Astronomische Nachrichten.
Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.
Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Band 88. Nr. 2096—97. 8 und 9.

Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

Nachdem in Nr. 2039 dieser Zeitschrift ein neuer Beweis dieser Formel mitgetheilt worden ist, erübrigt noch die Genauigkeitsschätzung, und genügt es dabei, eben nur die ursprüngliche Formel zu betrachten, weil sie in ihrer Verallgemeinerung auf complicirtere Ausgleichungsfälle so zusammengesetzt wird, dass sie keine Rechnungsersparniss gegenüber der Benutzung der Fehlerquadrate bietet. In dieser Schätzung bedienen wir uns des mittlern Fehlers der Formel und zeigen, dass der wahrscheinliche Beobachtungsfehler ρ gleich ist

$$(1)\qquad \rho = 0.84535\ldots\frac{[\text{val. abs. }\lambda]}{\sqrt{n(n-1)}}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n-1} - n + \sqrt{n(n-2)}}{n}}\right\}.$$

Jedoch genügt es, für beliebige Werthe der Beobachtungsanzahlen n zu setzen:

$$(2)\qquad \rho = 0.84535\ldots\frac{[\text{val. abs. }\lambda]}{\sqrt{n(n-1)}}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}\right\}.$$

Hierin bedeuten übereinstimmend mit der Bezeichnung in Nr. 2039 die λ die Verbesserungen der n Beobachtungen auf's arithmetische Mittel.

Indem wir zum Nachweis der Formel übergehen, erinnern wir daran, dass nach Nr. 2039 der Durchschnittswerth von $[\text{val. abs. }\lambda] : \sqrt{n(n-1)}$ gleich dem Durchschnittsfehler ϑ oder gleich $1 : h\sqrt{\pi}$ ist. Das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von $1 : h\sqrt{\pi}$ aus einem Einzelwerth von $[\text{val. abs. }\lambda] : \sqrt{n(n-1)}$ ist daher gleich dem Durchschnittswerth von

$$\left(\frac{[\text{val. abs. }\lambda]}{\sqrt{n(n-1)}} - \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)^2.$$

Hierfür kann man, wie die Aufstellung des Quadrates ergiebt, setzen den Durchschnittswerth von

$$(3)\qquad \frac{[\text{val. abs. }\lambda]^2}{n(n-1)} - \frac{1}{\pi h^2},$$

so dass die Aufgabe auf die Berechnung des Durchschnittswerths von $[\text{val. abs. }\lambda]^2$ hinausläuft. Es ist aber

$$[\text{val. abs. }\lambda]^2 = [\lambda_i\,\lambda_i\,] + [\text{val. abs. }\lambda_i\,\lambda_k\,]$$

$$i \gtrless k, \text{ von } 1\ldots n.$$

Jedes der $n(n-1)$ Glieder val. abs. $\lambda_i\,\lambda_k$ hat nun gleich grossen Durchschnittswerth P, weil die Ausgleichung directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit für die λ die einfache Beziehung zu den wahren Beobachtungsfehlern giebt:

$$(4)\qquad \lambda_i = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n},$$

sich also die λ nur durch den Index unterscheiden. Berücksichtigt man nun noch die bekannte Relation, Durchschnitts-Werth von $[\lambda_i\,\lambda_i\,] = (n-1) : 2h^2$, so folgt für den Durchschnittswerth von $[\text{val. abs. }\lambda]^2$ der Ausdruck:

$$(5)\qquad \frac{n-1}{2h^2} + n(n-1)P.$$

Für $n = 2$ ist nach Nr. 2039, § 2, P gleich dem Durchschnittswerth von $\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)^2$ und eine kurze Rechnung zeigt hiernach, dass

$$(6)\qquad P = \frac{1}{4h^2};\ n = 2.$$

Für $n > 2$ ergiebt sich P gleich dem Durchschnittswerthe von

$$(7)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\,\lambda_1\,\lambda_2 \sin(u\,\lambda_1\,\lambda_2),$$

wobei $\lambda_1\,\lambda_2$ einfach mit seinem, durch den schon in Nr. 2039 (11) eingeführten Discontinuitätsfactor ausgedrückten, Vorzeichen multiplicirt ist. Man hat nun

$$(8)\qquad \begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\varepsilon_1(n-1)}{n} - \frac{\varepsilon_2}{n} - \frac{\sigma}{n}\\ \lambda_2 &= -\frac{\varepsilon_1}{n} + \frac{\varepsilon_2(n-1)}{n} - \frac{\sigma}{n}\\ \sigma &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{n-1}.\end{aligned}$$

Hierin treten ε_1, ε_2, σ als drei von einander unabhängige Fehlergrössen auf, und um den Ausdruck (7) mit seiner Wahrscheinlichkeit multipliciren zu können, ist vorerst die Wahrscheinlichkeit von σ abzuleiten, genauer: die Wahrscheinlichkeit, dass $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$ zwischen σ und $\sigma + d\sigma$ enthalten ist.

Bezeichnen wir die Indices 3...n für den Augenblick mit 1...k, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass der absolute Werth von $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k$ oder kurz $[\varepsilon]$ zwischen σ und σ_1 liegt, gleich

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^k \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_k\, e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos[\varepsilon]\,\omega\, d\omega \int_\sigma^{\sigma_1} \cos\omega\Theta\, d\Theta,$$

wobei der unter den auf ε bezüglichen Integralzeichen beigefügte doppelintegrale Factor bekanntlich gleich 1 ist, sobald der absolute Werth von $[\varepsilon]$ zwischen σ und σ_1 liegt, während er sonst verschwindet. Da nun die Wahrscheinlichkeiten für positive und negative $[\varepsilon]$ ohne Zweifel gleich gross sind, hat man vom oben gegebenen Ausdruck die Hälfte zu nehmen, wenn man beide Fälle unterscheidet. Man erhält daher, indem man zugleich für $\cos[\varepsilon]\,\omega$ die Exponentialgrösse $e^{i[\varepsilon]\omega}$ substituirt, als Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon]$ zwischen σ und σ_1 liegt, den reellen Theil von

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^k \int_0^\infty d\omega \int_\sigma^{\sigma_1} \cos\omega\Theta\, d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_k\, e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]+i[\varepsilon]\omega}.$$

