Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Bd. 87. **Nr. 2078.** 14.

Vergleichung von zwei Werthen des wahrscheinlichen Fehlers.

Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von n Unbekannten $x_1, x_2 \ldots x_n$ aus einem System von m ($>$ n) linearen Gleichungen, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, gelingt bekanntlich, ohne dass man das Präcisionsmaass h der Gewichtseinheit, welches in den Ausdruck der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers eingeht, zu kennen braucht. Dagegen ist die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers einer der Unbekannten von h abhängig und man kann entweder, wie dies gewöhnlich geschieht, für h den wahrscheinlichsten Werth setzen, der ihm nach den Beobachtungen zukömmt, oder aber man muss die Wahrscheinlichkeit dafür suchen, dass eine Unbekannte zwischen bestimmten Grenzen liegt, während die übrigen und das Präcisionsmaass alle möglichen Werthe haben können. Die auf beide Arten entstehenden Werthe des wahrscheinlichen Fehlers sollen hier verglichen werden.

Sei x_1 die Unbekannte, um deren wahrscheinlichen Fehler es sich handelt, so ist dieser nach der ersten Methode

$$(1) \qquad r_1 = \rho \sqrt{\frac{2}{p}} \sqrt{\frac{a}{a_1}}$$

Hierbei bezeichnet

$\rho = 0.47694\ldots$ die Wurzel der Gleichung

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \int_0^\rho dx\, e^{-x^2}$$

a die Summe der Quadrate der Fehler, welche übrig bleiben, wenn man die Beobachtungen mit den wahrscheinlichsten Werthen der Unbekannten berechnet,

a_1 den Nenner des Ausdrucks, der sich für x_1 ergiebt, wenn man bei der Elimination aus den Normalgleichungen nach dem Gauss'schen Verfahren x_1 zur letzten Unbekannten macht; endlich ist

$p = m - n$ gesetzt *).

*) Vergl. Gauss, Th. M. C. C., § 182; Encke, Anhang zum Berliner Jahrbuch für 1835, Seite 287.

Um nach dem zweiten Verfahren den wahrscheinlichen Fehler zu erhalten, muss man die Wahrscheinlichkeit aufstellen dafür, dass x_1 zwischen zwei Grenzen a' und a'' liege, gleichgültig, welches die Werthe von $x_2 \ldots x_n$ und h seien.

Nun ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit, dass die Unbekannten zwischen den Grenzen x_1 und $x_1 + dx_1$, x_2 und $x_2 + dx_2, \ldots x_n$ und $x_n + dx_n$ und das Präcisionsmaass zwischen den Grenzen h und $h + dh$ liegen, proportional der Wahrscheinlichkeit, dass die diesen Werthen entsprechenden Fehler stattfinden werden, also, wenn man mit g das Gewicht einer Beobachtung bezeichnet, bei der der Fehler v übrig bleibt,

$$= C\, dh\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, h^m\, e^{-(gvv)}$$

unter C eine Constante verstanden. Die Wahrscheinlichkeit, dass einige der Grössen $x_1\; x_2 \ldots x_n$ h zwischen weiteren Grenzen liegen, findet sich hieraus, indem man nach diesen zwischen den betreffenden Grenzen integrirt. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass x_1 zwischen a' und a'' $x_2\, x_3 \ldots x_n$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, und h zwischen 0 und $+\infty$ liege

$$= C \int_0^{+\infty} dh \int_{a'}^{a''} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\, h^m\, e^{-h^2 (gvv)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit muss zur Gewissheit also $= 1$ werden, wenn $a' = -\infty$ $a'' = +\infty$ ist. Hieraus ergiebt sich C und damit folgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit endlich

$$(2) \qquad W_1 = \frac{\int_0^{+\infty} dh \int_{a'}^{a''} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \,.\, h^m\, e^{-h^2 (gvv)}}{\int_0^{+\infty} dh \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \,.\, h^m\, e^{-h^2 (gvv)}}$$

