ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 2557-58.

Ueber die Bestimmung der gegenseitigen Entfernungen in dem Probleme der drei Körper.

Von Prof. *And. Lindstedt.*

Der Zweck der vorliegenden Mittheilung ist, zu zeigen, wie man auf dem gegenwärtigen Standpunkte der Analyse im Stande ist, die wahren Integrale des Dreikörperproblems in einem Falle, der zugleich die Fälle der Planeten und Satelliten des Sonnensystems umfasst, wirklich aufzustellen.

Weil die Differentialgleichungen für die relative Bewegung zweier Massen m und m' um die Masse M*) die Form haben:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi . x &= \Psi' . x' \\
\frac{d^2x'}{dt^2} + \Phi' . x' &= \Psi . x
\end{aligned}
$$

wo die Φ, Φ', Ψ, Ψ' bloss die gegenseitigen Entfernungen r, r', Δ enthalten, so ist es zunächst klar, dass die vorzüglichste Aufgabe der Störungstheorie, insofern sie eine theoretisch richtige Lösung bezweckt, darin bestehen muss, diese Grössen als Functionen der Zeit darzustellen. Wenn nämlich diese Aufgabe erledigt ist, so hat man, vorausgesetzt, dass sich r, r' und Δ durch convergirende trigonometrische Reihen darstellen lassen, zur Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten simultane Gleichungen von der Natur, wie die in meiner Abhandlung »Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie« betrachteten. Die Form der Integrale ist dort angegeben worden. Die Existenz derselben lässt sich ebenfalls, weil man es hier mit linearen Differentialgleichungen zu thun hat, nachweisen.

Ich werde jetzt, unter Voraussetzung der Existenz der Integrale, zeigen, wie man ihre Form, die Anzahl der Argumente, sowie ihre analytischen Ausdrücke ermitteln kann. Ich behalte mir vor, auf die Frage der Convergenz später zurückzukommen. Ich halte dafür, dass schon die Lösung der jetzt bezeichneten Aufgabe einen wesentlichen Fortschritt bezeichnen wird, da, wie man weiss, bis jetzt auf dieselbe keine befriedigende Antwort gegeben worden ist.

Mit Hülfe der Bemerkung, dass die dritten Differentialquotienten nach der Zeit von den Grössen:

$$
r^2 = x^2+y^2+z^2\,; \quad r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2
$$
$$
\Delta^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\,,
$$

den für x, y, z, x'.. gegebenen Differentialgleichungen, sowie den daraus fliessenden Werthen für

$$
\frac{d^3x}{dt^3}, \quad \frac{d^3y}{dt^3}, \quad \ldots
$$

zufolge, sich ausdrücken lassen durch r, r', Δ und ihre ersten Differentialquotienten und ausserdem durch die Hülfsgrösse:

$$
\frac{1}{2} q = x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} + z\frac{dz'}{dt} - x'\frac{dx}{dt} - y'\frac{dy}{dt} - z'\frac{dz}{dt}
$$

erhält man leicht die Differentialgleichungen, welche r, r', Δ, q unabhängig als Functionen der Zeit bestimmen.

Führen wir nun, um eine weitläufige Schreibweise zu vermeiden, folgende Abkürzungen ein:

$$
\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = \varphi \quad ; \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3} = \psi \quad ; \qquad \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3} = \vartheta \quad ;
$$
$$
\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r'^3} = \varphi' \quad ; \qquad \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\Delta^3} = \psi' \quad ; \qquad \frac{1}{r'^3} + \frac{1}{r^3} = \vartheta' \quad ;
$$
$$
\Phi = \frac{r^2+\Delta^2-r'^2}{2\,r^5} \quad ; \qquad \Psi = \frac{r'^2+r^2-\Delta^2}{2\,r'^5} \quad ; \qquad \Theta = \frac{\Delta^2+r'^2-r^2}{2\,\Delta^5} \quad ;
$$
$$
\Phi' = \frac{r^2+r'^2-\Delta^2}{2\,r^5} \quad ; \qquad \Psi' = \frac{r'^2+\Delta^2-r^2}{2\,r'^5} \quad ; \qquad \Theta' = \frac{\Delta^2+r^2-r'^3}{2\,\Delta^5} \quad ;
$$

*) Man wird bemerken, dass ich, was die Sache betrifft, überall bestrebt gewesen bin, Symmetrie zu bewahren. Dagegen behalte ich, der leichteren Uebersichtlichkeit wegen, die gewöhnlichen Bezeichnungen.

so erhalten wir die gesuchten Differentialgleichungen in der Form:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^3r^2}{dt^3}+\frac{dr^2}{dt}\left(\frac{M+m}{r^3}+2m'\varphi'\right)+m'q\varphi+m'\frac{dr'^2}{dt}\left(-2\varphi-3\Psi\right)+m'\frac{d\Delta^2}{dt}\left(+2\varphi-3\Theta'\right)=0\\
(2)\quad&\frac{d^3r'^2}{dt^3}+\frac{dr'^2}{dt}\left(\frac{M+m'}{r'^3}+2m\psi'\right)+mq\psi+m\frac{dr^2}{dt}\left(+2\psi-3\Phi'\right)+m\frac{d\Delta^2}{dt}\left(-2\psi-3\Theta\right)=0\\
&\frac{d^3\Delta^2}{dt^3}+\frac{d\Delta^2}{dt}\left(\frac{m+m'}{\Delta^3}+2M\theta'\right)+Mq\theta+M\frac{dr^2}{dt}\left(-2\theta-3\Phi\right)+M\frac{dr'^2}{dt}\left(+2\theta-3\Psi'\right)=0
\end{aligned}
$$

und für q:

$$
(3)\qquad \frac{dq}{dt}+r^2(-m'\varphi+m\psi+M\theta)+r'^2(m'\varphi-m\psi+M\theta)+\Delta^2(m'\varphi+m\psi-M\theta)=0.
$$

