babylonischen Stundenlinie für b^h hinschreiben, wenn wir auch in Gleichung (42) die Substitution (47) anbringen. Die Gleichung lautet

$$\begin{aligned} g\,x\cos\varphi\sin b-g_1\,y\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos b)+ \\ +g\,g_1\,[1-(1-\cos b)\cos^2\varphi] = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

und stellt eine Gerade dar.

Ebenso finden wir die Gleichung der Enveloppe der babylonischen Stundenlinien nach Gleichung (43), nämlich

$$g\,x^2\cos^2\varphi+g_1^2\,y\sin 2\varphi+g\,g_1^2\cos 2\varphi = 0\,. \tag{49}$$

Die babylonischen Stundenlinien sind also auf der Bifilar-Sonnenuhr gerade Linien und umhüllen eine Parabel.

Diese Parabel ist nichts anderes als der Kegelschnitt (9) für die Deklination $\delta = 90°-\varphi$. Auch dieses Ergebnis ist ohne Rechnung klar. Denn die sphärischen babylonischen Stundenlinien sind Hauptkreise, zu denen auch der Horizont

[1]) Vergl. meine Abhandlung: Konstruktion einer siderischen Sonnenuhr. AN **216**.441.

gehört. Sie sind zum Äquator unter dem Winkel $90° - \varphi$ geneigt und umhüllen daher einen Parallelkreis zum Äquator im Abstande $90° - \varphi$. Dieser berührt den Horizont im Nordpunkte. Daher ist das bifilare Bild des Parallelkreises die oben gefundene Parabel.

Der Winkel β, den die babylonische Stundenlinie (48) mit der y-Achse bildet, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = (g_1 \sin\varphi/g) \operatorname{tg} {}^1/_2 b\,. \tag{50}$$

Im Falle $g/g_1 = \sin\varphi$ ist daher

$$\beta = {}^1/_2 b\,. \tag{51}$$

Es bilden demnach in jeder geographischen Breite die babylonischen Stundenlinien ein homogenes System, wenn die Stundenlinien für wahre Sonnenzeit homogen sind.

Die durch die Gerade G gehende Äquatorebene schneide die xy-Ebene in der zur x-Achse parallelen Geraden AA'. Die babylonische Stundenlinie für b^h schneide die Gerade AA' in B und die durch Q gehende Parallele zur x-Achse in B'. (Punkt Q ist der bereits oben bezeichnete Punkt, durch den alle Stundenlinien für wahre Sonnenzeit gehen.) Für den homogenen Fall ist, wie sich leicht zeigen läßt, $OB = OB'$ und $\sphericalangle B'QB = b$. Hieraus folgt eine einfache Konstruktion der homogenen babylonischen Stundenlinien für jede geographische Breite.

Für die italienischen Stundenlinien erhalten wir dieselben Parabeltangenten mit derselben Stundenbezeichnung. So liegt die babylonische Stundenlinie für 13^h mit der italienischen für 13^h auf ein- und derselben Tangente, die erstere rechts, die letztere links vom Berührungspunkt (von der konkaven Seite der Parabel aus betrachtet.)

Temporäre Stundenlinien. Im Altertum und Mittelalter teilte man im bürgerlichen Leben den Tag, d. h. die Zeit vom Aufgang bis zum Untergang der Sonne, in 12 Stunden. Wir finden diese Stunden auch bei den Juden (vergl. Matthaeus 20, 1–16), und die katholische Kirche hat sie als Horae canonicae im Brevier beibehalten. Wegen ihrer Veränderlichkeit mit der Jahreszeit werden sie temporäre Stunden genannt.

Die Linien temporärer Stunden sind, wie ich gezeigt habe,[1]) auf der Himmelskugel sphärische Sinuskurven und in der gnomonischen Projektion auf eine zum Himmelsäquator parallele Ebene Ährenkurven. In der Horizontalebene ergeben sich Kurven mit Inflexionspunkten im Äquator. Daher ist ihre Abweichung von der Geraden, soweit der Sonnenlauf in Betracht kommt, nur gering. In der Praxis begnügte man sich mit diesen Geraden.