Um die n-fachen nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ genommenen Integrale auszuführen, führt man, wie bekannt (vergl. Encke l. c.), diejenigen Functionen als neue Variabeln ein, auf welche man bei der Gauss'schen Elimination aus den Normalgleichungen geführt wird. Man setzt nämlich

$$\begin{aligned}\xi_n &= a_n x_n + \dots\\ \xi_{n-1} &= a_{n-1} x_{n-1} + \dots\\ &\;\;\vdots\\ \xi_1 &= a_1 x_1 + \alpha_1\end{aligned}$$

wo ξ_1 nur x_1, ξ_2 nur x_1 und x_2 u. s. w. enthält, und die Coefficienten so bestimmt sind, dass

$$(g\,vv) = \frac{\xi_1^2}{a_1} + \frac{\xi_2^2}{a_2} + \dots + \frac{\xi_n^2}{a_n} + a$$

wird. Hiermit verwandeln sich die n-fachen nach den x genommenen Integrale der Gl. (2) in Producte von einfachen Integralen und es wird

$$W_1 = \frac{\int\limits_0^{+\infty} dh\, e^{-h^2 a}\, h^m \int\limits_{a_1 a' + \alpha_1}^{a_1 a'' + \alpha_1} d\xi_1\, e^{-h^2 \frac{\xi_1^2}{a_1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2\, e^{-h^2 \frac{\xi_2^2}{a_2}} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_n\, e^{-h^2 \frac{\xi_n^2}{a_n}}}{\int\limits_0^{+\infty} dh\, h^m\, e^{-h^2 a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1\, e^{-h^2 \frac{\xi_1^2}{a_1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2\, e^{-h^2 \frac{\xi_2^2}{a_2}} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi_n\, e^{-h^2 \frac{\xi_n^2}{a_n}}}$$

$$(3)^{*)} \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} \cdot \frac{\int\limits_0^{+\infty} dh \int\limits_{a_1 a' + \alpha_1}^{a_1 a'' + \alpha_1} d\xi_1\, h^{p+1}\, e^{-h^2\left(\frac{\xi_1^2}{a_1} + a\right)}}{\int\limits_0^{+\infty} dh\,.\,h^p\, e^{-h^2 a}}.$$

Durch partielle Integration erhält man nun, dass

$$\int\limits_0^{+\infty} dh\, h^p\, e^{-h^2 a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(p-1)(p-3)\dots 3.1}{2^{\frac{p}{2}}\, a^{\frac{p+1}{2}}} \text{ wenn p gerade}$$

$$= \frac{(p-1)(p-3)\dots 4.2}{2^{\frac{p+1}{2}}\, a^{\frac{p+1}{2}}}. \text{ wenn p ungerade}$$

Indem man diese Formeln auf den Zähler und Nenner von (3) anwendet, findet man

für gerade p.

$$W_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{a_1}} \cdot \frac{p(p-2)\dots 4.2}{(p-1)(p-3)\dots 3.1} \cdot a^{\frac{p+1}{2}} \int\limits_{a_1 a' + \alpha_1}^{a_1 a'' + \alpha_1} \frac{d\xi_1}{\left(a + \frac{\xi_1^2}{a_1}\right)^{\frac{p}{2}+1}}.$$

Der wahrscheinlichste Werth von x_1 ist $-\frac{\alpha_1}{a_1}$; setzt man also $a' = -\frac{\alpha_1}{a_1} - R_1$, $a'' = -\frac{\alpha_1}{a_1} + R_1$ und $\xi_1 = x\sqrt{a a_1}$, so wird

$$(4) \qquad W_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{p(p-2)\dots 4.2}{(p-1)(p-3)\dots 3.1} \int\limits_{-R_1\sqrt{\frac{a_1}{a}}}^{+R_1\sqrt{\frac{a_1}{a}}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass eine Abweichung vom wahrscheinlichsten Werth zwischen $-R_1$ und $+R_1$ gelegen ist.

R_1 ist der wahrscheinliche Fehler, wenn $W_1 = \frac{1}{2}$ ist. Bezeichnet man also mit A_p die Grösse

$$(5) \qquad A_p = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{p(p-2)\dots 4.2}{(p-1)(p-3)\dots 3.1}$$

und genügt ρ_p der Gleichung

$$(6) \qquad \frac{1}{4} = A_p \int\limits_0^{\rho_p} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}}$$

so ist

$$(7) \qquad R_1 = \rho_p \sqrt{\frac{a}{a_1}}.$$

Für ungerade p findet sich

$$(4') \qquad W_1 = \frac{1}{2} \frac{p(p-2)\dots 3.1}{(p-1)(p-3)\dots 4.2} \int\limits_{-R_1\sqrt{\frac{a_1}{a}}}^{+R_1\sqrt{\frac{a_1}{a}}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}}.$$

Setzt man also hier

$$(5') \qquad A_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{p(p-2)\dots 3.1}{(p-1)(p-3)\dots 4.2}$$

und genügt ρ_p der Gleichung

$$(6') \qquad \frac{1}{4} = A_p \int\limits_0^{\rho_p} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}}$$

so ist auch hier

*) Vergl. Dedekind, Züricher Vierteljahrsschrift. 1860. Seite 83.

