ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 195. Nr. 4662. 6.

Numerische Berechnung eines Spezialfalles des Dreikörperproblems. Von Dr. *Carl Burrau.*

$m_1 = 5$, $m_2 = 4$, $m_3 = 3$. Anfangsgeschwindigkeiten $= 0$.

Anfangsabstände $\varrho_1 = (m_2 m_3) = 5$, $\varrho_2 = (m_3 m_1) = 4$, $\varrho_3 = (m_1 m_2) = 3$.

Die Gründe, die mich zur Wahl der angegebenen Anfangsbedingungen geführt haben, sind von verschiedener Art. Erstens scheint es mir in hohem Grade wünschenswert, daß überhaupt Rechnungen über Spezialfälle des Dreikörperproblems mit Massen und Distanzen von derselben Größenordnung ausgeführt werden. Meines Wissens gibt es nur einen einzigen numerisch behandelten Fall dieser Art (*Strömgren* A. N. 4356). Zweitens war in meinem Gedächtnis von einem im Jahre 1893 stattgefundenen Gespräche mit dem verstorbenen Kieler Mathematiker *Meissel* die Erinnerung zurückgeblieben, *Meissel* wäre der Meinung, daß die oben gewählten Anfangsbedingungen eine periodische Bewegung hervorbringen sollten. Drittens ist es schon ohne Rechnung einleuchtend, daß die zwei großen Massen im angegebenen Falle gegeneinander stürzen und ein Periastron mit kleiner Distanz erhalten müssen. Es war vorauszusehen, daß die numerischen Integrationen nach den üblichen Methoden mit konstantem Intervall in diesem Falle einen wiederholten Übergang zu kleinerem Intervall (Halbierung des Intervalles) verlangen würden und daß hier deshalb ein Fall vorliegen würde, wo die Anwendung der von *T. N. Thiele* (Interpolationsrechnung S. 21–29) vorgeschlagenen numerischen Integrationsmethode mit veränderlichem Intervall nützlich sein könnte. Eine Prüfung der genannten neuen Methode kam mir (wie ich in meinem Referate in der V. J. S. 1911 S. 37 angedeutet habe) wünschenswert vor.

Auf Grund der gewählten Anfangsbedingungen wird die Bewegung in einer Ebene vor sich gehen; wir haben dann die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot d^2x_1/dt^2 &= m_1 m_2 \cdot (x_2 - x_1)/\varrho_3^{\,3} + m_1 m_3 \cdot (x_3 - x_1)/\varrho_2^{\,3} \\ m_1 \cdot d^2y_1/dt^2 &= m_1 m_2 \cdot (y_2 - y_1)/\varrho_3^{\,3} + m_1 m_3 \cdot (y_3 - y_1)/\varrho_2^{\,3} \end{aligned} \qquad (1)$$

und vier analoge Gleichungen für die zwei Massen m_2 und m_3. Wenn wir:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \varrho_3 \cos\theta_3 \\ y_2 - y_1 &= \varrho_3 \sin\theta_3 \end{aligned}$$

setzen und die analogen Ausdrücke für $x_1 - x_3$ etc. bilden, finden wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &d^2(\varrho_1 \cos\theta_1)/dt^2 = \\ &-M \cdot \cos\theta_1/\varrho_1^{\,2} + m_1 (\cos\theta_1/\varrho_1^{\,2} + \cos\theta_2/\varrho_2^{\,2} + \cos\theta_3/\varrho_3^{\,2}) \\ &d^2(\varrho_1 \sin\theta_1)/dt^2 = \\ &-M \cdot \sin\theta_1/\varrho_1^{\,2} + m_1 (\sin\theta_1/\varrho_1^{\,2} + \sin\theta_2/\varrho_2^{\,2} + \sin\theta_3/\varrho_3^{\,2}) \end{aligned} \qquad (2)$$