Die Ausführung der Integrationen für die ε geschieht nach Formel (13) in Nr. 2039 und ergiebt, da das Imaginäre verschwindet, sofort als gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_\sigma^{\sigma_1} \cos\omega\Theta\, d\Theta\, e^{-\frac{k^2\omega^2}{4h^2}}.$$

Die Integration nach ω giebt weiter

$$\frac{h}{\sqrt{\pi k}}\int_\sigma^{\sigma_1} d\Theta\, e^{-\frac{\Theta^2 h^2}{k}}$$

und wenn man nun $\sigma_1 = \sigma + d\sigma$ setzt, so folgt als Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon]$ zwischen σ und $\sigma + d\sigma$ enthalten sein werde:

$$(9)\qquad \frac{h}{\sqrt{\pi k}}\, e^{-\frac{\sigma^2 h^2}{k}}\, d\sigma.$$

Da im vorliegenden Falle $k = n - 2$ ist, so hat man also als Wahrscheinlichkeit von σ einzuführen den Ausdruck:

$$(10)\qquad \frac{h}{\sqrt{\pi(n-2)}}\, e^{-\frac{\sigma^2 h^2}{n-2}}\, d\sigma.$$

Der Durchschnittswerth von (7), nämlich P, wird erhalten durch Multiplication des Ausdrucks (7) mit den Wahrscheinlichkeiten von ε_1, ε_2 und σ und Integration über alle möglichen Werthe. Es ist also

$$P = \frac{2}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{n-2}} \int_0^\infty \left(\frac{du}{u}\lambda_1\lambda_2 \sin(u\lambda_1\lambda_2) . I\right)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, e^{-h^2\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\sigma^2}{n-2}\right)}.$$

Führen wir mittelst der Substitutionen (8) anstatt ε_1 und ε_2 ein λ_1 und λ_2, so ändert sich in P nur I und zwar wird

$$I = \frac{n}{n-2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2\, e^{-h^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{n-2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, e^{-\frac{n}{(n-2)^2}(\sigma+\lambda_1+\lambda_2)^2 h^2}.$$

Die Integration nach σ giebt anstatt des Integrales den Factor $\frac{n-2}{h\sqrt{n}}\sqrt{\pi}$; setzt man nun für $\sin(u\lambda_1\lambda_2)$ die Exponentialgrösse $e^{iu\lambda_1\lambda_2}$ und führt zugleich die Variable y für λ_2 ein:

$$y = \lambda_2 + \frac{\lambda_1}{n-1},$$

so ergiebt sich P als der Factor von i in dem Ausdrucke

$$\frac{2h^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{n}{n-2}}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(d\lambda_1\,\lambda_1\, e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda_1^2 - iu\frac{\lambda_1^2}{n-1}} . I_1\right)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\left(y - \frac{\lambda_1}{n-1}\right) e^{-\frac{n-1}{n-2}h^2y^2 + iu\lambda_1 y}.$$

Durch Integration nach y erhält man für I_1 den Ausdruck

$$\frac{\lambda_1\sqrt{\pi}}{2h}\left(\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\right)^3\left(\frac{iu}{h^2}-\frac{2}{n-2}\right)e^{-\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{u^2\lambda_1^2}{4h^2}}$$

und wenn man jetzt für den imaginären Theil von

$$\left(\frac{iu}{h^2}-\frac{2}{n-2}\right)e^{-iu\frac{\lambda_1^2}{n-1}}$$

den leicht zu construirenden Ausdruck

$$i\left(\frac{u}{h_2}\cos\frac{u\lambda_1^2}{n-1}+\frac{2}{n-2}\sin\frac{u\lambda_1^2}{n-1}\right)$$

setzt, so wird P gleich

$$\frac{2(n-2)}{\pi(n-1)h}\sqrt{\frac{n}{\pi(n-1)}}\int_0^\infty d\lambda_1\,\lambda_1^2\,e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda_1^2}\int_0^\infty du\cos\frac{u\lambda_1^2}{n-1}\,e^{-\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\lambda_1^2u^2}{4h^2}}$$

$$+\frac{4h}{\pi(n-1)}\sqrt{\frac{n}{\pi(n-1)}}\int_0^\infty d\lambda_1\,\lambda_1^2\,e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda_1^2}\int_0^\infty du\,\frac{\sin\frac{u\lambda_1^2}{n-1}}{u}\,e^{-\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\lambda_1^2u^2}{4h^2}}.$$

Nun ist aber, wie bekannt,

(11) $$\int_0^\infty e^{-\alpha^2z^2}\cos 2\beta z\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}},$$

α positiv zu nehmen.

Wenn man beiderseits mit $d\beta$ multiplicirt und von $\beta=$ Null bis γ integrirt, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2z^2}\frac{\sin 2\gamma z}{z}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^\gamma e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}d\beta,$$

oder, indem man noch rechter Hand $\beta=\gamma z$ setzt,

(12) $$\int_0^\infty e^{-\alpha^2z^2}\frac{\sin 2\gamma z}{z}dz=\frac{\gamma}{\alpha}\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}z^2}dz,$$

α positiv zu nehmen.

Die Anwendung der Formeln (11) und (12) auf den Ausdruck für P gestattet die Integration nach u und giebt

$$P=\frac{2\sqrt{n(n-2)}}{(n-1)\pi}\int_0^\infty d\lambda_1\,\lambda_1\,e^{-\frac{n-1}{n-2}h^2\lambda_1^2}$$

$$+\frac{4h^2}{\pi(n-1)^2}\sqrt{\frac{n}{n-2}}\int_0^1 dz\int_0^\infty d\lambda_1\,\lambda_1^3\,e^{-\lambda_1^2\frac{h_2}{n-1}\left(n+\frac{z^2}{n-2}\right)}$$

Hieraus folgt durch Weiterentwickelung

$$P=\frac{(n-2)\sqrt{n(n-2)}}{\pi(n-1)^2h^2}+\frac{2}{\pi nh^2\sqrt{n(n-2)}}\int_0^1\frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n(n-2)}\right)^2}$$

und endlich unter Beachtung der Relation

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{n(n-2)}}=\arcsin\frac{1}{n-1},$$