(7′) $$R_1 = \rho_p \sqrt{\frac{a}{a_1}}.$$

In beiden Fällen ist also der Quotient $\frac{R_1}{r_1} = \frac{\rho_p}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{p}{2}}$; und dies legt die Frage nahe, wie sich ρ und ρ_p hinsichtlich der Grösse zu einander verhalten.

Eine untere Grenze für ρ_p lässt sich auf folgendem Wege finden. Die Gleichungen (6) resp. (6′) kann man noch umschreiben. Setzt man nämlich in (4) resp. (4′) $R_1 = +\infty$, so liefern uns diese Gleichungen die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung vom wahrscheinlichsten Werth zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liege und diese ist 1; also hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} = \frac{1}{A_p};$$

und hiermit geht die Gleichung für ρ_p über in:

$$\int_0^{\rho_p} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} = \int_{\rho_p}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}}$$

während andererseits bekanntlich

$$\int_0^{\rho} e^{-x^2} dx = \int_{\rho}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

ist.

Seien nun allgemein zur Bestimmung von x^1 und x'' die beiden Gleichungen gegeben

$$\int_A^{x^1} f(x)\,dx = \int_{x^1}^{B} f(x)\,dx$$

$$\int_A^{x''} \varphi(x)\,dx = \int_{x''}^{B} \varphi(x)\,dx$$

in welchen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei, zwischen den Grenzen A und $B > A$ stets positiv bleibende, Functionen bezeichnen. Gesetzt, der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x)$ nehme zwischen den Grenzen A und B beständig ab, so kann man die erste Gleichung schreiben

$$\int_A^{x^1} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{x^1}^{B} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

oder nach einem bekannten Satz der Integralrechnung

$$\psi(\xi)\int_A^{x^1} \varphi(x)\,dx = \psi(\eta)\int_{x^1}^{B} \varphi(x)\,dx$$

wobei $A < \xi < x^1$, $x^1 < \eta < B$ ist. Weil also $\xi < \eta$, ist $\psi(\xi) > \psi(\eta)$ nach unserer Annahme, und folglich

$$\int_A^{x^1} \varphi(x)\,dx < \int_{x^1}^{B} \varphi(x)\,dx.$$

Weil jedoch $\varphi(x)$ positiv ist, also ihr Intregal mit wachsender oberer Grenze wächst, muss

$$x^1 < x''$$

sein.

Setzen wir nun

$$f(x) = e^{-\frac{p+2}{2}x^2} \quad \varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{p+2}{2}}}$$

so wird $\psi(x) = e^{-\frac{p+2}{2}x^2}(1+x^2)^{\frac{p+2}{2}}$ und

$$\frac{d\,l\psi(x)}{dx} = -\frac{(p+2)\,x^3}{1+x^2} < 0;$$

und die obigen Bedingungen sind erfüllt. Folglich ist die Wurzel $x'' = \rho_p$ grösser, als die Wurzel x^1 der Gleichung

$$\int_0^{x^1} e^{-\frac{p+2}{2}.x^2} dx = \int_{x^1}^{+\infty} e^{-\frac{p+2}{2}.x^2} dx$$

die sich $x^1 = \rho\sqrt{\frac{2}{p+2}}$ findet. Somit haben wir die Begrenzung

(8) $$\rho_p > \rho\sqrt{\frac{2}{p+2}}$$

Eine obere Grenze für ρ_p ist weit schwerer zu finden. Ich vermuthete, ρ_p sei $< \rho\sqrt{\frac{2}{p}}$. Versuche, dies mit Hilfe des eben angewandten Satzes zu beweisen, schlugen fehl, während eine Ausrechnung in den Fällen $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 10 die Annahme bestätigte. Es gelang mir schliesslich, den allgemeinen Beweis auf folgende Art zu führen, die wesentlich von einer genauen Begrenzung von A_p abhängt.