und analoge Gleichungen für m_2 und m_3, wo $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Es werden für jeden Wert der Zeit die rechten Seiten der Gleichungen (2) berechnet und durch zweifache numerische Integration die Größen $\varrho_n \cos\theta_n$ und $\varrho_n \sin\theta_n$ ermittelt und zwar für alle drei Werte des Index n. Im ganzen werden also 12 (d. h. 6 zweifache) numerische Integrationen ausgeführt. Theoretisch notwendig waren nur 6. Ich habe es aber vorgezogen, die Rechnungen mit den 12 Integrationen auszuführen, weil dadurch eine durchgeführte Symmetrie ermöglicht wird und die »überflüssigen« Integrationen eine Kontrolle der Rechnungen liefern, die — meiner Ansicht nach — bei weitem der doppelten Rechnung vorzuziehen ist.

Mit Rücksicht auf die Integrationsmethode und das Rechenschema wird auf die Seiten 21–29 in *Thiele*s »Interpolationsrechnung« verwiesen. Wie die Intervalle in unserem speziellen Falle gewählt sind, geht aus der folgenden Tabelle der erhaltenen Resultate hervor.

t	$\varrho_2 \cos\theta_2$	$\varrho_2 \sin\theta_2$	$\varrho_3 \cos\theta_3$	$\varrho_3 \sin\theta_3$
0.0	0.000000	+4.000000	−3.000000	+0.000000
0.1	−0.001743	+3.996859	−2.994637	+0.000457·
0.2	−0.006985	+3.987427	−2.978512	+0.001829·
0.4	−0.028145·	+3.949552·	−2.913458·	+0.007309·
0.6	−0.064128	+3.885902	−2.802972·	+0.016409·
0.8	−0.116154	+3.795656·	−2.643581·	+0.029052·
0.9	−0.148785	+3.740201	−2.543857	+0.036652
1.0	−0.186299	+3.677613·	−2.429479·	+0.045053·
1.1	−0.229191	+3.607675	−2.299105	+0.054193·
1.2	−0.278129·	+3.530141·	−2.150950	+0.063972
1.3	−0.334044·	+3.444742	−1.982581	+0.074228
1.4	−0.39829	+3.35119	−1.79053·	+0.08469·
1.45	−0.43414·	+3.30127·	−1.68410·	+0.08987
1.5	−0.47295·	+3.24923	−1.56959	+0.09489·
1.55	−0.51521	+3.19503·	−1.44580·	+0.09963·
1.6	−0.56158·	+3.13870·	−1.31113·	+0.10390
1.625	−0.58661	+3.10975	−1.23903	+0.10576·
1.65	−0.61306·	+3.08028·	−1.16326·	+0.10738·
1.675	−0.64115·	+3.05032·	−1.08335	+0.10868·
1.7	−0.67115·	+3.01990·	−0.99866·	+0.10957
1.725	−0.70342	+2.98907·	−0.90839	+0.10990
1.75	−0.73845·	+2.95790·	−0.81138	+0.10947·
1.775	−0.77699	+2.92653·	−0.70595·	+0.10796
1.8	−0.82021	+2.89520	−0.58944	+0.10478·
1.81	−0.83923	+2.88277	−0.53878	+0.10282·
1.82	−0.85952	+2.87047·	−0.48516·	+0.10031
1.83	−0.88138	+2.85839·	−0.42793	+0.09705
1.84	−0.90524·	+2.84666·	−0.36609	+0.09274·
1.85	−0.93183	+2.83552	−0.29803	+0.08685
1.86	−0.96248	+2.82547	−0.22072	+0.07822
1.863	−0.97285	+2.82283·	−0.19486·	+0.07472
1.865	−0.98017	+2.82123	−0.17668·	+0.07203
1.867	−0.98792	+2.81979	−0.15758·	+0.06896