Wir leiten die Gleichungen der temporären Stundenlinien für die horizontale Bifilar-Sonnenuhr ab. Durch die Koordinaten x und y des Schattenschnittpunktes P in Figur 1 ist die Sonnendeklination δ bestimmt vermöge der aus (9) resultierenden Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = g_1 p/R \tag{52}$$

worin

$$p = g\sin\varphi - y\cos\varphi \qquad R = \sqrt{(g^2x^2 + g_1^2 q^2)} \qquad q = g\cos\varphi + y\sin\varphi \tag{53}$$

ist. Folglich ist für den halben Tagbogen T der Sonne

$$\cos T = -g_1 p \operatorname{tg}\varphi/R \qquad \sin^2 T = gQ/R^2$$
$$Q = \sec^2\varphi\,[g x^2 \cos^2\varphi + g_1^2 (g\cos 2\varphi + y \sin 2\varphi)]\,. \tag{54}$$

Ferner ist nach Gleichung (7) und (8)

$$\cos t = q \operatorname{tg}\delta/p \qquad \sin t = (g/g_1)\cdot x \operatorname{tg}\delta/p\,. \tag{55}$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\operatorname{tg}\delta$ aus (52) in diese Gleichungen erhält man

$$\cos t = g_1 q/R \qquad \sin t = gx/R\,. \tag{56}$$

Für eine gegebene temporäre Stundenlinie ist das Verhältnis t/T konstant. Diese Konstante ist für das Ende der 7ten temporären Stunde, die zu Mittag beginnt, $= {}^1/_6$, für das Ende der 8ten $= {}^1/_3$ u. s. w. Dieses rationale Verhältnis bezeichnen wir allgemein mit n/m, wo n und m zwei positive ganze Zahlen bedeuten, die relativ prim zueinander sind. Es ist also

$$t/T = n/m\,. \tag{57}$$

Hieraus folgt $mt = nT$ und

$$\cos mt = \cos nT \tag{58}$$

oder
$$\cos^m t - m_2 \cos^{m-2} t \sin^2 t + m_4 \cos^{m-4} t \sin^4 t \cdots =$$
$$= \cos^n T - n_2 \cos^{n-2} T \sin^2 T + n_4 \cos^{n-4} T \sin^4 T \cdots \tag{59}$$

wo m_2, n_2 u. s. w. Binomialkoeffizienten sind. Nun setze man in (59) die Ausdrücke aus (54) und (56) ein. Dann lautet die Gleichung der temporären Stundenlinie

$$(1/R^m) K_m = [(-1)^n/R^n]\, K_n'\,. \tag{60}$$

Hierin ist
$$K_m = g_1^m q^m - m_2 g_1^{m-2} g^2 x^2 q^{m-2} +$$
$$+ m_4 g_1^{m-4} g^4 x^4 q^{m-4} - \ldots$$
$$K_n' = a^n p^n - n_2 a^{n-2} p^{n-2} g Q + \tag{61}$$
$$+ n_4 a^{n-4} p^{n-4} g^2 Q^2 - \ldots$$
$$a = g_1 \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Für die Mittagszeit, d. i. das Ende der 6ten temporären Stunde, ist $n = 0$, $m = 1$. Aus (60) und (61) folgt für die entsprechende temporäre Stundenlinie die Gleichung $x = 0$, d. i. die Gleichung der durch O gehenden Nordsüdlinie. Die Linien für die übrigen temporären Stunden sind algebraische Kurven, deren Ordnung aus folgender Tabelle zu ersehen ist.

Temporäre Stunden	1^h / 11^h	2^h / 10^h	3^h / 9^h	4^h / 8^h	5^h / 7^h	6^h
n/m	${}^5/_6$	${}^2/_3$	${}^1/_2$	${}^1/_3$	${}^1/_6$	0
Ordnung	12	6	4	3	12	1.

Setzt man z. B. $n = 1$, $m = 3$, so findet man die Gleichung der Kurve für das Ende der vierten und achten temporären Stunde

$$g^2 x^2 + g_1^2 q^2 = 4 g x^2 q \cos\varphi \tag{62}$$

worin q die Bedeutung aus (53) hat. Diese Gleichung geht im homogenen Falle $g/g_1 = \sin\varphi$ über in

$$g(x^2 + y_1^2) = 2 x^2 y_1 \sin 2\varphi \tag{63}$$

worin $y_1 = g_1 \cos\varphi + y$ ist.

Beuthen (Oberschlesien), 1922 April. *H. Michnik.*

[1]) Vergl. meine Abhandlung: Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren. Leipzig 1914.

Visuelle Helligkeiten einer Anzahl von Plejadensternen. Von *A. Hnatek.*

Im Herbst 1920 hatte ich mir für das Rotschild-Coudé der Wiener Sternwarte ein Sternphotometer konstruiert, bei dem ein künstlicher Vergleichstern durch einen am Scheinerschen Sensitometer mit stetig verlaufender Schwärzung hergestellten, photographischen Keil meßbar geschwächt werden kann. Den künstlichen Stern gab eine kleine, kreisförmige Diaphragma-