(13) $$P=\frac{\sqrt{n(n-2)}+\arcsin\frac{1}{n-1}}{\pi n h^2};\quad n>2.$$

Obgleich für $n>2$ entwickelt, gilt doch diese Formel auch für $n=2$, wie (6) erkennen lässt. Man hat daher unter Substitution von P in (5) allgemein für den Durchschnittswerth von [val. abs. $\lambda]^2$ den Ausdruck:

(14) $$\frac{n-1}{2h^2}+\frac{n-1}{\pi h^2}\left(\sqrt{n(n-2)}+\arcsin\frac{1}{n-1}\right).$$

Der Ausdruck (3) geht damit über in

(15) $$\frac{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{n-1}-n+\sqrt{n(n-2)}}{n\pi h^2}.$$

Die Quadratwurzel dieses Ausdrucks ist der mittlere Fehler in der Bestimmung von $1:h\sqrt{\pi}$ oder ϑ nach Formel [val. abs. λ] : $\sqrt{n(n-1)}$; man hat also

(16) $$\vartheta=\frac{[\text{val. abs. }\lambda]}{\sqrt{n(n-1)}}\left\{1\pm\sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{n-1}-n+\sqrt{n(n-2)}}{n}}\right\}$$

und hiermit ist Formel (1) ebenfalls nachgewiesen, da $\rho=0.84535\ldots\vartheta$ ist.

Setzt man $n=2$, so geht Formel (1) gerade in Formel (2) über; nicht aber für $n>2$. Jedoch kann man alsdann angenähert setzen:

(17) $$\arcsin\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{6(n-1)^3}$$

$$\sqrt{n(n-2)}=(n-1)\left(1-\frac{1}{2(n-1)^2}-\frac{1}{8(n-1)^4}\right)$$

und hiermit geht die den mittlern Fehler bezeichnende Wurzelgrösse über in

(18) $$\sqrt{\left\{\frac{\pi-2}{2(n-1)}\left(1-\frac{\pi-3-\frac{1}{12(n-1)^2}}{(\pi-2)n}\right)\right\}},$$

so dass selbst für $n=3$ die Formel (2) den mittlern Fehler in der Berechnung von ρ noch nicht um ein $^1/_{50}$ seines Werthes irrig angiebt. Folgende Zusammenstellung zeigt die Beziehung der beiden Formeln etwas ausführlicher.

Mittlerer Fehler in der Berechnung von ρ, in Bruchtheilen von ρ, nach Peters' Formel.

	n	(1)	(2)
(19)	2	0.756	0.756
	3	0.525	0.534
	4	0.430	0.436
	5	0.373	0.378
	10	0.250	0.252
	∞	$0.756 : \sqrt{n-1}$	

Aus dem mittlern Fehler in der Berechnung von ρ folgt der wahrscheinliche durch Multiplication mit 0.67449..., so lange n gross ist; denn alsdann befolgen die Abweichungen der Formel (1) vom strengen Werthe ρ ohne Zweifel sehr nahe das Gausssche Fehlergesetz und ist dieser strenge Werth von ρ der wahrscheinlichste Werth und nicht nur der Durchschnittswerth aller möglichen Angaben der Formel (1).

Ist aber n klein, so giebt diese Multiplication nur eine rohe Annäherung. Insbesondere hat man für $n=2$ als wahrscheinliche Grenzen von ρ anstatt $\rho(1 \pm 0.510)$, wie Formel (1) und (2) geben, genauer

(20) $$\rho(1 \pm 0.443),$$

wobei $\rho' = 0.443$ die Wurzel der Gleichung

(21) $$e^{-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\rho'}\right)^2} - e^{-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-\rho'}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Die Entwickelung dieser Gleichung soll nur kurz angedeutet werden.

Für $n=2$, wo $\lambda_1 = -\lambda_2$, findet man leicht, dass die Wahrscheinlichkeit [val. abs. λ] liege zwischen σ und $\sigma + d\sigma$ gleich ist

(22) $$h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, d\sigma\, e^{-\frac{h^2\sigma^2}{2}}.$$

Bei gegebenem σ setzt man die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über h diesem Ausdruck proportional und hat als Wahrscheinlichkeit, dass h zwischen h_1 und h_2 liegt:

$$\sigma^2 \int_{h_1}^{h_2} h e^{-\frac{h^2}{2}\sigma^2}\, dh,$$

wobei der Factor σ^2 so angenommen ist, dass das Integral für $h_1 = 0$ und $h_2 = \infty$ gleich eins wird. Die Integration ergiebt

$$e^{-h_1^2\frac{\sigma^2}{2}} - e^{-h_2^2\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Sind die wahrscheinlichen Grenzen von ρ gleich $\rho(1 \pm \rho')$, so sind die von h gleich $h_0 : (1 \pm \rho')$, worin h_0 den Werth der Präcision bezeichnet, welcher der Annahme über ρ entspricht, so dass

(23) $$1 : h_0 = \sigma\sqrt{\pi : 2}.$$

Führt man nun ein $h_1 = h_0 : (1+\rho')$ und $h_2 = h_0 : (1-\rho')$, so muss ρ' so bestimmt werden, dass obiges Integral $\frac{1}{2}$ beträgt. Und so ergiebt sich Formel (21).

Beiläufig bemerkt: man sieht, dass der Ausdruck (22) die günstigste Hypothese über h nicht in Uebereinstimmung mit Formel (23) darstellt, sondern dass $1 : h = \sigma$ verlangt wird. Dem entspricht $\rho = 0.47694$ [val. abs. λ] oder 0.67449 [val. abs. λ] $: \sqrt{2}$, während die Formel (1) giebt 0.84535 [val. abs. λ] $: \sqrt{2}$.

Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den Quadraten der Verbesserungen directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit und die Fechnersche Formel.