Indessen wenden wir nicht diese Gleichung direct an, sondern erst, nachdem dieselbe noch einmal differentiirt worden ist, also:

$$
\begin{aligned}
(4)\quad&\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{dr^2}{dt}\left(-m'\varphi+m\psi+M\theta-3M\Phi'+3m\Phi\right)+\frac{dr'^2}{dt}\left(m'\varphi-m\psi+M\theta-3m'\Psi'+3M\Psi\right)+\\
&\qquad+\frac{d\Delta^2}{dt}\left(m'\varphi+m\psi-M\theta-3m\Theta'+3m'\Theta\right)=0.
\end{aligned}
$$

Es wird unsere Aufgabe sein, das System (2) und (4) zu integriren. Wir sehen sofort, dass hierbei 11 Integrationsconstanten auftreten werden, aber man weiss andererseits, wie man sich leicht überzeugen kann, dass nur 9 von diesen unabhängig sein können. Es müssen also zwei Bedingungsgleichungen zwischen den 11 Integrationsconstanten bestehen. Die eine von diesen ergiebt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass die Gleichung (3) befriedigt werden muss. Die zweite liefert die von Lagrange gegebene Gleichung zwischen q, r, r' und Δ sowie den ersten und zweiten Differentialquotienten der drei letzteren. Diese Gleichung trägt in seinem Mémoire: »Essay sur le problème des trois corps« (Oeuvres, Tome VI) den Namen (N), braucht aber hier nicht aufgeführt zu werden, da wir für den Augenblick auf die Bestimmung der Integrationsconstanten nicht eingehen werden.

Bis zur Aufstellung der Differentialgleichungen für die gegenseitigen Entfernungen hat Lagrange die Symmetrie bewahrt; bei der Integration verlässt er, gleich wie alle früheren oder späteren Forscher, dieselbe, indem er von den speciellen Eigenschaften des vorgelegten Systems, wie z. B. der relativen Grössen der Massen u. dergl. Gebrauch macht.

Es ist klar, dass dies bei der practischen Verwendung der Theorie vollständig gerechtfertigt ist; bei der Betrachtung des allgemeinen Problems erscheint es jedoch von vornherein nothwendig, wenn man eine richtige theoretische Lösung sucht, die natürliche Symmetrie, die zwischen den die Bewegung der drei Körper bestimmenden Grössen herrschen muss, zu berücksichtigen.

Wenn wir alsdann die Umstände betrachten, auf welchen im Falle eines Systems, welches aus der Sonne und zwei Planeten besteht, die Möglichkeit, Reihenentwickelungen zu finden, die wenigstens innerhalb eines beschränkten Zeitraumes convergiren, beruht, so wissen wir, dass folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

1) Die sog. Excentricitäten e und e' der beiden Planetenbahnen dürfen eine gewisse numerische Grenze, die jedenfalls < 1 ist, nicht überschreiten;
2) Das Verhältniss der Radien Vectoren muss entweder immer grösser oder immer kleiner als 1 sein;
3) Endlich darf die gegenseitige Neigung nicht zu gross sein.

Bezieht man nun diese Bediegungen auf das Dreikörperproblem im Allgemeinen, wobei also keiner der drei materiellen Punkte eine bevorzugte Rolle spielen soll, so findet man unter den Bedingungen zunächst keine Symmetrie. Nur in Bezug auf die Massen m und m' herrscht eine solche, indem nämlich die denselben entsprechenden Grössen e und e' gewissen Bedingungen unterliegen müssen.

Da nun aber diese Bedingung der hinreichenden Kleinheit der Grössen e und e' auch so ausgesprochen werden kann, dass man setzen darf: $r^2 = a^2(1+\varrho)$ und $r'^2 = a'^2(1+\varrho')$, wobei ϱ und ϱ' immer echte Brüche bleiben, und a und a' gewisse Constanten bedeuten, so liegt es nahe, zu vermuthen, dass wir durch eine ähnliche Annahme für Δ einer der Bedingungen (2) oder (3) genügen werden, dass wir also für eine derselben schreiben können $\Delta^2 = d^2(1+\delta)$, wo δ ebenfalls ein echter Bruch bleibt. In der That wird uns auch eine ganz elementare Ueberlegung zeigen, dass dies der Fall ist.

Wenn nämlich H den Winkel zwischen r und r' bezeichnet, so hat man im Dreieck Mmm':

$$
\Delta^2 = r^2+r'^2-2rr'\cos H = (r^2+r'^2)\left(1-\frac{2rr'}{r^2+r'^2}\cos H\right).
$$

Die Bedingung, dass beständig

$$
\text{entweder } \frac{r}{r'} < 1 \text{ oder } \frac{r'}{r} < 1
$$

verlangt, dass auch:

$$\frac{2rr'}{r^2+r'^2}\cos H$$

beständig ein echter Bruch bleibt.

Der Betrag dieses Bruches in den Fällen unseres Sonnensystems ist häufig beträchtlich genug. Für Sonne-Jupiter-Saturn z. B. hat man, bis auf Grössen von der Ordnung der Excentricität:

$$\Delta^2 = 118.05\,[1-0.84\cos H]$$

Aber es kommt bei unserer — wohl zu merken: theoretischen — Untersuchung nur darauf an, zu wissen, dass die mit δ bezeichnete Grösse doch ein echter Bruch bleibt.

In dem allgemeinen Problem entsprechen sich demnach die drei Grössen ϱ, ϱ' und δ vollkommen symmetrisch. In unserem Sonnensystem hat aber δ gewöhnlich einen viel beträchtlicheren Werth als ϱ und ϱ', die immer von der Ordnung der Excentricitäten sind.