Ist $\rho_p < \rho\sqrt{\frac{2}{p}}$, so ist

$$\int_0^{\rho_p} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p+2}{2}}} < \int_0^{\rho\sqrt{\frac{2}{p}}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p+2}{2}}}$$

also nach Gleichung (6) resp. (6′)

$$\int_0^{\rho\sqrt{\frac{2}{p}}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p+2}{2}}} > \frac{1}{4A_p}.$$

Im ersten Gliede setzen wir $x\sqrt{\frac{2}{p}}$ für x und verändern das zweite Glied, indem wir von der Gleichung

$$1=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\rho e^{-x^2}dx$$

Gebrauch machen. Dann muss sein

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^\rho\frac{dx}{\left(1+\frac{2x^2}{p}\right)^{\frac{p+2}{2}}}-\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\int_0^\rho e^{-x^2}dx>0;$$

oder endlich

$$(9)\quad D=\int_0^\rho\frac{dx}{\left(1+\frac{2x^2}{p}\right)^{\frac{p+2}{2}}}-\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}\int_0^\rho e^{-x^2}dx$$

gesetzt, wenn $\rho_p<\rho\sqrt{\frac{2}{p}}$ ist, muss $D>0$ sein.

Nun ist für gerade $p=2q$.

$$(10)\quad \frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}=\sqrt{q}.\sqrt{\pi}.\frac{(2q-1)(2q-3)\ldots3.1}{2q(2q-2)\ldots4.2}.$$

für ungerade $p=2q+1$.

$$(10')\quad \frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}=\sqrt{\frac{2}{2q+1}}.\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\frac{2q(2q-2)\ldots4.2}{(2q-1)(2q-3)\ldots3.1}.$$

Nach dem bekannten Wallis'schen Ausdrucke ist nun

$$\frac{2.2.4.4\ldots}{1.3.3.5\ldots}=\frac{\pi}{2}$$

Schreibt man ihn

$$\frac{2.2.4.4\ldots(2q-2)\,2q.2q}{1.3.3.5\ldots(2q-1)(2q-1)(2q+1)}\cdot\frac{2q+2}{2q+1}\cdot\frac{2q+2}{2q+3}\cdots=\frac{\pi}{2}$$

so folgt

$$\frac{2.2.4.4\ldots(2q-2)\,2q}{1.3.3.5\ldots(2q-1)(2q-1)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2q+1)^2}{2q(2q+2)}\cdot\frac{(2q+3)^2}{(2q+2)(2q+4)}\cdots$$

Es ist aber

$$\frac{(2q+n)^2}{(2q+n-1)(2q+n+1)}=1+\frac{1}{(2q+n-1)(2q+n+1)},$$

daher die rechte Seite

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2q(2q+2)}\right)\left(1+\frac{1}{(2q+2)(2q+4)}\right)\cdots$$

$$>\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{2q(2q+2)}+\frac{1}{(2q+2)(2q+4)}+\ldots\right\}$$

Die Summe in der Klammer ist, wie bekannt, $=1+\frac{1}{4q}$; also endlich

$$\frac{2.2.4\ldots(2q-2).2q}{1.3.3.5\ldots(2q-1)(2q-1)}>\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4q+1}{4q}.$$

Multiplicirt man mit 2q und zieht die Wurzel, so entsteht die eine gesuchte Ungleichung

$$(11)\quad \frac{2q(2q-2)\ldots4.2}{(2q-1)(2q-3)\ldots3.1}>\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{4q+1}{2}}$$

Transformirt man aber in dem Ausdruck von $\frac{\pi}{2}$ selbst die Brüche $\frac{(2q+2)^2}{(2q+1)(2q+3)}$ und die folgenden durch dieselbe Gleichung, so erhält man

