1904	Aug. 15	$21^h 25^m.0$
	Oct. 17	18 16.0
	Dec. 10	12 50.0
1905	Dec. 9	12 4.0
1907	Nov. 5	21 10.0
	» 26	23 31.0 (?)

Notes.

1904 Aug. 15. It seemed to be an ill defined luminous spot, which was decidedly brighter than the surrounding region.

1904 Oct. 17. Several light markings on the spot.

1905 Dec. 9. The spot was very pale.

1905 Dec. 19. Could see the spot fairly well.

1907 Nov. 5. The Bay was shallow. The spot was very pale and of a faint pink color. The entire form was visible.

1907 Nov. 26. I think the object observed was the Great Red Spot; the Bay, however, was not pronounced. The object seemed to be a large pale spot — perhaps reddish. The seeing was very bad.

Yerkes Observatory, Williams Bay, Wisc., 1908 June 11. *E. E. Barnard.*

Sur la détermination systématique des éléments de la figure elliptique d'une planète au moyen de mesures micrométriques de diamètres.

Par *E. Merlin.*

Avant d'exposer le procédé systématique, dont je me suis servi pour déterminer les éléments de la figure elliptique d'une planète, lors du dernier passage de Mercure devant le Soleil, je démontrerai trois théorèmes relatifs à l'ellipse.

Théorème I. Dans toute ellipse, la somme des inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires est constante et égale à la somme des inverses des carrés des deux demi-axes.

En effet, rapportons une ellipse quelconque à un système de coordonnées polaires, dont le centre est le pôle et la droite, joignant le centre à l'une des extrémités du grand axe, l'axe polaire. Soient ϱ et ϱ' les longueurs de deux demi-diamètres rectangulaires, et ϖ l'angle du diamètre ϱ et de l'axe polaire. On déduit sans peine de l'équation de l'ellipse, les deux relations suivantes:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\varpi}{a^2} + \frac{\sin^2\varpi}{b^2}$$

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\sin^2\varpi}{a^2} + \frac{\cos^2\varpi}{b^2} .$$

En faisant la somme de ces deux égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} .$$

La proposition est donc établie.

Remarque. Cette propriété si simple ne caractérise nullement l'ellipse. On trouve, en effet, qu'elle a lieu pour toutes les courbes, admettant une équation de la forme

$$\varrho = \frac{1}{f(\varpi)}$$

dans laquelle la dérivée du carré du dénominateur est la fonction la plus générale ayant une demi-période égale à 90°.

Ces courbes jouissent d'une propriété curieuse. Pour le montrer, écrivons la relation à laquelle $f(\varpi)$ satisfait, à savoir:

$$f(\varpi + 90^\circ) f'(\varpi + 90^\circ) = -f(\varpi) f'(\varpi)$$

D'où:

$$\frac{f(\varpi + 90^\circ)}{f'(\varpi + 90^\circ)} = -\left[\frac{f(\varpi + 90^\circ)}{f(\varpi)}\right]^2 \frac{f(\varpi)}{f'(\varpi)} .$$

Désignons par u et u_1 les angles que les rayons vecteurs ϱ et ϱ' font avec les tangentes en leurs extrémités, l'équation précédente s'écrira:

$$\operatorname{tg} u_1 = -\left[\frac{f(\varpi + 90^\circ)}{f(\varpi)}\right]^2 \operatorname{tg} u .$$

Elle exprime que les angles u et u_1 appartiennent à des quadrants de parité différente.

Théorème II. Considérons quatre demi-diamètres faisant entre eux des angles de 45°, le carré de la différence entre les inverses des carrés du premier et du troisième, augmenté du carré de la différence entre les inverses des carrés du second et du quatrième, donne une somme constante, égale au carré de la différence entre les inverses des carrés des demi-axes.

Pour le prouver, écrivons l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires, à savoir:

$$\frac{\cos^2\varpi}{a^2} + \frac{\sin^2\varpi}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

ou encore:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\cos 2\varpi}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{\varrho^2} .$$

Désignons par ϱ, ϱ_1, ϱ' et ϱ_1' les quatre demi-diamètres considérés et écrivons, pour chacun d'eux, une équation semblable à la précédente. Eliminons ensuite $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$ entre ces quatre équations, il viendra les deux égalités suivantes:

$$\cos 2\varpi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} \qquad (1)$$

$$\sin 2\varpi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = -\left(\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_1'^2}\right) . \qquad (2)$$

On en conclut la propriété à démontrer:

$$\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho'^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_1'^2}\right)^2=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2.$$

Théorème III. La tangente trigonométrique du double de l'angle que le premier des quatre demi-diamètres forme avec le demi-axe est donné par la formule:

$$\operatorname{tg} 2\omega = -\frac{\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_1'^2}}{\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho'^2}}. \qquad (3)$$

Cette propriété se déduit immédiatement des égalités (1) et (2).