Wir beschränken jetzt unser Problem auf den Fall, dass man setzen kann:

$$(5)\qquad \begin{aligned} r^2 &= a^2\,(1+\varrho) \\ r'^2 &= a'^2\,(1+\varrho') \\ \Delta^2 &= d^2\,(1+\delta) \end{aligned}$$

wo ϱ, ϱ', δ Grössen bedeuten, die immer echte Brüche bleiben und a^2, a'^2, d^2 gewisse durch die Integration eingeführte Constanten sind. Weiter schreiben wir:

$$(6)\qquad \frac{dr^2}{dt} = u\,,\quad \frac{dr'^2}{dt} = u'\,,\quad \frac{d\Delta^2}{dt} = v\,,$$

woraus durch Ingetration:

$$(7)\qquad \begin{aligned} r^2 &= a^2 + \int u\,dt \\ r'^2 &= a'^2 + \int u'\,dt \\ \Delta^2 &= d^2 + \int v\,dt \end{aligned}$$

wodurch a, a', d definirt sind, so dass man schliesslich noch hat:

$$(8)\quad \varrho = \frac{1}{a^2}\int_0 u\,dt\;;\quad \varrho' = \frac{1}{a'^2}\int_0 u'\,dt\;;\quad \delta = \int_0 v\,dt$$

Wenn wir jetzt berücksichtigen, dass die Coefficienten für die ersten Differentialquotienten von r^2, r'^2 und Δ^2 sowie für q in den Gleichungen (2) und (4) bloss Functionen von r, r' und Δ sind, und zwar diese Grössen nur in den Verbindungen:

$$\begin{gathered} r^2\,,\quad r'^2\,,\quad \Delta^2 \\ \frac{1}{r^3}\,,\quad \frac{1}{r'^3}\,,\quad \frac{1}{\Delta^3} \\ \frac{1}{r^5}\,,\quad \frac{1}{r'^5}\,,\quad \frac{1}{\Delta^5} \end{gathered}$$

enthalten, so folgt aus unserer Annahme über die Werthe von ϱ, ϱ' und δ, wenn wir die Werthe aus (5) für r, r', Δ substituiren, dass sich jene Coefficienten in Potenzreihen nach ϱ, ϱ', δ verwandeln, die beständig convergiren. In jeder derselben wird ein constantes, d. h. von ϱ, ϱ', δ freies Glied vorkommen. Wir trennen dasselbe von den übrigen Gliedern, indem wir die constanten Glieder mit den Buchstaben α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, ε_1, $\cdot\cdot\cdot$ und die übrigen Theile mit den Buchstaben:

$$-U_0\,,\quad -U'_0\,,\quad -V_0\,,\quad -U_1\,,\quad -U'_1\,,\quad -V_1\,,\quad -Q_1\,,\;\cdot\cdot\cdot$$

resp. bezeichnen.

Mit Rücksicht auf (6) schreiben wir deshalb anstatt (4) und (2):

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2q}{dt^2} + \alpha_0\,u + \beta_0\,u' + \gamma_0\,v \qquad &= U_0\,u + U_0'\,u' + V_0\,v \\ \frac{d^2u}{dt^2} + \alpha_1\,u + \beta_1\,u' + \gamma_1\,v + \varepsilon_1\,q &= U_1\,u + U_1'\,u' + V_1\,v + Q_1\,q \\ \frac{d^2u'}{dt^2} + \alpha_2\,u + \beta_2\,u' + \gamma_2\,v + \varepsilon_2\,q &= U_2\,u + U_2'\,u' + V_2\,v + Q_2\,q \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \alpha_3\,u + \beta_3\,u' + \gamma_3\,v + \varepsilon_3\,q &= U_3\,u + U_3'\,u' + V_3\,v + Q_3\,q\;, \end{aligned}$$

wo also auf den rechten Seiten die Coefficienten von u, u', v und q Potenzreihen in ϱ, ϱ', δ ohne ein constantes Glied sind. So ist z. B.:

$$\alpha_1 - U_1 = \frac{M+m}{r^3} + 2m'\varphi' = \frac{M+m}{r^3} + 2m'\left(\frac{1}{r'^3} + \frac{1}{\Delta^3}\right)$$

und somit:

$$\alpha_1 = \frac{M+m}{a^3} + 2m'\left(\frac{1}{a'^3} + \frac{1}{d^3}\right)$$

und

$$U_1 = \alpha_1 - \left(\frac{M+m}{a^3}(1+\varrho)^{-3/2} + \frac{2m'}{a'^3}(1+\varrho')^{-3/2} + \frac{2m'}{d^3}(1+\delta)^{-3/2}\right)$$

u. s. w.

Um die folgenden Auseinandersetzungen mit Leichtigkeit übersehen zu lassen, will ich zunächst einige Theoreme über ein simultanes System von Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten voraufschicken, obgleich dieselben den meisten Lesern dieser Zeitschrift bekannt sein dürften. Und zwar wird es für unsern Zweck ausreichen, gerade ein solches System, wie es hier zur Anwendung kommen soll, zu behandeln.

Wir betrachten also das folgende simultane System:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned}
\frac{d^2q}{dt^2} + Au + Bu' + Cv + Dq &= T_q \\
\frac{d^2u}{dt^2} + A'u + B'u' + C'v + D'q &= T_u \\
\frac{d^2u'}{dt^2} + A''u + B''u' + C''v + D''q &= T_{u'} \\
\frac{d^2v}{dt^2} + A'''u + B'''u' + C'''v + D'''q &= T_v
\end{aligned}$$

wo die T_q, T_u, $T_{u'}$, T_v trigonometrische Reihen von Winkeln, welche der Zeit t proportional wachsen, bedeuten. Wir schreiben also:

$$\begin{aligned}
T_q &= a_q \cos(\lambda t + b) + a'_q \cos(\lambda' t + b') + \cdots \\
T_u &= a_u \cos(\lambda t + b) + a'_u \cos(\lambda' t + b') + \cdots
\end{aligned}$$

u. s. w.