t	$\varrho_2 \cos\theta_2$	$\varrho_2 \sin\theta_2$	$\varrho_3 \cos\theta_3$	$\varrho_3 \sin\theta_3$
1.869	−0.99615·	+2.81856·	−0.13736	+0.06540
1.871	−1.00501·	+2.81763·	−0.11572	+0.06116
1.874	−1.01997·	+2.81716	−0.07950	+0.05271
1.876	−1.03173	+2.81803·	−0.05134	+0.04438
1.877	−1.03851·	+2.81924	−0.03522	+0.03847·
1.8773	−1.04072·	+2.81978·	−0.02999	+0.03630
1.8776	−1.04304	+2.82045·	−0.02452·	+0.03383·
1.8779	−1.04547·	+2.82129·	−0.01879	+0.03099
1.8782	−1.04804·	+2.82237	−0.01273·	+0.02761
1.8785	−1.05078·	+2.82381	−0.00631·	+0.02341
1.8786	−1.05173·	+2.82441	−0.00409·	+0.02174·
1.8787	−1.05270	+2.82509	−0.00184	+0.01989·
1.8788	−1.05367	+2.82587	+0.00043·	+0.01782
1.8789	−1.05464	+2.82677·	+0.00270	+0.01546
1.8790	−1.05558	+2.82784	+0.00490	+0.01274
1.8791	−1.05644	+2.82910·	+0.00691·	+0.00957
1.8792	−1.05712·	+2.83060	+0.00859·	+0.00589
1.87925	−1.05736	+2.83143	+0.00912	+0.00386·
1.8793	−1.05750·	+2.83229·	+0.00948·	+0.00175·
1.87935	−1.05754·	+2.83318	+0.00961·	−0.00040
1.8794	−1.05747·	+2.83406	+0.00950·	−0.00254·
1.87945	−1.05731	+2.83491·	+0.00917	−0.00463
1.8795	−1.05705·	+2.83573	+0.00864·	−0.00662
1.87955	−1.05673·	+2.83649·	+0.00797	−0.00849·
1.8796	−1.05636·	+2.83720·	+0.00718	−0.01025
1.8797	−1.05552·	+2.83847·	+0.00538	−0.01342
1.8798	−1.05461·	+2.83956·	+0.00341·	−0.01619
1.8799	−1.05367	+2.84051	+0.00137·	−0.01863·
1.8800	−1.05271·	+2.84134	−0.00068·	−0.02082·
1.8802	−1.05082·	+2.84274	−0.00477	−0.02461
1.8804	−1.04898	+2.84388·	−0.00875	−0.02783
1.8807	−1.04631·	+2.84527·	−0.01449	−0.03192·
1.8810	−1.04377	+2.84639·	−0.01996	−0.03541·
1.8815	−1.03976	+2.84786	−0.02855	−0.04031·
1.8820	−1.03599	+2.84898·	−0.03660·	−0.04445
1.8825	−1.03241	+2.84987	−0.04422·	−0.04805·
1.883	−1.02899	+2.85058	−0.05149	−0.05126·
1.8835	−1.02570·	+2.85115·	−0.05845	−0.05417
1.884	−1.02253·	+2.85162	−0.06515	−0.05683·
1.885	−1.01648·	+2.85230·	−0.07789·	−0.06160·
1.886	−1.01075·	+2.85273·	−0.08992	−0.06580
1.888	−1.00004	+2.85305·	−0.11230·	−0.07299
1.890	−0.99008	+2.85287·	−0.13298	−0.07906
1.892	−0.98069·	+2.85234·	−0.15235·	−0.08435
1.895	−0.96746·	+2.85108	−0.17951	−0.09123
1.900	−0.94709·	+2.84808	−0.22096	−0.10078
1.905	−0.92827·	+2.84432·	−0.25889	−0.10870
1.910	−0.91063	+2.84004	−0.29415·	−0.11551
1.915	−0.89390·	+2.83536	−0.32732	−0.12149
1.92	−0.87794	+2.83036	−0.35874·	−0.12682
1.93	−0.8478·	+2.8196	−0.4174	−0.1360
1.94	−0.8197	+2.8080·	−0.4715	−0.1437
1.96	−0.7677·	+2.7832·	−0.5697	−0.1561
1.98	−0.7201	+2.7567	−0.6578	−0.1657
2.01	−0.6544·	+2.7143	−0.7760·	−0.1766·
2.05	−0.5746·	+2.6538·	−0.9146·	−0.1868
2.10	−0.4839	+2.5729·	−1.0649·	−0.1947·
2.15	−0.4004·	+2.4866	−1.1957·	−0.1988
2.20	−0.3225	+2.3949·	−1.3111	−0.2000
2.3	−0.1790	+2.1954·	−1.5039	−0.1953·
2.35	−0.1121	+2.0871·	−1.5842·	−0.1900
2.4	−0.0479	+1.9726·	−1.6551	−0.1827·
2.45	+0.0140·	+1.8514	−1.7171·	−0.1735·
2.5	+0.0738	+1.7227·	−1.7707	−0.1623·
2.55	+0.1315	+1.5858	−1.8160	−0.1489·
2.6	+0.1871	+1.4397·	−1.8531·	−0.1330
2.65	+0.2403	+1.2819	−1.8819·	−0.1140·
2.7	+0.2904·	+1.1112	−1.9021	−0.0914·
2.725	+0.3140·	+1.0199	−1.9087	−0.0784·
2.75	+0.3362·	+0.9240·	−1.9128	−0.0641
2.775	+0.3566·	+0.8229·	−1.9142	−0.0481·
2.8	+0.3746·	+0.7157	−1.9125·	−0.0303
2.825	+0.3891·	+0.6013	−1.9074	−0.0101
2.85	+0.3984	+0.4783	−1.8980·	+0.0129
2.875	+0.3996	+0.3451	−1.8832·	+0.0393·
2.9	+0.3871	+0.2000·	−1.8608·	+0.0699·
2.9125	+0.3728·	+0.1230	−1.8457	+0.0869
2.925	+0.3509·	+0.0433·	−1.8270	+0.1047
2.9375	+0.3193	−0.0373·	−1.8040	+0.1228·
2.94375	+0.2991	−0.0774	−1.7906	+0.1318
2.95	+0.2757·	−0.1166	−1.7758·	+0.1404
2.95625	+0.2492·	−0.1544·	−1.7597·	+0.1485
2.9625	+0.2196·	−0.1903·	−1.7423·	+0.1559
2.96875	+0.1873·	−0.2238·	−1.7237	+0.1623·
2.975	+0.1526·	−0.2545·	−1.7040·	+0.1677
2.98125	+0.1162	−0.2822·	−1.6835	+0.1719·
2.9875	+0.0784·	−0.3068	−1.6623·	+0.1750·
2.99375	+0.0399	−0.3284	−1.6406·	+0.1770
3	+0.0010·	−0.3471	−1.6187	+0.1778·
3.00625	−0.0378·	−0.3632	−1.5966	+0.1777·
3.0125	−0.0765	−0.3769·	−1.5743·	+0.1767·
3.01875	−0.1147·	−0.3886	−1.5521	+0.1750
3.025	−0.1524·	−0.3984·	−1.5299	+0.1725
3.03125	−0.1895·	−0.4066·	−1.5077	+0.1694·
3.0375	−0.2260·	−0.4134·	−1.4855·	+0.1658
3.04375	−0.2619	−0.4190	−1.4635	+0.1617
3.05	−0.2970·	−0.4234·	−1.4414·	+0.1571·
3.05625	−0.3316	−0.4269	−1.4195	+0.1522·
3.0625	−0.3655	−0.4295	−1.3975·	+0.1470·
3.06875	−0.3988	−0.4313·	−1.3756·	+0.1415·
3.075	−0.4315	−0.4325	−1.3537·	+0.1357·
3.08125	−0.4636·	−0.4330·	−1.3318·	+0.1297·
3.0875	−0.4953	−0.4330·	−1.3099	+0.1235
3.1	−0.5571	−0.4316	−1.2659·	+0.1105
3.1125	−0.6171	−0.4285·	−1.2217·	+0.0968·
3.125	−0.6755	−0.4242	−1.1771·	+0.0827
3.1375	−0.7326	−0.4187	−1.1320·	+0.0680·
3.15	−0.7884	−0.4123	−1.0863	+0.0531
3.1625	−0.8432	−0.4051	−1.0397·	+0.0378
3.175	−0.8971	−0.3972·	−0.9922·	+0.0222·
3.1875	−0.9503	−0.3888	−0.9436·	+0.0065
3.2	−1.0029·	−0.3798·	−0.8938	−0.0094