Cela étant supposons que l'on effectue une série de mesures de diamètres d'une planète, ces mesures étant groupées de telle manière que les diamètres de chaque groupe fassent entre eux des angles de 45°. Désignons ensuite par ϱ_i, ϱ_i', ϱ_i'', ϱ_i''' les longueurs des diamètres d'un même groupe. Nous pourrons écrire, en vertu des deux premiers théorèmes, n désignant le nombre de groupes:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{\varrho_i^2}+\frac{1}{\varrho_i'^2}+\frac{1}{\varrho_i''^2}+\frac{1}{\varrho_i'''^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{1}{\varrho_i^2}-\frac{1}{\varrho_i''^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_i'^2}-\frac{1}{\varrho_i'''^2}\right)^2\right].$$

On en conclut aisément a et b et par suite l'aplatissement.

Pour avoir l'orientation du grand axe, on calculera, pour chaque groupe, la valeur de ω, donnée par l'équation (3). On en déduira chaque fois l'angle θ, formé par le demi-diamètre initial du premier groupe avec le demi-grand axe et l'on prendra la moyenne des angles ainsi obtenus.

Ce procédé systématique a l'avantage de ne faire intervenir l'approximation que dans la détermination numérique des inconnues.

Uccle, le 4 juillet 1908. *E. Merlin.*

Über den Algolstern 29.1907 (RZ) Aurigae und den Veränderlichen vom U Geminorum-Typus 31.1907 (SS) Aurigae.

Von *Ernst Hartwig.*

Da der südlichere Teil des Sternbildes Auriga jetzt wieder aus den Sonnenstrahlen auftaucht und die Beobachtung des neuen in A. N. 4243 von Dr. *Pračka* bereits angemeldeten Algolsterns 29.1907 Aurigae darin wieder möglich wird, teile ich einige für die Verfolgung des Sterns nicht unwichtige Ergebnisse meiner Beobachtungen und Untersuchungen mit. Der Stern gehört, wie der nachher ebenfalls zu besprechende 31.1907 zu den vier von Dr. Silbernagel in München photographisch aufgefundenen und A. N. 4175 angezeigten Veränderlichen in Auriga, deren Überwachung wegen einiger Zweifel gegen das Ende des vergangenen Jahres in Bamberg aufgenommen wurde. Ich hatte ihn vor der Anzeige auf die Anfrage des Entdeckers am 4. März 1907 nachgesehen, aber wegen des Mangels eines Kärtchens unter den vielen schwachen Sternen nahe seinem Orte nicht mit der wünschenswerten Sicherheit identifizieren können, doch glaube ich sicher genug zu sein, daß der Stern damals um $8^h 45^m$ M. E. Z. schwach war. Nach dem Auftauchen aus den Sonnenstrahlen sah ich ihn am 7. September und 20. Oktober 1907 in Maximalhelligkeit. Erst am 29. Februar 1908 fand Dr. Pračka ihn ein wenig schwächer als sonst, am 6. März 1908 sah ich ihn beträchtlich schwächer und am 21. März fand ihn Dr. Pračka unsichtbar, kleiner als 13^m. Als er mir diese für 3 Wochen überraschend schnelle Lichtabnahme des nach diesen Beobachtungen als langperiodisch zu betrachtenden Sterns mitteilte, sah ich den Stern sofort am Refraktor nach und fand mit 300-f. Vergrößerung am Orte zwei Sternchen, von denen der von Dr. Silbernagel im Kärtchen angegebene um etwa $0^m.3$ schwächer war, als der südlich vorausgehende nicht verzeichnete Nachbar. Wegen der Luftverhältnisse, die auch keine weitere Verfolgung des von mir sogleich als Algolstern vermuteten Veränderlichen gestatteten, mußte ich mich darauf beschränken, die Lage beider Sternchen zu der Umgebung durch Richtungslinien zu bestimmen, die am folgenden Abend, dem 22. März, zu dem überraschenden Ergebnis führten, daß der südlich vorausgehende Nachbar, der hell war und nicht der auf dem Kärtchen in A. N. 4175 angegebene Stern, der wie am Abend zuvor etwa $13^m.5$ erschien, der Veränderliche ist. Die Algolnatur stand damit auch fest. Erst am 27. März, nachdem auch am 23. der Stern im Maximallicht beobachtet worden war, gelang es, ein Minimum aus absteigendem und aufsteigendem Licht zu bestimmen. Dr. Pračka und ich beobachteten dasselbe gemeinsam, aber, so weit möglich, unabhängig voneinander am Refraktor. Der Veränderliche wurde im Minimum ein wenig, etwa $0^m.05$ schwächer als der Nachbarstern $13^m.5$. Aus diesen Beobachtungen und den Schätzungen kurzer Strecken des absteigenden Lichtes am 2., 8., 20., 23. und 26. April, dessen tiefste Stelle wegen des baldigen Untergangs des Sterns sich nicht mehr bestimmen ließ, ergab sich, daß die ganze Lichtänderung 9 Stunden und die Minimalhelligkeit nahe eine Stunde dauert und daß die Periode nicht größer als $3^d 0^h 14^m$ sein kann, während aus dem von Dr. Silbernagel photographisch aufgenommenen Minimum von 1906 Okt. 22 und diesem ersten visuell bestimmten vom 27. März 1908, dessen Mitte auf $8^h 35^m.1$ M. Z. Greenw.