Alsdann weiss man, dass die allgemeinen Integrale von (α) sich zusammensetzen aus den allgemeinen Integralen für den Fall, dass die T gleich Null angenommen werden und aus particulären Integralen des vollständigen Systems (α). Diese letzteren wiederum bestehen aus eben so vielen Theilsätzen wie die Anzahl der Argumente $\lambda t + b$, $\lambda' t + b'$, $\cdots$, so dass wir setzen können:

$$\begin{aligned}
q &= q^{(0)} + q_\lambda + q_{\lambda'} + \cdots \\
u &= u^{(0)} + u_\lambda + u_{\lambda'} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wo die $q^{(0)}$, $u^{(0)}$ $\cdots$ die allgemeinen Integrale von (α), wenn die $T = 0$, und q_λ, u_λ, u'_λ, v_λ particuläre Integrale desselben Systems sind, wenn:

$$T_q = a_q \cos(\lambda t + b)\,; \quad T_u = a_u \cos(\lambda t + b)\,; \quad T_{u'} = a_{u'} \cos(\lambda t + b)\,; \quad T_v = a_v \cos(\lambda t + b)$$

genommen werden u. s. w.

Die $q^{(0)}$, $u^{(0)}$ $\cdots$ erhalten wir sofort nach Auflösung der Gleichung in w:

$$(\beta) \qquad D(w) = \begin{vmatrix}
A - w^2, & B, & C, & D \\
A', & B' - w^2, & C', & D' \\
A'', & B'', & C'' - w^2, & D'' \\
A''', & B''', & C''', & D''' - w^2
\end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln derselben mit:

$$\pm m, \quad \pm m', \quad \pm m'', \quad \pm m'''$$

und mit:

$$\begin{gathered}
\eta, \quad \eta', \quad \eta'', \quad \eta''' \\
\pi, \quad \pi', \quad \pi'', \quad \pi'''
\end{gathered}$$

die 8 Integrationsconstanten, und weiter der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} \omega &= mt + \pi \\ \omega' &= m't + \pi' \\ \omega'' &= m''t + \pi'' \\ \omega''' &= m'''t + \pi''' , \end{aligned}$$

so hat man:

$$q^{(0)} = \frac{\partial D(m)}{\partial A} \eta \sin\omega + \frac{\partial D(m')}{\partial A'} \eta' \sin\omega' + \frac{\partial D(m'')}{\partial A''} \eta'' \sin\omega'' + \frac{\partial D(m''')}{\partial A'''} \eta''' \sin\omega'''$$

$$u^{(0)} = \frac{\partial D(m)}{\partial B} \eta \sin\omega + \frac{\partial D(m')}{\partial B'} \eta' \sin\omega' + \frac{\partial D(m'')}{\partial B''} \eta'' \sin\omega'' + \frac{\partial D(m''')}{\partial B'''} \eta''' \sin\omega'''$$

u. s. w.

Was nun die mit q_λ, u_λ, u'_λ und v_λ, sowie die entsprechenden mit $\lambda' \cdots$ als Indices versehenen Theile der allgemeinen Integrale betrifft, so haben sie bekanntlich die Form:

$$\begin{aligned} q_\lambda &= \alpha_q \cos(\lambda t + b) \\ u_\lambda &= \alpha_u \cos(\lambda t + b) \\ u'_\lambda &= \alpha_{u'} \cos(\lambda t + b) \\ v_\lambda &= \alpha_v \cos(\lambda t + b) \end{aligned}$$

u. s. w.

Die α_q, α_u, $\alpha_{u'}$, α_v werden bestimmt aus den Gleichungen:

$$(\gamma) \quad \begin{aligned} D(\lambda).\alpha_q &= a_q . \frac{\partial D(\lambda)}{\partial A} + a_u \frac{\partial D(\lambda)}{\partial A'} + a_{u'} \frac{\partial D(\lambda)}{\partial A''} + a_v \frac{\partial D(\lambda)}{\partial A'''} \\ D(\lambda).\alpha_u &= a_q . \frac{\partial D(\lambda)}{\partial B} + a_u \frac{\partial D(\lambda)}{\partial B'} + a_{u'} \frac{\partial D(\lambda)}{\partial B''} + a_v \frac{\partial D(\lambda)}{\partial B'''} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

die nicht mehr gültig sind, wenn $D(\lambda) = 0$, d. h. wenn λ gleich einer der Grössen m, m', m'', m''' ist. In diesem Falle treten, wie bekannt, Glieder auf, welche t ausserhalb des trigonometrischen Zeichens als Factoren besitzen.

Wir kehren jetzt zum System (9) zurück.

Die Principien, die ich bei der Integration desselben befolgen werde, sind den in der oben genannten Abhandlung gegebenen analog, bedürfen jedoch hier einer speciellen Erläuterung, weil gewisse Modificationen, der Natur der Aufgabe entsprechend, vorgenommen werden müssen.

Erstens ist zu bemerken, dass die früher von mir betrachteten Gleichungen die Form (1) besassen, was hier wegen der durch (8) gegebenen Verschiedenheit der Variabelen u, u', v von den ϱ, ϱ', δ nicht mehr der Fall ist. Indessen ist dieser Umstand, wie wir sehen werden, ohne weiteren Einfluss. Zweitens aber haben wir bei der Ausführung der successiven Annäherungen bei den Gleichungen (1) die Entwickelungen nach den Potenzen der rechts stehenden Coefficienten, die in der Störungstheorie eine kleine Grösse — m und m' — als Factoren enthalten, ermittelt. Allerdings könnte man auch hier dieselbe Methode benutzen, ohne dass das Resultat dadurch verschieden ausfallen würde, aber es empfiehlt sich, um der Uebersichtlichkeit willen, nach gewissen von den neuen 8 Integrationsconstanten zu entwickeln.