t	$\varrho_2 \cos\theta_2$	$\varrho_2 \sin\theta_2$	$\varrho_3 \cos\theta_3$	$\varrho_3 \sin\theta_3$
3.2125	−1.0552	−0.3705	−0.8424	−0.0254
3.225	−1.1072	−0.3608	−0.7892·	−0.0414·
3.2375	−1.1591·	−0.3508·	−0.7340·	−0.0574·
3.25	−1.2113	−0.3407	−0.6764·	−0.0733·
3.2625	−1.2639	−0.3304·	−0.6160	−0.0889
3.275	−1.3172	−0.3202	−0.5520·	−0.1040
3.2875	−1.3716	−0.3101·	−0.4838·	−0.1183
3.3	−1.4277·	−0.3005	−0.4101·	−0.1312·
3.3125	−1.4863·	−0.2918	−0.3293	−0.1416·
3.31875	−1.5170	−0.2880·	−0.2852·	−0.1454
3.325	−1.5488	−0.2849·	−0.2381·	−0.1477·
3.33125	−1.5822	−0.2828·	−0.1872	−0.1474·
3.3375	−1.6175	−0.2824	−0.1314	−0.1431·
3.34375	−1.6555·	−0.2852	−0.0692	−0.1317·
3.35	−1.6966	−0.2942	−0.0000·	−0.1055·

