ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№. 333.

Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht.

Von Herrn Geh. Rath und Ritter *Bessel*.

Die beobachteten Polhöhen von Punkten auf der Erde sind mit den Entfernungen der Parallelen derselben, in einem Zusammenhange, welcher durch die Kenntnifs der Figur der Erde gegeben wird; wenn man die Gleichung ihrer Oberfläche kennte, so würde man die darin vorkommenden Constanten so bestimmen können, dafs sie die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit den diese bestimmenden Polhöhen, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, in Uebereinstimmung brächte. Allein man kennt die Figur der Erde nicht; man weifs vielmehr, dafs sie unregelmäfsig ist. Jedoch ist ein elliptisches Rotationssphäroid vorhanden, von dessen Oberfläche sich die Oberfläche der Erde an keinem ihrer Punkte weit entfernt; ob diese Entfernung, an allen Punkten der Oberfläche, als eine, auch vergleichungsweise mit der Abplattung des Sphäroids kleine Gröfse angesehen werden kann, weifs man noch nicht, sondern wird es erst durch die Verbindung mehrerer Gradmessungen miteinander erfahren können. Indessen kann man darauf ausgehen, die Axen dieses Sphäroids so zu bestimmen, dafs die vorhandenen Gradmessungen dadurch so gut als möglich dargestellt werden. Indem man die Abweichungen der Oberfläche der Erde von der Oberfläche dieses Sphäroids als gesetzlos betrachtet, vereinigt sich ihr Einflufs auf die Polhöhen mit den Beobachtungsfehlern derselben, und man mufs, der Methode der kleinsten Quadrate zufolge, dasjenige Sphäroid als das gesuchte betrachten, welches die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit Polhöhen in Uebereinstimmung bringt, deren Unterschiede von den beobachteten der Bedingung dieser Methode entsprechen.

Von diesem richtigen Gesichtspunkte ist zuerst *Walbeck* ausgegangen; allein er hat nur auf den südlichsten und den nördlichsten Punkt jeder Gradmessung Rücksicht genommen und die zwischen beiden liegenden, ebenfalls astronomisch bestimmten Punkte, nicht in seine Rechnung gezogen. Herr *Schmidt* hat die frühere Rechnung vervollständigt, indem er nicht nur allen beobachteten Polhöhen gleiches Recht eingeräumt, sondern auch Gradmessungen berücksichtigt hat, welche in der Zwischenzeit bekannt geworden waren. Ich komme auf denselben Gegenstand zurück, theils weil *Schmidt* mehrere Angaben angewandt hat, welche mir unrichtig zu seyn scheinen; theils weil ich zu der Kenntnifs von noch drei Gradmessungen gelangt bin. Die erste derselben verdanke ich der brieflichen Mittheilung des Herrn Generals *v. Tenner* Exc., welcher eine eigene Unternehmung dieser Art ausgeführt, und an die nördlichere des Herrn Etatsraths *v. Struve* Exc. angeschlossen hat, so dafs, durch beide zusammen, ein Bogen des Meridians von $8^\circ 2' 29''$ gemessen worden ist. Die zweite verdanke ich der brieflichen Mittheilung des Herrn Etatsraths *Schumacher*, dessen Messung $1^\circ 31' 53''$ umfafst. Die dritte, sich über $1^\circ 30' 29''$ ausdehnende, ist von mir, gemeinschaftlich mit Herrn Major *Baeyer*, in der Gegend von Königsberg ausgeführt. Da hier zum ersten Male öffentlich davon die Rede ist, so bemerke ich darüber, dafs sie zunächst den Zweck hatte, die im Süden und Westen von Europa vorgenommenen Gradmessungen mit denen in ununterbrochene Verbindung zu setzen, welche im Norden und Osten ausgeführt worden sind und noch ausgeführt werden; damit man durch zusammenhängende, und die vorzüglichsten Sternwarten von Europa berührende Dreiecksketten von Formentera bis nach Finland gelangen könne. Mit diesem näheren Zwecke wurde die Ausführung einer Gradmessung vereinigt, indem die Polhöhen unseres südlichsten und unseres nördlichsten Dreieckspunktes mit der Polhöhe der Königsberger Sternwarte verglichen wurden.

1.

Ich werde zuerst die Data angeben, welche ich der folgenden Rechnung zum Grunde gelegt habe, so wie auch die Quellen, aus welchen ich sie gezogen habe.

1. Peruanische Gradmessung.

	Polhöhe.	Amplitude.	Entfern. der Parallelen.
Tarqui.......	$-3^\circ 4' 32''068$		
Cotchesqui....	$+0\ 2\ 31,387$	$3^\circ 7' 3''455$	$176875{,}5^T$

Diese Angaben beruhen auf den neuen Reductionen der Beobachtungen, welche *Delambre* und *v. Zach* vorgenommen haben. Der erstere giebt nämlich (Base du Syst. métr. III. p. 133) die Polhöhen:

$$-3^\circ 4' 31''9, \text{ und } +0^\circ 2' 31''22,$$

also die Amplitude = 3° 7′ 3″12, an. Der letztere findet (Mon. Corresp. XXVI. S. 52) die Amplitude = 3° 7′ 3″79. Ich habe das Mittel aus beiden Angaben der Amplitude genommen, an den von *Delambre* berechneten Polhöhen aber nur so viel geändert, als nöthig war, um sie mit jenem Mittel in Uebereinstimmung zu bringen. Die Entfernung der Parallelen beider Punkte findet *Delambre* = 176877ᵀ; *v. Zach* = 176874ᵀ. Herr *Schmidt* wendet beträchtlich verschiedene Zahlen an; nämlich eine 5″205 gröfsere Amplitude und eine 9ᵀ,33 kleinere Entfernung.