Ueber 4 der durch die Integration des Systems (9) eingeführten 8 Constanten, die mit:

$$\eta,\ \eta',\ \zeta,\ \varkappa$$

bezeichnet werden, wollen wir nämlich die Annahme machen, dass sie hinreichend klein sind, damit die Reihen convergent bleiben. Hiermit ist nicht etwa gesagt, dass sie sehr klein sein sollen. In dem Sonnensystem haben allerdings η, η', $\varkappa$ wegen der Kleinheit der Excentricitäten und gegenseitigen Neigungen sehr kleine Werthe. Dagegen ist ζ mit ihnen nicht zu vergleichen. Ich wiederhole weiter noch einmal, um allen Missverständnissen vorzubeugen, dass ich nicht etwa von ζ voraussetze, dass es so klein sein soll, dass die Methode in der Form, wie sie hier gegeben wird, practisch bequem wird. Für meinen Zweck ist es ausreichend, wenn die Reihen überhaupt convergiren. Wenn es auf numerische Anwendung ankommt, so hat man in verschiedenen Fällen andere Combinationen der Integrationsconstanten, der Natur des augenblicklichen Problems entsprechend, einzuführen. Es ist aber klar, dass hierdurch die Convergenzbereiche oder die Gültigkeit unserer Resultate nicht im Mindesten modificirt werden. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass unsere Methode, wie sie hier vorliegt, ohne Weiteres für das System Sonne-Erde-Mond und ähnliche mit Vortheil benutzt werden kann.

Die 4 übrigen Integrationsconstanten, die wir mit:

$$\pi, \pi', \omega, \omega'$$

bezeichnen, gehen nur in die Argumente ein und dürfen jeden beliebigen reellen Werth annehmen.

Wie bemerkt, werden wir also die analytischen Ausdrücke für r, r' und Δ nach Potenzen von η, η', ζ und $\varkappa$ entwickeln, und zwar wird dies durch eine Reihe von Operationen, die wir der Kürze wegen Approximationen nennen wollen, geschehen. In der ersten Approximation sollen die Glieder erster Ordnung in Bezug auf jene Constanten, in der zweiten Approximation alle Glieder zweiter Ordnung, u. s. w. ermittelt werden.

Wir werden ferner sehen, dass die Zahl der auftretenden Argumente 4 ist; wir bezeichnen dieselben mit:

$$(10) \qquad \begin{aligned} w_1 &= n\,t+\pi \\ w_2 &= n'\,t+\pi' \\ w_3 &= \nu t+\omega \\ w_4 &= \mu t+\omega' \end{aligned}$$

ohne durch die Bezeichnung, wie schon oben bemerkt, irgendwelche Unsymmetrie andeuten zu wollen. In der That entsprechen im allgemeinen Problem n, n' und ν einander vollständig symmetrisch. Dagegen ist μ eine in Bezug auf alle drei Körper vollständig symmetrische Grösse.

Die Quantitäten n, n', ν, μ sind selbst Potenzreihen nach den Potenzen von η, η', ζ, $\varkappa$ und werden somit ebenfalls durch die aufeinanderfolgenden Approximationen ermittelt. Es ist aber zu bemerken, dass die Glieder in jenen Grössen alle gerader Ordnung sind; in Folge dessen werden dieselben nur in den ersten, dritten, fünften, u. s. w. Approximationen verbessert werden.

Schliesslich werden wir noch sehen, dass die u, u', v, q in der Form von trigonometrischen Reihen sich darstellen lassen, wo die Argumente die Form $iw_1 \pm i'w_2 \pm jw_3 \pm lw_4$ besitzen und i, i', j, l ganze positive Zahlen oder Null bedeuten, und zwar wird ein Glied von jenem Argument immer als Factor:

$$\eta^i \, \eta'^{i'} \, \zeta^j \, \varkappa^l$$

haben, und demnach, in unserem Sinne, von der Ordnung $i+i'+j+l$ sein. Indem wir weiter in den Ausdrücken für u, u', v, q lauter Sinusglieder ohne constante Glieder haben werden, wird es weiter ersichtlich aus den Formeln (7) und (8), dass ϱ, ϱ' und δ, sowie r^2, r'^2 und Δ^2 lauter Cosinusglieder enthalten werden.

Ich habe diese Resultate der folgenden Untersuchung, um die Uebersicht zu erleichtern, vorausgeschickt.

Nachdem wir nun für u, u', v, q, ϱ, ϱ', δ alle Glieder k^{ter} Ordnung ermittelt haben werden, denken wir uns, mit Hülfe derselben, die rechten Seiten von (9) bis auf Glieder $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung incl. berechnet. Wenn nun, was sich als richtig herausstellen wird, diese Ausdrücke rein periodisch sind, so nehmen hierdurch die Gleichungen (9) die Form (α) an, und wir können sofort die Integration ausführen; dieselbe giebt uns alsdann die $(k+1)^{\text{ste}}$ Approximation. Indessen ist hierbei zu bemerken, dass diese Approximation nur in dem Falle bloss rein periodische Glieder geben wird, wenn in den Ausdrücken rechts keine Glieder von den Argumenten nt, $n't$, νt oder μt vorkommen. Denn es werden, wie schon bemerkt worden, in einem solchen Falle Glieder zum Vorschein kommen, die t als Factor besitzen. Indessen werden wir sehen, dass solche Glieder leicht vermieden werden können. Im Allgemeinen werden sie sich nämlich auf die Form:

$$a \sin w_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

reduciren. Demzufolge schreiben wir die Gleichungen (9), den früher entwickelten Principien analog, in der Form:

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2 q}{dt^2} + (\alpha_0-\lambda_0)u + (\beta_0-\mu_0)u' + (\gamma_0-\nu_0)v - \tau_0\, q \\ &\qquad = (U_0-\lambda_0)u + (U'_0-\mu_0)u' + (V_0-\nu_0)v - \tau_0\, q \\ &\frac{d^2 u}{dt^2} + (\alpha_1-\lambda_1)u + (\beta_1-\mu_1)u' + (\gamma_1-\nu_1)v + (\varepsilon_1-\tau_1)\, q \\ &\qquad = (U_1-\lambda_1)u + (U'_1-\mu_1)u' + (V_1-\nu_1)v + (Q_1-\tau_1)\, q \\ &\frac{d^2 u'}{dt^2} + (\alpha_2-\lambda_2)u + (\beta_2-\mu_2)u' + (\gamma_2-\nu_2)v + (\varepsilon_2-\tau_2)\, q \\ &\qquad = (U_2-\lambda_2)u + (U'_2-\mu_2)u' + (V_2-\nu_2)v + (Q_2-\tau_2)\, q \\ &\frac{d^2 u}{dt^2} + (\alpha_3-\lambda_3)u + (\beta_3-\mu_3)u' + (\gamma_3-\nu_3)v + (\varepsilon_3-\tau_3)\, q \\ &\qquad = (U_3-\lambda_3)u + (U'_3-\mu_3)u' + (V_3-\nu_3)v + (Q_3-\tau_3)\, q\,. \end{aligned}$$

Die Constanten λ, μ, ν, τ lassen sich alsdann in jeder Approximation so bestimmen, dass die Glieder der eben bezeichneten Natur rechts verschwinden. Nachdem diese Bestimmung ausgeführt worden ist, erhält man zur Ermittelung der dieser Approximation entsprechenden Werthe von n, n', ν, μ die Gleichung in w:

$$(12) \qquad R(w) = \begin{vmatrix} \alpha_0 - \lambda_0 & , & \beta_0 - \mu_0 & , & \gamma_0 - \nu_0 & , & -\tau_0 - w^2 \\ \alpha_1 - \lambda_1 - w^2 & , & \beta_1 - \mu_1 & , & \gamma_1 - \nu_1 & , & \varepsilon_1 - \tau_1 \\ \alpha_2 - \lambda_2 & , & \beta_2 - \mu_2 - w^2 & , & \gamma_2 - \nu_2 & , & \varepsilon_2 - \tau_2 \\ \alpha_3 - \lambda_3 & , & \beta_3 - \mu_3 & , & \gamma_3 - \nu_3 - w^2 & , & \varepsilon_3 - \tau_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Wurzeln derselben sind nämlich:

$$\pm n, \quad \pm n', \quad \pm \nu, \quad \pm \mu.$$

Um jetzt die erste Approximation d. h. die Glieder erster Ordnung in q, u, u', v zu erhalten, setzen wir rechts in (9) oder (11) $q = u = u' = v = 0$, oder, was dasselbe ist, $\varrho = \varrho' = \delta = \eta = 0$.

Durch Integration erhält man alsdann sofort:

$$(13) \qquad \begin{aligned} q &= \eta_0 \sin w_1 + \eta'_0 \sin w_2 + \zeta_0 \sin w_3 + \varkappa \sin w_4 \\ u &= \eta \sin w_1 + \eta'_1 \sin w_2 + \zeta_1 \sin w_3 + \varkappa_1 \sin w_4 \\ u' &= \eta_2 \sin w_1 + \eta' \sin w_2 + \zeta_2 \sin w_3 + \varkappa_2 \sin w_4 \\ v &= \eta_3 \sin w_1 + \eta'_3 \sin w_2 + \zeta \sin w_3 + \varkappa_3 \sin w_4 , \end{aligned}$$

wo η, η', ζ und $\varkappa$ die oben bezeichneten 4 Integrationsconstanten und $\eta_0, \eta'_0, \zeta_0, \eta'_1, \zeta_1, \cdots$ Grössen bedeuten, die aus den partiellen Differentialquotienten von $R(w)$ in oben angegebener Weise zusammengesetzt sind, und ausserdem $\eta, \eta', \cdots$ resp. als Factoren besitzen. Die Werthe von n, n', ν, μ, welche dieser Approximation entsprechen, erhält man aus (12), wenn die λ, μ, ν, τ gleich Null gesetzt werden.

Aus (8) ergeben sich jetzt für $\varrho, \varrho', \delta$ ähnliche Ausdrücke; nur erhalten wir hier Cosinusglieder anstatt Sinusglieder.

Um nun die zweite Approximation zu ermitteln, haben wir rechts in (9) oder (11), mit den gewonnenen Ausdrücken, die Producte Uu, $U'u'$, Vv, Qq zu berechnen. Die U, U', V, Q können nur in den Gliedern erster Ordnung richtig werden, und zwar werden sie, da sie nur Potenzen von den $\varrho, \varrho', \delta$ enthalten, aus lauter Cosinusgliedern bestehen, also die Form:

$$\alpha \cos w_1 + \beta \cos w_2 + \gamma \cos w_3 + \delta \cos w_4$$

haben, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von der ersten Ordnung — die Glieder höherer Ordnung werden für den Moment vernachlässigt — sind.

Wegen der Ausdrücke (13) werden demnach die rechten Seiten von (9) oder (11) nur Sinusglieder von den Argumenten:

$$2w_1, \ 2w_2, \ \cdots \ w_1 \pm w_2, \ w_2 \pm w_3, \ \cdots$$

enthalten, deren Coefficienten alle von der zweiten Ordnung sind. In Folge dessen lässt sich die Integration wie beim System (α) unmittelbar ausführen, und wir erhalten für q, u, u', v Ausdrücke von der Form:

$$\sum_{\alpha} (1)_\alpha \sin w_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} (2)_{\alpha, \beta} \sin (w_\alpha \pm w_\beta) ,$$

wo wir der Kürze wegen mit $(1)_\alpha$, $(2)_{\alpha, \beta}$ Coefficienten von der ersten und zweiten Ordnung resp. bezeichnet haben. α und β bedeuten die Zahlen 1, 2, 3, 4. Hieraus folgt ferner, dass die $\varrho, \varrho', \delta$ ebensolche Ausdrücke sind, wo wir nur Cosinusglieder haben.