Versteht man unter λ die Verbesserungen auf's arithmetische Mittel, unter μ den mittlern und unter ρ den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, so setzt man für die günstigste Berechnung von ρ bekanntlich die folgenden Formeln:

$$\rho = 0.67449\ldots\mu$$

(1) $$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right),$$

und bedeutet die Wurzel in der Klammer den mittlern Fehler in der Berechnung von μ, in Bruchtheilen des Werthes. Es ist unsere Absicht, die Herleitung dieser Formel für μ unter Annahme des Gauss'schen Fehlergesetzes etwas strenger zu fassen, als sonst selbst nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschieht. Bezeichnet ε einen wahren Beobachtungsfehler, so ist die zukünftige Wahrscheinlichkeit eines Systems $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ gleich

(2) $$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_n.$$

Indem man nun im Falle eines gegebenen Systems der ε die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über h diesem Ausdruck proportional setzt, erhält man als günstigsten Werth von μ^2

$$\frac{1}{2h^2} = \mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}.$$

Weil nun aber die ε unbekannt sind, sieht man sich genöthigt, die $[\varepsilon\varepsilon]$ schätzungsweise zu ermitteln und dies dürfte eine Schwäche der Ableitung sein. Dieselbe lässt sich heben, wenn man bedenkt, dass ein System $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ auf unendlich vielfache Art aus wahren Fehlern entstehen kann. Da nun aber nur λ gegeben sind, so muss man die zukünftige Wahrscheinlichkeit eines Systems $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ berechnen und dieser dann die Hypothese über h proportional annehmen.

§ 1. Wahrscheinlichkeit eines Systems Verbesserungen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ auf's arithmetische Mittel. In dem Ausdrucke (2) führen wir die Variablen $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ und σ anstatt der ε nach den Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda_1 + \sigma \\ \varepsilon_2 &= \lambda_2 + \sigma \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_{n-1} &= \lambda_{n-1} + \sigma \\ \varepsilon_n &= -\lambda_1 - \lambda_2 \ldots - \lambda_{n-1} + \sigma. \end{aligned}$$

Hierdurch werden die bekannten Beziehungen zwischen wahren Fehlern ε und Verbesserungen λ erfüllt, denn die Addition der Gleichungen giebt $n\sigma = [\varepsilon]$ und zugleich ist der Bedingung $[\lambda] =$ Null genügt. Die Functionaldeterminante der Substitution, nämlich die Determinante n-Grades

$$\begin{vmatrix} 1 & . & . & & . & 1 \\ . & 1 & . & & . & 1 \\ . & . & 1 & & . & 1 \\ & & & & & \\ . & . & . & & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 1 \end{vmatrix} = n,$$

es geht daher der Ausdruck (2) über in

$$n\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\lambda\lambda] + h^2 n\sigma^2} d\lambda_1 . d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}\, d\sigma,$$

wobei $[\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2$; $\lambda_n = -\lambda_1 - \lambda_2 \ldots - \lambda_{n-1}$ gesetzt ist. Integriren wir nun über alle möglichen σ, so folgt weiter als Wahrscheinlichkeit eines Systems $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ der Ausdruck

$$(3) \qquad \sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Zur Verification kann man denselben über alle möglichen $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ integriren und wird dann gerade eins erhalten, wie es sein muss. Die Integration ist besonders bequem, wenn man zunächst $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1}$ zwischen s und s + ds, also constant annimmt. Mit Benutzung der Formel (9) auf Seite 116 erhält man dann, $k = n - 1$ gesetzt,

$$\sqrt{n}\, e^{-h^2 s^2} . \frac{h}{\sqrt{\pi(n-1)}} ds\, e^{-\frac{h^2 s^2}{n-1}},$$

welcher Ausdruck nach s zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt, eins ergiebt.

§ 2. Günstigste Hypothese über h bei gegebenen Verbesserungen λ. Wir setzen die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über h proportional dem Ausdruck (3), wenn ein System λ gegeben ist und die gewöhnliche Schlussweise ergiebt weiter als günstigste Annahme über h diejenige, für welche (3) ein Maximum wird. Die Differentiation zeigt an, dass dies eintritt für

$$\frac{1}{2h^2} = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}$$

und hiermit ist denn der erste Theil der Formel (1) für μ bewiesen *).

§ 3. Wahrscheinlichkeit einer Summe $[\lambda\lambda]$ der Quadrate der Verbesserungen λ. Die Wahrscheinlichkeit, dass $[\lambda\lambda]$ zwischen σ und $\sigma + d\sigma$ liegen werde, ist mit Benutzung von (3) gleich

$$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int d\lambda_1 \ldots \int d\lambda_{n-1}\, e^{-h^2[\lambda\lambda]}$$

integrirt über alle $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$, in der Weise, dass der Bedingung Genüge geschieht:

$$\sigma \leqq [\lambda\lambda] \leqq \sigma + d\sigma.$$

Wir führen nun $n - 1$ neue Variable t mittelst der Gleichungen ein:

$$(4) \qquad \begin{aligned} t_1 &= \sqrt{2}\,(\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_3 + \tfrac{1}{2}\lambda_4 \ldots + \tfrac{1}{2}\lambda_{n-1}) \\ t_2 &= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,(\lambda_2 + \tfrac{1}{3}\lambda_3 + \tfrac{1}{3}\lambda_4 \ldots + \tfrac{1}{3}\lambda_{n-1}) \\ t_3 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}}\,(\lambda_3 + \tfrac{1}{4}\lambda_4 \ldots + \tfrac{1}{4}\lambda_{n-1}) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_{n-1} &= \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\lambda_{n-1} \end{aligned}$$

zu denen die Functionaldeterminante $\sqrt{n}$ gehört. Damit geht jener Ausdruck über in

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int dt_1 \ldots \int dt_{n-1}\, e^{-h^2[t\,t]},$$

wofür sich die Integrationsgrenzen bestimmen nach der Bedingung

$$\sigma \leqq [t\,t] \leqq \sigma + d\sigma.$$

Jetzt erkennt man aber, dass die Wahrscheinlichkeit für die Quadratsumme der n Verbesserungen λ, $[\lambda\lambda] = \sigma$ gerade so gross ist, wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Quadratsumme $[t\,t]$ von $n - 1$ wahren Fehlerquadraten t ist gleich σ. Letztere habe ich in Schlömilch's Zeitschr. 1875 S. 303 angegeben und hat man darnach

$$(5) \qquad \frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma^{\frac{n-3}{2}} e^{-h^2\sigma} d\sigma$$

als Wahrscheinlichkeit, dass die Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ der n Verbesserungen λ von n directen gleichgenauen Beobachtungen auf ihr arithmetisches Mittel zwischen σ und $\sigma + d\sigma$ liege. Zwischen $\sigma = 0$ und ∞ integrirt, ergiebt sich gerade eins.