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4\ldots(2q-2)\,2q.2q}{1.3.3.5\ldots(2q-1)(2q-1)(2q+1)}\left(1+\frac{1}{(2q+1)(2q+3)}\right)\left(1+\frac{1}{(2q+3)(2q+5)}\right)\cdots$$

daher

$$\frac{\pi}{2}>\left\{\frac{2.4\ldots2q}{1.3\ldots2q-1}\right\}^2\frac{1}{2q+1}\left\{1+\frac{1}{(2q+1)(2q+3)}+\frac{1}{(2q+3)(2q+5)}+\ldots\right\}$$

$$>\left\{\frac{2.4\ldots2q}{1.3\ldots2q-1}\right\}^2\frac{1}{2q+1}\left(1+\frac{1}{2(2q+1)}\right).$$

Also ist

$$(11')\quad \frac{2.4\ldots2q}{1.3\ldots2q-1}<\sqrt{\pi}.\frac{2q+1}{\sqrt{4q+3}}.$$

Wendet man die Ungleichung (11) an auf Gleichung (10), so ist, weil dort $2q=p$,

$$(12)\quad \frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}<\sqrt{\frac{2p}{2p+1}},$$

und die gleiche Formel findet man durch Anwendung von (11') auf (10'). Aus (9) folgt hiermit, dass

$$D>\int_0^\rho\frac{dx}{\left(1+\frac{2x^2}{p}\right)^{\frac{p+2}{2}}}-\sqrt{\frac{2p}{2p+1}}\int_0^\rho e^{-x^2}dx=D'.$$

Bezeichnen wir, der Kürze wegen, $\sqrt{\frac{2p}{2p+1}}$ mit α und entwickeln die Functionen unter den Integralzeichen in Reihen, die man dann Glied für Glied integrirt, so ergiebt sich

$$D'=\rho(1-\alpha)-\frac{1}{3}\rho^3\left(1+\frac{2}{p}-\alpha\right)+\frac{1}{5}\frac{C_5}{2!}\rho^5-\frac{1}{7}\frac{C_7}{3!}\rho^7+\frac{1}{9}\cdot\frac{C_9}{4!}\rho^9\ldots$$

Dabei ist gesetzt:

$$C_{2n-1}=\left(1+\frac{2}{p}\right)\left(1+\frac{4}{p}\right)\cdots\left(1+\frac{2n-2}{p}\right)-\alpha;$$

und hiernach ist

$$C_{2n-1}>1+\frac{2+4+\ldots+2n-2}{p}-\alpha,$$

folglich, weil $\alpha<1$,

$$C_{2n-1}>\frac{n(n-1)}{p}$$

Ferner ist

$$C_{2n+1} = C_{2n-1}\left(1+\frac{2n}{p}\right)+\alpha.\frac{2n}{p}$$

$$= C_{2n-1}\left(1+\frac{2n}{p}+\frac{\alpha}{C_{2n-1}}\cdot\frac{2n}{p}\right);$$

also nach der letzten Ungleichung und weil $\alpha<1$

$$C_{2n+1} < C_{2n-1}\left(1+\frac{2n}{p}+\frac{2}{n-1}\right).$$

Da in der Reihe für D' C_5 der Coefficient mit dem kleinsten Index ist, der aus C_{2n-1} für $n=3$ hervorgeht, so kann man $n \geqq 3$ annehmen und damit ist $\frac{2}{n-1}<1$ und

$$C_{2n+1}<C_{2n-1}\left(2+\frac{2n}{p}\right).$$

Indem wir vorerst von den beiden ersten Gliedern der Reihe für D' absehen, bilden wir uns die Summe eines positiven und des darauf folgenden negativen Gliedes der Reihe; welche ist

$$=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{C_{2n-1}}{(n-1)!}\rho^{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\frac{C_{2n+1}}{n!}\rho^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{C_{2n-1}}{(n-1)!}\cdot\rho^{2n-1}\left(1-\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{C_{2n+1}}{C_{2n-1}}\cdot\frac{\rho^2}{n}\right)$$

da $\frac{2n-1}{2n+1}<1$, $\frac{C_{2n+1}}{C_{2n-1}}<2+\frac{2n}{p}$, so ist diese Summe

$$>\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{C_{2n-1}}{(n-1)!}\rho^{2n-1}\left(1-\rho^2\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{p}\right)\right).$$