Die dritte Approximation erfordert eine besondere Betrachtung, weil wir hier zum ersten Mal genöthigt werden, die in (11) eingeführten Constanten λ, μ, ν, τ in passender Weise zu bestimmen.

Wollten wir nämlich jetzt die Gleichungen (9) ohne Abänderung benutzen, so hätten wir mit den eben gewonnenen Ausdrücken für q, u, u', v — lauter Sinusglieder — und $\varrho, \varrho', \delta$ — lauter Cosinusglieder — die rechten Seiten, d. h. die Summen:

$$U_i u + U'_i u' + V_i v + Q_i q$$
$$(i = 0, 1, 2, 3; \ Q_0 = 0)$$

zu berechnen. Wir würden für dieselben Ausdrücke von der Form:

$$\sum_{\alpha, \beta} (2)_{\alpha, \beta} \sin (w_\alpha \pm w_\beta) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (3)_{\alpha, \beta, \gamma} \sin (w_\alpha \pm w_\beta \pm w_\gamma)$$

erhalten.

Unter den Gliedern dritter Ordnung kommen nun Glieder vor, welche die w_α als Argumente besitzen. Wollte man demnach die Integration ohne Weiteres ausführen, so würden dementsprechend Glieder mit t als Factor auftreten. Diese Glieder werden indessen gehoben dadurch, dass wir die Form (11) gewählt, d. h. dadurch, dass wir rechts und links die Summe:

$$\lambda_i u + \mu_i u' + \nu_i v + \tau_i q$$

abgezogen haben. Da nun, wie wir gleich sehen werden, die λ_i, μ_i, ν_i, τ_i von der zweiten Ordnung sind, so haben wir auf Grund von (13) in dieser Approximation überall rechts zu schreiben:

$$\begin{aligned}\lambda_i u + \mu_i u' + \nu_i v + \tau_i q = &[\lambda_i \eta + \mu_i \eta_2 + \nu_i \eta_3 + \tau_i \eta_0] \sin w_1 \\ + &[\lambda_i \eta'_1 + \mu_i \eta' + \nu_i \eta'_3 + \tau_i \eta'_0] \sin w_2 \\ + &[\lambda_i \zeta_1 + \mu_i \zeta_2 + \nu_i \zeta + \tau_i \zeta_0] \sin w_3 \\ + &[\lambda_i \varkappa_1 + \mu_i \varkappa_2 + \nu_i \varkappa_3 + \tau_i \varkappa] \sin w_4\end{aligned}$$

Schreiben wir nun in der Summe $U_i u + U'_i u' + V_i v + Q_i q$ die Glieder, welche nur $\sin w_\alpha$ enthalten, in der Form:

$$l_i \eta \sin w_1 + m_i \eta' \sin w_2 + n_i \zeta \sin w_3 + p_i \varkappa \sin w_4$$

so erhalten wir, damit alle solche Glieder in dem Ausdruck:

$$(U_i - \lambda_i) u + (U'_i - \mu_i) u' + (V_i - \nu_i) v + (Q_i - \tau_i) q$$

sich heben, zur Bestimmung von λ_i, μ_i, ν_i, τ_i die folgenden linearen Gleichungen:

$$(14)\qquad \begin{aligned}\lambda_i \eta + \mu_i \eta_2 + \nu_i \eta_3 + \tau_i \eta_0 &= l_i \eta \\ \lambda_i \eta'_1 + \mu_i \eta' + \nu_i \eta'_3 + \tau_i \eta'_0 &= m_i \eta' \\ \lambda_i \zeta_1 + \mu_i \zeta_2 + \nu_i \zeta + \tau_i \zeta_0 &= n_i \zeta \\ \lambda_i \varkappa_1 + \mu_i \varkappa_2 + \nu_i \varkappa_3 + \tau_i \varkappa &= p_i \varkappa .\end{aligned}$$

In der ersten hebt sich der Factor η, in der zweiten der Factor η' u. s. w. weg, so dass die Werthe von λ_i, μ_i, ν_i, τ_i von derselben Ordnung wie die l_i, m_i, n_i, p_i d. h. von der zweiten Ordnung, wie schon bemerkt, werden.

Nachdem die Bestimmung der λ_i, μ_i, ν_i, τ_i in dieser Weise ausgeführt worden ist, bleiben rechts in (11) nur solche Glieder zurück, welche zu sog. säcularen Gliedern nicht Veranlassung geben können. Die Integration liefert hierauf Ausdrücke für u, u', v und q, die alle Glieder dritter Ordnung enthalten.

Man sieht nun ohne Weiteres ein, wie die folgenden Operationen zu bewerkstelligen sind. Nach jeder neuen Approximation bringt man das System (11) auf die Form (α) und bestimmt die λ, μ, ν, τ so, dass keine Glieder mit t als Factor in den Integralen entstehen. Man sieht weiter, dass die Ausdrücke für u, u', v, q keine constanten Glieder enthalten; in Folge dessen hat man in den gegenseitigen Entfernungen keine Glieder von der Form $a.t$. Im Uebrigen überzeugt man sich leicht, dass die oben voraufgeschickten Resultate richtig sind.

Ausnahmefälle treten ein, wenn die numerischen Werthe der Constanten n, n' ν, μ solche sind, dass sich ganze Zahlen i, i', j, l so bestimmen lassen, dass (i, i', j, l nicht alle Null)

$$in + i'n' + j\nu + l\mu$$

exact Null wird. Da solche Fälle in der Natur höchst unwahrscheinlich sind, können wir dieselben hier ausser Acht lassen.