§ 4. Der mittlere Fehler der Formel $\mu = \sqrt{[\lambda\lambda] : (n-1)}$. Da es schwer ist, eine allgemeine gültige Formel für den wahrscheinlichen Fehler dieser

*) Auf dieselbe Art kann man auch die Formel für μ^2 bei n vermittelnden Beobachtungen mit m Unbekannten streng nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung ableiten, wie sich Verf. überzeugt hat und an anderer Stelle mittheilen wird.

Formel aufzustellen, so entwickeln wir nur den mittlern Fehler.

Der mittlere Fehler der Formel

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}$$

ist genau bekannt und gleich $\mu^2 \sqrt{2:(n-1)}$. Man hat also

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

und sobald n gross ist, kann man in bekannter Weise hieraus folgern:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(n-1)}}\right),$$

woraus die Formel (1) resultirt. Ist aber n klein, namentlich gleich 2, so entbehrt diese Schlussweise wohl jeder Zulässigkeit. Denn alsdann ist $\sqrt{2:(n-1)}$ gegen 1 nicht mehr sehr klein, sondern bei $n=2$ sogar grösser als 1. Wir stellen nun folgende Entwickelung auf.

Das mittlere Fehlerquadrat der Formel

$$\mu = \sqrt{[\lambda\lambda]:(n-1)}$$

ist der Durchschnittswerth von

$$\left(\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} - \mu\right)^2;$$

entwickelt man das Quadrat und erinnert sich, dass $[\lambda\lambda]:(n-1)$ im Durchschnitt gleich μ^2 oder $1:2h^2$ ist, so folgt

$$\frac{1}{h^2} - \frac{\sqrt{2}}{h}\left(\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\right),$$

wobei für die grosse Parenthese der Durchschnittswerth zu substituiren ist.

Mit Rücksicht auf die Formel (5) ergiebt sich als Durchschnittswerth von $\sqrt{[\lambda\lambda]}$ der Ausdruck

$$\frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty \sigma^{\frac{n-2}{2}} e^{-h^2\sigma} d\sigma \text{ d. i. } \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{h\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)};$$

also wird das mittlere Fehlerquadrat für μ gleich

$$\frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right).$$

Man hat daher genauer als (1) die folgende Formel anzunehmen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\left\{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{8}{n-1}}\right\}}\right) \tag{6}$$

$$\rho = 0.67449\ldots\mu,$$

wobei also die Wurzel in der Parenthese den mittleren Fehler der Formel für μ bedeutet.

Es ist mittelst der bekannten Näherungsformel für $l\Gamma$ leicht zu zeigen, dass für grosse n die Formel (6) in Formel (1) übergeht. Für kleine n mag folgendes Täfelchen die Beziehung der Formeln erläutern.

Mittlerer Fehler in der Berechnung von ρ, in Bruchtheilen von ρ, nach Bessel's Formel.

(7)

n	(1)	(6)
2	0.707	0.636
3	0.500	0.477
4	0.408	0.397
5	0.354	0.346
10	0.236	0.234
∞	$0.707:\sqrt{n-1}$.	

Aus dem mittlern Fehler in der Berechnung von μ oder ρ folgt der wahrscheinliche durch Multiplication mit 0.67449...; jedoch gilt dies hinreichend streng nur für grosse Werthe von n. Für kleine Beobachtungsanzahlen n wird auf diese Weise kein richtiger Werth erhalten, wie man wenigstens für $n=2$ leicht mit Benutzung von Formel (3) oder (5) nachweisen kann (vergl. die Entwickelung auf S. 119).

Man findet streng für die wahrscheinlichen Grenzen von ρ, nämlich $\rho(1 \pm \rho')$, denen die wahrscheinlichen Grenzen $h:(1 \pm \rho')$ enstprechen, den Ausdruck

$$\rho(1 \pm 0.382), \tag{8}$$

wobei $\rho' = 0.382$ als Wurzel der nachfolgenden Gleichung gefunden ist:

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\rho'}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\rho'}\right)^2} = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Dagegen giebt Formel (6) $\rho(1 \pm 0.477)$, also ziemlich abweichend.

§ 5. Fechner's Formel. Herr Fechner hat im Jubelbande von Pogg. Ann. S. 66 eine Formel abgeleitet, welche ρ aus [val. abs. λ] berechnet. Diese Formel ist von der Peters'schen Formel verschieden und so construirt, dass ein möglichst grosser Anschluss an die Formel (6) stattfindet. Wir haben ebenfalls in Nr. 2039 S. 366 erwähnt, dass für $n=2$ zwischen Formel (6) und der Peters'schen Formel eine Differenz erscheint. Wenn dieselbe auch dort ihre naturgemässe Erklärung gefunden hat, so verdient um so mehr eine Formel Beachtung, welche sich der günstigsten Berechnung von ρ besser anschliesst.

Herr Fechner setzt in der Formel $\mu^2 = [\lambda\lambda]:(n-1)$ für $[\lambda\lambda]$ den Ausdruck $[\text{val. abs.}\,\lambda]^2.\nu$ ein, worin

(20) $$\nu = \frac{\text{Durchschnittswerth von } [\lambda\lambda]}{\text{Durchschnittswerth von } [\text{val. abs. } \lambda]^2}.$$

Man erhält alsdann

(11) $$\mu = [\text{val. abs. } \lambda] \sqrt{\frac{\nu}{n-1}}$$
$$\rho = 0.67449\ldots\mu$$

und zwar setzt Herr Fechner nach einer Näherungsrechnung a. a. O. S. 72, Formel (4),

$$\nu = \frac{\pi(n-1)}{n(\pi + 2n - 4)}.$$

Wir erhalten dagegen mit Bezug auf die Formel (14) Seite 118

$$\nu = \frac{(n-1) : 2h^2}{\frac{n-1}{2h^2} + \frac{n-1}{\pi h^2}\left(\sqrt{n(n-2)} + \arcsin\frac{1}{n-1}\right)}$$

oder

(13) $$\nu = \frac{\pi}{\pi + 2\arcsin\frac{1}{n-1} + 2\sqrt{n(n-2)}}.$$

Dieser Werth ist vom Fechner'schen in (12) nur unerheblich verschieden. Beide ν stimmen für $n = 2$ vollkommen überein. Ist $n > 2$, so geben die Formeln (17) S. 118 genähert aus (13)

(14) $$\nu = \frac{\pi(n-1)}{n(\pi + 2n - 4)}\left(1 + \frac{\pi - 3 - \frac{1}{12(n-1)^2}}{n(\pi + 2n - 4)}\right)$$

wonach der Fehler von $\sqrt{\nu}$, wenn man es einfach nach Formel (12) nimmt, beträgt

für	$n = 3$	$0.0040\sqrt{\nu}$
„	$n = 4$	0.0023 „
„	$n = 5$	0.0015 „
„	$n = 10$	0.0004 „
„	$n = \infty$	Null.