Die Bewegung wird durch die Zeichnung auf Tafel 3 veranschaulicht. Die dort gegebenen Koordinaten sind die Koordinaten in bezug auf den Schwerpunkt des Systems. Diese Koordinaten werden aus den in der Tafel gegebenen Werten mit Hilfe des folgenden Formelsystemes berechnet:

$$x' = -X \qquad y' = -Y$$
$$x'' = \varrho_3 \cos\theta_3 - X \qquad y'' = \varrho_3 \sin\theta_3 - Y$$
$$x''' = \varrho_2 \cos\theta_2 - X \qquad y''' = \varrho_2 \sin\theta_2 - Y$$

wo:
$$X = \frac{4\varrho_3 \cos\theta_3 - 3\varrho_2 \cos\theta_2}{12}$$
$$Y = \frac{4\varrho_3 \sin\theta_3 - 3\varrho_2 \sin\theta_2}{12}$$

Man sieht die zwei größeren Massen (4, 5) gegeneinander stürzen und um die Zeit $t = 1.88$ die rapide Periastronbewegung ausführen, die in der Nebenfigur in 10-facher Vergrößerung dargestellt wird. Nachher geht die Masse 5 gegen die Masse 3 hin, und diese zwei Körper haben um die Zeit $t = 2.9$ herum ein Periastron. Die Masse 3 entfernt sich dann vorläufig nach rechts, und die Massen 4 und 5 nähern sich einander wieder. Die Vermutung, daß wir eine periodische Bewegung erhalten sollten, hat sich in dem gerechneten Teile der Bewegung nicht bestätigt, und das Hauptinteresse der Arbeit knüpft sich deshalb, von der kleinen Bereicherung unserer Vorstellungen über die Bewegungsformen im Dreikörperprobleme abgesehen, an die angewandte Arbeitsmethode, die sich in unserem speziellen Falle — zufolge der großen Annäherungen der beteiligten Massen — als sehr nützlich erwiesen hat. Ein wesentlicher Teil der Rechenarbeit ist von Herrn cand. mag. *Sigurd Kristensen* ausgeführt worden.