Ferner ist $n\geqq 3$, $p\geqq 1$ und $\rho=0.476\ldots<\frac{1}{2}$ folglich $\rho^2\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{p}\right)<\frac{2}{3}$. Somit ist die betrachtete Summe positiv und daher

$$D'>\rho(1-\alpha)-\frac{1}{3}\cdot\rho^3\left(1+\frac{2}{p}-\alpha\right).$$

Sicher wird also D' und damit auch $D>0$ sein, wenn

$$\rho^2<\frac{3(1-\alpha)}{1+\frac{2}{p}-\alpha}$$

also

(13) $$\rho<\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\alpha}}$$

ist. $\frac{1}{\alpha}=\sqrt{1+\frac{1}{2p}}$ ist aber, weil $p\geqq 1$, $<\sqrt{\frac{3}{2}}$ und daher

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\alpha}}>\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}=0.50212.$$

ρ ist nun $<\frac{1}{2}$, also genügt es der obigen Bedingung (13) und deswegen ist $D>0$ und

(14) $$\rho_p<\rho\sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Das zum Beweise dieser Ungleichung angewandte Verfahren kann auch dazu dienen, die gefundene untere Grenze (8) zu erhöhen, und zu beweisen, dass $\rho_p>\rho\sqrt{\frac{2}{p+1}}$ ist. Dann muss

$$\int_0^{\rho\sqrt{\frac{2}{p+1}}}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}}<\frac{1}{4A_p}$$

sein. Setzt man $x\sqrt{\frac{2}{p+1}}$ für x, verändert die rechte Seite wie oben vor (9), so folgt, dass auch

$$E=\int_0^{\rho}\frac{dx}{\left(1+\frac{2x^2}{p+1}\right)^{\frac{p}{2}+1}}-\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p+1}{2}}\int_0^{\rho}e^{-x^2}dx<0$$

sein muss.

Vergleicht man nun die Ungleichungen (11) und (10'), so folgt für $p=2q+1$

$$\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}>\sqrt{\frac{4q+1}{4q+2}}=\sqrt{\frac{2p-1}{2p}},$$

während die Vergleichung von (11') mit (10) für $p=2q$

$$\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}>\sqrt{\frac{4q^2+3q}{(2q+1)^2}}$$

ergiebt. Weil aber $\frac{4q^2+3q}{(2q+1)^2}>1-\frac{1}{4q}$ ist, so kann man allgemein sagen, dass

$$\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{2}}>\sqrt{1-\frac{1}{2p}}$$

also

$$\frac{1}{A_p\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p+1}{2}}>\sqrt{\frac{2p-1}{2p}}\sqrt{\frac{p+1}{p}}=\sqrt{1+\frac{p-1}{2p^2}}>1$$

ist. Deswegen ist $E<0$, wenn

$$E'=\int_0^{\rho}\frac{dx}{\left(1+\frac{2x^2}{p+1}\right)^{\frac{p}{2}+1}}-\int_0^{\rho}e^{-x^2}dx<0$$

ist. Setzt man, der Kürze wegen, $p+1=r$, so ergiebt die Reihenentwickelung und Intregration

$$E'=-\frac{\rho^3}{3}.C'_3+\frac{\rho^5}{5}\frac{C_5'}{2!}-\frac{\rho^7}{7}\cdot\frac{C_7}{3!}+\ldots$$

wo nun

$$C'_{2n-1}=\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{3}{r}\right)\left(1+\frac{5}{r}\right)\ldots\left(1+\frac{2n-3}{r}\right)-1$$

gesetzt ist. Daraus folgt

$$C'_{2n-1} > \frac{1+3+5+\ldots+2n-3}{r} = \frac{(n-1)^2}{r}$$

Ferner ist

$$C'_{2n+1} = C'_{2n-1}\left(1+\frac{2n-1}{r}\right)+\frac{2n-1}{r}$$

$$= C'_{2n-1}\left(1+\frac{2n-1}{r}+\frac{1}{C'_{2n-1}}\cdot\frac{2n-1}{r}\right)$$

$$< C'_{2n-1}\left(1+\frac{2n-1}{r}+\frac{2n-1}{(n-1)^2}\right)$$

Schreibt man $\frac{2n-1}{(n-1)^2} = \frac{2}{(n-1)^2}+\frac{1}{n-1}$, so zeigt sich, dass es <3 für $n \geqq 2$ ist. Daher ist

$$C'_{2n+1} < C'_{2n-1}\left(4+\frac{2n-1}{r}\right)$$

Man fasse nun in der Reihe für E' je ein negatives Glied mit dem darauffolgenden positiven zusammen. Die Summe