Man kann daher in der Regel den Fechner'schen Werth ν beibehalten. Uebrigens hat Herr Fechner am angegebenen Ort S. 81 ν auch empirisch ermittelt und diese Ergebnisse stimmen mit (12) und (13) gleich gut überein.

Die Fechner'sche Formel giebt ρ immer etwas kleiner als die Peters'sche Formel, nämlich im Verhältniss

$$0.67449\sqrt{\frac{\pi}{n(\pi + 2n - 4)}} : 0.84535\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}},$$

wofür man setzen kann

$$\sqrt{1 - \frac{\pi - 2}{2n + \pi - 4}}.$$

Die grösste Differenz findet statt für $n = 2$, wo die Fechner'sche Formel dasselbe Resultat wie Formel (6) aus den Quadraten der λ ergiebt. Mit wachsenden n aber schwindet der Unterschied der Fechner'schen und Peters'schen Formel mehr und mehr.

Für die Anwendung der Fechner'schen Formel ist zu beachten, dass bei Vereinigung mehrerer Bestimmungen von ρ nicht die ersten sondern die zweiten Potenzen derselben zu nehmen sind (wie für Formel (6)), während bei der Peters'schen Formel die ersten Potenzen zu nehmen sind (vergl. Nr. 2039 S. 366).

§ 6. Mittlerer Fehler der Fechner'schen Formel. Das mittlere Fehlerquadrat in der Bestimmung von μ nach Formel (11) wird gleich dem Durchschnittswerth von

$$\left([\text{val. abs. } \lambda]\sqrt{\frac{\nu}{n-1}} - \mu\right)^2$$

oder

$$[\text{val. abs } \lambda]^2 \frac{\nu}{n-1} + \mu^2 - 2\mu\,[\text{val. abs. } \lambda]\sqrt{\frac{\nu}{n-1}}.$$

Nun ist mit Rücksicht auf (10) der Durchschnittswerth des ersten Gliedes gleich μ^2. Man hat daher, wenn man sich zugleich erinnert, dass der Durchschnittswerth von [val. abs. λ] gleich $\sqrt{n(n-1)} : h\sqrt{\pi}$ ist, als mittleres Fehlerquadrat der Formel (11) für μ:

(15) $$\frac{1}{h^2}\left(1 - \sqrt{\frac{2n\nu}{\pi}}\right).$$

Die Fechner'sche Formel nebst ihrem mittlern Fehler lautet sonach:

(16) $$\rho = 0.84535\ldots\frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{\sqrt{n\left(n - \frac{4-\pi}{2}\right)}}\left(1 \pm \sqrt{2 - \sqrt{\frac{8(n-1)}{\pi + 2n - 4}}}\right).$$

Für grosse n geht die Wurzelgrösse in der Parenthese über in

$$\sqrt{\frac{\pi - 2}{2(n-1)}},$$

woraus man erkennt, dass alsdann im Punkte der Genauigkeit die Fechner'sche und Peters'sche Formel übereinstimmen.

Mittlerer Fehler in der Berechnung von ρ, in Bruchtheilen von ρ, nach Fechner's Formel.

	n	
(17)	2	0.636
	3	0.486
	4	0.408
	5	0.359
	10	0.246
	∞	$0.756 : \sqrt{n-1}$

Zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers in der Berechnung von ρ nach (16) hat man bei grossen n den mittlern Fehler mit 0.67449... zu multipliciren. Für kleine n ist dies jedoch nicht correct und bei $n = 2$ erhält man die wahrscheinlichen Grenzen von ρ anstatt gleich $\rho(1 \pm 0.477)$ genauer gleich

(18) $\rho(1 \pm 0.382)$.

Da nämlich für $n = 2$ die Formel (16) mit (6) übereinstimmt, so kann der Grenzenausdruck (8) direct auf vorliegenden Fall übertragen werden.

Aus Vorstehendem erhellt, dass die Fechner'sche Formel für kleine n Resultate giebt, die den günstigsten sehr nahe liegen; aber mit wachsender Anzahl der Beobachtungen nähert sich ihre Genauigkeit derjenigen der Peters'schen Formel; vergl. die Zusammenstellungen (19) S. 119 und (7) S. 124.

Ob die Fechner'sche Formel die günstigste Berechnung von ρ aus [val. abs. λ] giebt oder nicht, lässt sich allgemein nicht eher sagen, als bis ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines bestimmten Werthes jener Summe gefunden sein wird. Doch ist nach dem hier gegebenen jedenfalls für $n = 2$ die Fechner'sche Formel die beste aller Formeln, welche [val. abs. λ] benutzen. Aber auch für sehr grosse n kann man wohl ohne ausführliche Untersuchung die Fechner'sche Formel (und die alsdann damit coincidernde Peters'sche Formel) für die im erwähnten Sinne beste Formel anerkennen. Es erfolgt nämlich die günstigste Berechnung aus den ersten Potenzen von n wahren Fehlern ε bekanntlich nach der Formel $\rho = 0.84535\ldots$ [val. abs. ε]: n mit dem mittlern Fehler $0.756 : \sqrt{n}$ in Bruchtheilen von ρ. Nun kann aber keinesfalls die Berechnung von ρ aus n Verbesserungen λ nach der entsprechenden Formel mit [val. abs. λ] genauer sein, als aus n wahren Fehlern ε und da der mittlere Fehler der Fechner'schen Formel für grosse n nicht mehr wesentlich von $0.756 : \sqrt{n}$ abweicht, so kann sie alsdann von der (relativ) günstigsten Formel nicht mehr merklich verschieden sein.

Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den ersten Potenzen der Differenzen gleichgenauer directer Beobachtungen.