Kopenhagen, 1913 März 9.

Carl Burrau.

Über die Intensitätsverteilung innerhalb der Spektrallinien von Sternen. Von *K. F. Bottlinger.*

Das Aussehen der Absorptionslinien in Sternspektren wurde bisher nur mit allgemeinen Ausdrücken wie breit und schmal oder verwaschen und scharf bezeichnet oder höchstens durch qualitative Skizzen dargestellt. Genauere Messungen über ihre Gestalt sind noch nicht bekannt geworden.

Deshalb veranlaßte mich Herr Prof. *Schwarzschild*, als ich mich im Sommer 1911 vorübergehend am Potsdamer Astrophysikalischen Observatorium aufhielt, mit dem Spektrographen III aufzunehmende Spektrogramme einiger charakteristischer Sterne näher zu untersuchen.

Zur Ausmessung diente ein Hartmannsches Mikrophotometer. Um ein genaues Einstellen des Spektrogramms zu ermöglichen, war von der Firma Toepfer eine Einlage in den Meßtisch des Mikrophotometers gebaut worden, die mit einer Mikrometerschraube versehen war. Das zu den Messungen verwandte Brodhunsche Prisma schnitt ein quadratisches Feld von nur 0.02 mm Seitenlänge aus der Platte aus, sodaß ich mit Leichtigkeit 40 Einstellungen auf einem Millimeter machen konnte, was sich auch an den Stellen eines starken Intensitätsgradienten innerhalb der Linien als sehr wertvoll erwies; in einiger Entfernung von der Linienmitte genügte der doppelte Abstand, also 0.05 mm.

Bei einem so außergewöhnlich kleinen Felde war natürlich die einzelne Einstellung mit größeren Fehlern behaftet als bei den üblichen größeren Feldern, was hauptsächlich in den Unregelmäßigkeiten der Silberschicht auf der Platte seine Ursache hat.

Immerhin wurden diese Abweichungen selten so groß, daß sie den glatten Verlauf der Intensitätskurve gestört hätten. Besonders nicht bei den Sternen mit scharfen Linien. Doch kamen Abweichungen bis zu $0^m.3$ vom Mittelwert vor. Um diese Fehler einigermaßen zu eliminieren, konnten bei fast allen Spektrogrammen zwei bis drei Messungsreihen nebeneinander gemacht werden. Beim Sirius, dessen Spektrum sehr breit gehalten war, machte ich sogar fünf Serien, was sich indes kaum noch als ein großer Vorteil erwies.

Die Umwandlung der so gewonnenen Schwärzungen in Sterngrößen geschah entweder durch einen mit dem Scheinerschen Sensitometer aufgenommenen und mit dem Spektrogramm zusammen entwickelten Vergleichskeil oder durch Vermessung zweier Aufnahmen desselben Sternes, deren Belichtungsdauer sich wie 1 : 3 verhielten, was dem Unterschied einer Größenklasse entspricht, nach der von Prof. *Schwarzschild* gegebenen Methode (A. N. 4109: Über eine Interpolationsaufgabe der Aktinometrie).

So untersuchte ich die H_γ- und einige andere Linien bei folgenden 6 Sternen: α Can. maj., α Cygni, η Leonis, ζ Orionis, δ Leonis, γ Cassiopeiae.

Zu den Messungen, die ich in Fig. 1 auf Tafel 4 in den Kurven mitteile, ist nicht viel hinzuzufügen.

Ein cm in der Ordinatenrichtung entspricht einer Größenklasse, 4 cm der Abszisse einem Millimeter des Spektrogramms. Um sofort die Breite der Linien erkennen zu können, habe ich darüber eine Skala in *Ångström*-Einheiten gezeichnet, die naturgemäß bei verschiedenen Linien verschieden ist.

Bei der H_γ-Linie im Sirius sind die beiderseitigen Flügel, die sich an den steilen Intensitätsabfall nach der Linienmitte anschließen, charakteristisch.