$$-\frac{\rho^{2n-1}}{(2n-1)}\frac{C'_{2n-1}}{(n-1)!}+\frac{\rho^{2n+1}}{(2n+1)}\cdot\frac{C'_{2n+1}}{n!}$$

$$= \frac{\rho^{2n-1}}{2n-1}\cdot\frac{C'_{2n-1}}{(n-1)!}\left\{-1+\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\rho^2}{n}\cdot\frac{C'_{2n+1}}{C'_{2n-1}}\right\}$$

ist nach der gefundenen Ungleichung und weil $\frac{2n-1}{2n+1}<1$,

$$< \frac{\rho^{2n-1}}{2n-1}\cdot\frac{C'_{2n-1}}{(n-1)!}\left\{-1+\frac{\rho^2}{n}\left(4+\frac{2n-1}{r}\right)\right\}$$

der Coefficient $\frac{4}{n}+\frac{2n-1}{r.n}$ von ρ^2 ist aber selbst $<.2+\frac{1}{2}.2=3$, weil $r \geqq 2$ und $n \geqq 2$; und da $\rho<\frac{1}{2}$, ist jene Summe

$$< \frac{\rho^{2n-1}}{2n-1}\cdot\frac{C'_{2n-1}}{(n-1)!}\left\{-1+\frac{3}{4}\right\}<0.$$

Daraus folgt, dass $E'<0$ ist, und weiter, dass auch $E<0$ und schliesslich, was zu beweisen war,

$$\rho_p > \rho\sqrt{\frac{2}{p+1}} \tag{15}$$

ist.

Also hat sich die Ungleichung ergeben

$$\rho\sqrt{\frac{2}{p}} > \rho_p > \rho\sqrt{\frac{2}{p+1}},$$

die in Verbindung mit (7) zeigt, dass

$$r_1 > R_1 > r_1\sqrt{\frac{p}{p+1}}$$

ist; so dass die hier durchgeführte Methode der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers ihn stets kleiner liefert als die gewöhnliche, aber höchstens so, als ob eine Beobachtung mehr vorhanden wäre und die letztere Methode der Berechnung angewandt würde.

Carlsruhe, den 27. December 1875.

J. Lüroth.

Observations of Small Planets with the Transit-Circle at the U. S. Naval Observatory, Washington in 1874.

(Communicated by Rear Admiral *C. H. Davis*, Superintendent of the Naval Observatory at Washington.)

The observed places have been corrected for parallax. No corrections have been applied for flexure or errors of division of the instrument.

The observations of Ceres, Pallas, Juno, Vesta and Astraea were compared with the ephemerides in the English Nautical Almanac; the observations of the other planets were compared with the Berlin. Jahrbuch.

In the column „Observer" E indicates Prof. Eastman and J., Sk. and S indicate assistants Frisby, Skinner and Stone.

Ceres (1).

1874	Obs.	α	O.-C.	N. P. D.	O.-C.
Dec. 11	J	6h49m16s63	+8s43	63°22′12″5	—16″3
14	E	46 41.42	8.46	63 5 40.5	15.3
15	J	45 47.27	8.43	63 0 10.2	16.5
18	E	42 58.81	8.65	62 43 50.1	16.3
23	J	38 0.65	8.58	63 17 22.0	17.9

Pallas (2).

1874	Obs.	α	O.-C.	N. P. D.	O.-C.
Nov. 3	Sk	3h 0m 8s87	—1s23	115°29′31″3	— 5″0
7	„			116 15 53.8	3.1
12	E	2 52 36.27	1.55	117 4 7.8	4.8
13	J	2 51 46.61	1.16	117 12 27.3	4.4
21	„			118 2 43.8	5.4
25	„			118 17 7.4	6.3
Dec. 2	E	2 38 4.76	1.47		
4	J	2 37 0.94	1.48	118 24 37.7	6.7
14	E	2 33 12.38	1.36	117 56 19.0	7.2
18	„	2 32 26.68	1.26	117 35 45.6	7.0
19	J	2 32 19.30	1.43	117 30 4.2	+ 9.7
			Probably 1rev = 15″3, wrong		
21	Sk	2 32 10.46	0.93	117 17 9.7	— 8.0
22	E	2 32 7.91	1.36	117 10 30.0	— 5.4