In Nr. 1766—67 dieser Nachrichten hat Herr Jordan auf die Benutzung der Beobachtungsdifferenzen hingewiesen; es hat sich alsdann durch die Untersuchungen des Herrn von Andrae herausgestellt, dass der Formel, welche ρ aus den ersten Potenzen ableitet, eine grosse Bedeutung zukommt, während die zweiten Potenzen wieder auf die bekannte Formel mit $[\lambda\lambda]$ (vergl. S. 120) führen und höhere Potenzen aus bekannten Gründen unzweckmässig anzuwenden sind. Da man nun nach unsern Ausführungen zu der Fechner'schen Formel annehmen muss, dass man aus [val. abs. λ] überhaupt keine Formel herstellen kann, welche im Betreff der Genauigkeit mit derjenigen concurriren kann, die $[\lambda\lambda]$ benutzt, so ist es um so interessanter zu sehen, dass die Jordan'sche Formel wenigstens für grosse n nahezu dasselbe leistet, wie letzterwähnte Formel. Die Jordan'sche Formel nebst mittlerem Fehler lautet nach Herrn von Andrae's Entwickelungen in Nr. 1889

$$\underset{(1)}{\rho} = 0.84545\ldots\frac{[d]\sqrt{2}}{n(n-1)}\left\{1 \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{n+1}{3}\pi + 2(n-2)\sqrt{3} - 4n + 6}{n(n-1)}\right)}\right\}$$

aber diese Formel ist weder im ersten noch im zweiten Hauptheile allgemeingültig bewiesen, was hier geschehen soll. In der Formel bedeutet d den absoluten Werth jeder der $\frac{n(n-1)}{2}$ möglichen Beobachtungsdifferenzen, also

$$[d] = [\text{val. abs.}(l_i - l_k)] \qquad i \leqq k, \text{ von } 1\ldots n. \tag{2}$$

Man berechnet nach von Andrae bequemer mittelst der Formel

$$[d] = (l_n - l_1)(n-1) + (l_{n-1} - l_2)(n-3) + (l_{n-2} - l_3)(n-5) + \ldots, \tag{3}$$

worin nunmehr die Beobachtungswerthe l nach der Grösse geordnet sind; $l_n > l_{n-1} > l_{n-2} \ldots > l_1$. Wenn es aber bisher nicht gelungen ist, Formel (1) allgemein zu beweisen, so liegt dieses an der Anwendung von (3). Für den Beweis ist (2) geeigneter, weil darin die l noch ohne gegenseitige Beziehung erscheinen; diese Beziehung aber ist nur eine nebensächliche.

Formel (2) giebt sofort mit den wahren Fehlern ε der Beobachtungen die Beziehung

$$[d] = [\text{val. abs.}(\varepsilon_i - \varepsilon_k)] \qquad i \leqq k,\ 1\ldots n.$$

Der Durchschnittswerth von [d] setzt sich nun aus den Durchschnittswerthen der $n(n-1)$ Glieder rechter Hand zusammen. Der absolute Werth von $(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$ ist aber

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (\varepsilon_i - \varepsilon_k)\sin u(\varepsilon_i - \varepsilon_k)\frac{du}{u}$$

und daher der Durchschnittswerth, wenn man für i und k speziell 1 und 2 setzt:

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^2\int_0^\infty\frac{du}{u}\int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_1\int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin u(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$$

Wir setzen nun $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \xi$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \eta$ und für $\sin u(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ die Grösse $e^{iu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$. Damit folgt für den Durchschnittswerth von val. abs. $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ der Factor von i in

$$\frac{h^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta\, \eta\, e^{-\frac{h^2}{2}\xi^2 - \frac{h^2}{2}\eta^2 + iu\eta}$$

Die Integration nach ξ und η (mit Benutzung von Formel (13) in Nr. 2039) giebt damit für den fraglichen Durchschnittswerth

$$\frac{4}{\pi h^2}\int_0^\infty du\, e^{-\frac{2u^2}{h^2}} \text{ d. i. } \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

übereinstimmend mit Nr. 2039 (3) und (5). Der Durchschnittswerth von [d] ist hiernach

$$\frac{n(n-1)}{2h}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

und hieraus folgt zunächst für den Durchschnittsfehler ϑ oder $1 : h\sqrt{\pi}$

$$\vartheta = \frac{[d]\sqrt{2}}{n(n-1)} \tag{4}$$

und so ist der erste Theil von Formel (1) allgemein bewiesen.

Um auch ihren zweiten Theil zu beweisen, bilden wir den Durchschnittswerth des Fehlerquadrates

$$\left(\frac{[d]\sqrt{2}}{n(n-1)} - \vartheta\right)^2$$

Hieraus folgt in bekannter Weise als mittleres Fehlerquadrat von ϑ

$$\frac{2([d]^2)}{n^2(n-1)^2} - \vartheta^2, \tag{5}$$

worin $([d]^2)$ den Durchschnittswerth von $[d]^2$ anzeigt. Nun ist

$$\begin{aligned}[d]^2 = {} & [(\varepsilon_i - \varepsilon_k)^2] \\ & + [\text{val. abs.}\,(\varepsilon_i - \varepsilon_k)(\varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{k_1})] \\ & + [\text{val. abs.}\,(\varepsilon_i - \varepsilon_k)(\varepsilon_i - \varepsilon_{k_1})],\end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke i, k, i_1, k_1 immer verschiedene Indices bedeuten, wenn sie in einem und demselben Gliede vorkommen. Innerhalb einer Summe rechter Hand haben die Glieder offenbar gleichgrossen Durchschnittswerth; nennen wir diese beziehungsweise D_1, D_2, D_3, und berücksichtigen die Anzahlen der Glieder

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$n(n-1)(n-2),$$

so folgt

$$([d]^2) = \frac{n(n-1)}{2}\left(D_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}D_2 + 2(n-2)D_3\right) \tag{6}$$

Der Werth von D_1 findet sich ohne Schwierigkeit:

$$D_1 = \frac{1}{h^2}. \tag{7}$$

Desgleichen derjenige von D_2; denn die absoluten Werthe von $(\varepsilon_i - \varepsilon_k)$ und $(\varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{k_1})$ sind unabhängig von einander, jeder derselben im Durchschnitt aber $\sqrt{2} : h\sqrt{\pi}$; also

$$D_2 = \frac{2}{\pi h^2}. \tag{8}$$

Etwas mehr Raum erfordert die Ableitung von D_3. Ich habe sie ohne und mit Benutzung eines Discontinuitätsfactors durchgeführt und gebe hier die letztere, welche sich an die frühern Entwickelungen anschliesst. Es wird wie früher

$$D_3 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_2 \int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_3\, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\sin u(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\, e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}$$

oder auch D_3 gleich dem Factor der imaginären Einheit von i in

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^\infty d\varepsilon_2\, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + iu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_1}.K \qquad K = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_3\, (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\, e^{-h^2\varepsilon_3^2 - iu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_3}.$$