Bis jetzt haben wir über die relativen Grössen der drei Massen keine specielle Voraussetzung gemacht. Indem wir jetzt zum Schluss die Verhältnisse in dem Sonnensystem besprechen, setzen wir voraus, dass die zwei Massen m und m' im Vergleich zu M sehr kleine Werthe besitzen.

Bemerken wir jetzt, dass, wenn entweder $M = 0$, $m = 0$, oder $M = 0$, $m' = 0$, oder endlich $m = 0$, $m' = 0$ gesetzt wird, die Wurzeln von (12) sich auf

$$\pm n, \quad \pm n', \quad \pm (n+n'), \quad \pm (n-n')$$

reduciren, so kann man, weil m und m' sehr klein sind, immer setzen:

$$\begin{aligned}\nu &= n + n' + \sigma \\ \mu &= n - n' + \sigma' ,\end{aligned}$$

wo σ und σ' von der Ordnung der Massen m und m' sind.

In Folge dessen werden wir — im Falle der Sonne und zweier Planeten — z. B. in dem Ausdruck für r^2 zwei besondere Klassen von Gliedern haben, deren Coefficienten durch die Division mit einem Divisor von der Ordnung der m und m' beträchtlich werden, und die nichts Anderes sind, als die früher von Lagrange, Laplace und späteren Forschern gefundenen, von Gyldén »elementar« genannten Glieder. Die eine Klasse hat die Form:

$$\alpha \cos [(m \pm i\sigma \pm i'\sigma') t + A].$$

Weil hier der Factor $n \pm i\sigma \pm i'\sigma'$ sich sehr wenig von m unterscheidet, so wird — vergl. (γ) — der Divisor, der durch die Integration von (n) eingeführt wird, selbst von der Ordnung der beiden kleinen Massen. Die in Bezug auf η, η', ζ und $\varkappa$ niedrigsten Glieder dieser Klasse müssen als Factoren entweder $\eta\zeta$, $\eta'\zeta$, $\eta\varkappa$ oder $\eta'\varkappa'$ haben, sind also, nach gewöhnlichem Sprachgebrauch wenigstens mit der ersten Potenz der Excentricitäten multiplicirt. Die zweite Klasse rührt aus den Gliedern in u, u', v her, welche von der Form:

$$\beta \sin[(i\sigma \pm i'\sigma')t + B]$$

sind. Durch die Integration nach der Formel (8) bekommt deshalb ϱ und also auch r^2 ein Glied:

$$-\frac{\beta}{i\sigma \pm i'\sigma'}\cos[(i\sigma \pm i'\sigma')t + B]$$

β ist hier von derselben Ordnung in Bezug auf m und m' wie der Nenner. Die Coefficienten dieser Glieder müssen immer als Factoren entweder $\eta\eta'\zeta$, $\eta\eta'\varkappa$ oder $\eta^2\zeta\varkappa$ u. s. w. enthalten, sind also in den Excentricitäten und der gegenseitigen Neigung wenigstens von der zweiten Ordnung.

Dorpat 1883 November 1.

And. Lindstedt.

Ueber die Sonnenfinsterniss am 16. Mai 1882.

Die Berechnung der folgenden Beobachtungen von dieser Sonnenfinsterniss ist nach der Bessel'schen Berechnungsart gemacht, so wie dieselbe in Brünnow's Lehrbuch der sphärischen Astronomie (im Jahre 1851 herausgegeben) dargestellt ist. Die AR., Decl. und Parallaxe des Mondes nebst AR., Decl. und Entfernung der Sonne, welche respective durch α, δ, π und α', δ', Δ' bezeichnet sind, wurden mittelst Interpolation aus den Angaben des Nautical Almanac für die angesetzten sich auf den Greenwicher Meridian beziehenden mittleren Zeiten abgeleitet. Hiernach sind in Rechnung genommen:

	α	δ	π	α'	δ'	$\log\Delta'$
17^h	52° 19′ 27″.45	+19° 25′ 3″.4	58′ 19″.87	53° 50′ 0″.69	+19° 18′ 8″.85	0.0050792
18	52 55 40.09	30 17.52	18.39	52 29.49	18 42.76	829
19	53 31 53.24	35 24.15	16.90	54 58.32	19 16.64	865
20	54 8 6.78	40 23.28	15.40	57 27.15	19 50.48	901
21	54 44 20.64	45 14.9	13.89	59 55.99	20 24.29	937
22	55 20 34.77	49 59.0	12.37	54 2 24.85	20 58.06	974

Hieraus ergiebt sich die AR. und Decl. des Punktes am Himmel, in welchem die Sonne dem Monde erscheint, sowie $\log g$ aus der Formel $g = 1 - \frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}$.

	a	d	$\log g$
17^h	53° 50′ 14″.25	+19° 18′ 7″.81	9.9989134
18	52 38.00	18 41.02	130
19	55 1.78	19 14.22	125
20	57 25.55	19 47.40	120
21	59 49.34	20 20.56	116
22	54 2 13.14	20 53.70	112

Die Horizontalparallaxe π' der Sonne ist $= 8''.848$, der Halbmesser derselben $= 16' 0''.45$, der Halbmesser des Mondes $= 0.27234$ gesetzt. Die Coordinaten des Mondes sind durch x, y, z bezeichnet, wobei z die Axe ist, welche durch den Punkt a, d geht; l ist der Halbmesser des Schattenkegels auf der Ebene xy und λ die Tangente des Winkels an der Spitze des Schattenkegels. Es werden:

	x	y	z	l	$\log\lambda$
17^h	−1.4676644	+0.1251557	58.91938	0.5448680	7.6651482
18	−0.9209306	+0.2016240	58.95522	50315	449
19	−0.3741093	+0.2777974	58.98603	51723	418
20	+0.1727494	+0.3536769	59.01187	52900	387
21	+0.7195845	+0.4292607	59.03275	53843	355
22	+1.2663552	+0.5045464	59.04863	54554	320