Mit Benutzung von Formel (13) u. (14) Nr. 2039 folgt hieraus

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\left(\varepsilon_1 + iu\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2h^2}\right) e^{-\frac{u^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4h^2}}$$

Führt man nun ξ und η ein nach den Relationen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \xi$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \eta$, so wird D_3 gleich dem Factor von i in

$$\frac{h^2}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, \eta\, e^{-\eta^2\left(\frac{h^2}{2} + \frac{u^2}{4h^2} - i\frac{u}{2}\right)}.L \qquad L = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\left(\xi + \eta\left(1 + \frac{iu}{h^2}\right)\right) e^{-\frac{h^2}{2}\xi^2 + i\frac{u\eta\xi}{2}}$$

und hierfür geben die eben erwähnten Formeln

$$L = \frac{\sqrt{2\pi}}{h}\eta\left(1 + i\frac{3u}{2h^2}\right) e^{-\frac{u^2\eta^2}{8h^2}}$$

Substituirt man dies und zugleich für den Factor von i in dem complexen Theile des Ausdrucks, nämlich

$$\left(1 + i\frac{3u}{2h^2}\right) e^{i\frac{u\eta^2}{2}},$$

den leicht zu ersehenden Werth

$$\frac{3u}{2h^2}\cos\frac{u\eta^2}{2} + \sin\frac{u\eta^2}{2},$$

so folgt nunmehr nach einfacher Reduction:

$$D_3 = \frac{3}{\pi h\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty d\eta\,\eta^2\, e^{-\eta^2\frac{h^2}{2}}\int_0^\infty du\cos\frac{u\eta^2}{2}\, e^{-u^2\frac{3\eta^2}{8h^2}}$$

$$+\frac{2h}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty d\eta\,\eta^2\, e^{-\eta^2\frac{h^2}{2}}\int_0^\infty du\,\frac{\sin\frac{u\eta^2}{2}}{u}\, e^{-u^2\frac{3\eta^2}{8h^2}}.$$

Die Anwendung der Formeln (11) und (12) S. 117 liefert

$$D_3 = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_0^\infty d\eta\,\eta\, e^{-\frac{2}{3}h^2\eta^2}$$

$$+\frac{h^2}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1 dz\int_0^\infty d\eta\,\eta^3\, e^{-\left(\frac{h^2}{2}+\frac{h^2z^2}{6}\right)\eta^2}.$$

Weiter findet sich

$$D_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi h^2} + \frac{2}{\pi h^2\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{3}\right)^2}$$

oder

$$(9)\qquad D_3 = \frac{\sqrt{3}}{\pi h^2} + \frac{1}{6h^2}.$$

Die Substitution von (7), (8) und (9) in (6) giebt

$$(10)\quad ([d^2]) = \frac{n(n-1)}{2h^2}\left(\frac{n+1}{3} + (n-2)\,\frac{n-3+2\sqrt{3}}{\pi}\right),$$

und das mittlere Fehlerquadrat (5) von D wird somit:

$$(11)\quad \frac{1}{n(n-1)h^2}\left(\frac{n+1}{3} + \frac{2(n-2)\sqrt{3}-4n+6}{\pi}\right),$$

wodurch auch der zweite Theil von Formel (1) bewiesen ist.

Mittlerer Fehler in der Berechnung von ρ, in Bruchtheilen von ρ, nach Jordan's Formel.

n	
2	0.756
3	0.525
4	0.425
5	0.366
10	0.241
∞	$0.715 : \sqrt{n-1}$

Für $n=2$ und 3 sind diese Werthe genau dieselben, wie bei der Peters'schen Formel. Für $n=5$ ist der mittlere Fehler noch grösser als bei der Fechner'schen Formel, für $n=10$ aber bereits kleiner und für grosse n wird nahezu die Genauigkeit der günstigsten Formel, die ρ aus den Fehlerquadraten berechnet. Dasselbe Resultat erhält man aus der Betrachtung des wahrscheinlichen Fehlers. Derselbe findet sich für grosse n in üblicher Weise aus dem mittlern und für $n=2$ sind die wahrscheinlichen Grenzen von ρ gleich

$$\rho\,(1 \pm 0.443);$$

dieselben wie bei der Peters'schen Formel, mit welcher die zuletzt untersuchte Formel für $n=2$ coincidirt.

Zum Schlusse dürfte noch der Umstand Erwähnung verdienen, dass die hier behandelte Formel auch auf n wahre Beobachtungsfehler ε angewandt werden kann, (wobei sie jedoch für $n<10$ keinen Gewinn giebt) und dass ρ nach dieser Formel aus n solchen Fehlern nicht genauer gefunden wird, als aus n Beobachtungswerthen l.

März 1876. *Helmert.*

Observations of the Satellites of Neptune and Uranus.

Made with the 26-inch Refractor of the U. S. Naval Observatory, at Washington.
(Communicated by Rear Admiral *C. H. Davis*, Superintendent.)

Satellite of Neptune.

1875	Wash. m. t.	p	Nr. comp.	wt.	Wash. m. t.	s	Nr. comp.	wt.	Obs.
Sept. 6	12h19m	201°0	5	3	12h30m	11″90	5	3	H
8	11 50	41.6	5	4	11 59	16.78	5	4	„
9	12 10	20.6	5	2	12 20	11.62	5	2	„
20	11 44	37.2	5	2	11 53	17.23	4	2	„
26	11 20	32.3	6	5	11 50	16.46	3	5	Hn
29	11 40	215.1	5	3	12 0	16.32	4	3	H
Oct. 2	10 53	33.8	5	3	11 6	16.84	5	3	„
2					11 43	17.03	4	2	Hn
5	10 26	212.5	4	5	10 46	16.83	4	5	„
5					11 5	16.75	3	5	„