2. Erste Ostindische Gradmessung.

Trivandeporum. .	11° 44′ 52″590		
Paudree.	13 19 49,018	1° 34′ 56″428	89813ᵀ01

Der Bericht über diese Messung findet sich Asiatic Researches Vol. VIII. p. 137. Die Entfernung wird von *Lambton* selbst = 95721,32 Fathoms angegeben. *Katers* Prüfung der, ihrer Messung zum Grunde liegenden Scale hat aber ergeben, dafs eine Verbesserung von — 0,000018 angebracht werden mufs, um sie auf wahres englisches Maafs zu reduciren (Phil. Transact. 1821). Hierdurch wird die Entfernung = 95719,60 Fathoms, welche, im Verhältnisse 1,06576542 : 1, die angeführte Anzahl Toisen ergeben.

3. Zweite Ostindische Gradmessung.

			T
Punnae	8° 9′ 31″132		
Putchapolliam. . .	10 59 42,276	2° 50′ 11″144	160944,20
Dodagoontah. . . .	12 59 52,165	4 50 21,033	274694,30
Namthabad.	15 5 53,562	6 56 22,430	393828,09
Daumeragidda . .	18 3 16,245	9 53 45,113	561690,06
Takal K'hera. . . .	21 5 51,532	12 56 20,400	734570,43
Kullianpoor	24 7 11,860	15 57 40,728	906171,67

Ein Theil dieser grofsen Unternehmung ist in den Asiatic Researches Vol. X, XII, XIII beschrieben, ein anderer Theil in Herrn *Everests* Account of the measurement of an arc of the meridian. London 1830. Ich habe für nöthig gehalten, die mit dem Zenithsector, zur Bestimmung der Polhöhen gemachten Beobachtungen einer neuen Rechnung zu unterwerfen, welche ich in einem eigenen Aufsatze bekannt machen werde. Aus dieser Rechnung sind die angeführten Bestimmungen hervorgegangen. Die Originalbeobachtungen finden sich, für Punnae Asiat. Res. XII. p. 68; für Putchapolliam XII. p. 61; für Dodagoontah X. p. 356; für Namthabad XII. p. 339; für Daumeragidda XIII. p. 83 und für Takal K'hera und Kulliampoor in *Everests* Account etc. p. 287 und 306. In dem letzteren Werke finden sich (p. 112 u. 114) sämmtliche Entfernungen der Parallelen der astronomisch bestimmten Punkte, woraus ich abgeleitet habe:

Punnae	0,0
Putchapolliam. . .	171528,76 Fathoms
Dodagoontah. . . .	292759,68 ———
Namthabad.	419728,36 Fathoms
Daumeragidda. . .	598629,84 ———
Takal K'hera. . . .	782879,76 ———
Kullianpoor.	965766,43 ———

Das Verhältnifs der Toise zum Fathom, durch welche diese Zahlen in dem ersteren Maafse ausgedrückt worden sind, ist bei der Gradmessung (2) schon angeführt.

4. Französische Gradmessung.

			T
Formentera . . .	38° 39′ 56″11		
Montjouy.	41 21 44,96	2° 41′ 48″85	153605,77
Barcelona.	41 22 47,90	2 42 51,79	154548,9
Carcassonne .	43 12 54,30	4 32 58,19	259104,8
Evaux.	46 10 42,54	7 30 46,43	427951,5
Panthéon. . . .	48 50 49,37	10 10 53,26	580244,6
Dünkirchen. . .	51 2 8,85	12 22 12,74	705189,4

Die Entfernungen der Parallelen der verschiedenen Punkte von dem südlichsten, mit Ausnahme von Barcelona, finden sich Base du Syst. metr. III. p. 549; der Punkt in Barcelona, wo die astronomischen Beobachtungen gemacht wurden, ist 943ᵀ13 nördlich von Montjouy (II. p. 565). Die Polhöhen von Formentera, Carcassonne, Evaux und Panthéon finden sich III. p. 549 und III. p. 89; an dem letzten Orte ist auch die Polhöhe von Montjouy angegeben; die von Barcelona ist (II. p. 565 u. 615) = 41° 21′ 48″37 + 59″53. Für Dünkirchen habe ich die Angabe III. p. 548 angenommen. Perpignan habe ich, nach *Delambres* Beispiele, ausgelassen, weil die dortigen Polhöhenbeobachtungen weniger sicher zu seyn scheinen, als die übrigen. Herr *Schmidt* hat die Polhöhen von Montjouy + 0″49, Barcelona — 0″74, Carcassonne + 0″01, Evaux — 0″35, Panthéon — 0″43, Dünkirchen — 0″11 von den oben verzeichneten verschieden. Die Parallele von Barcelona setzt er 5ᵀ,9 nördlicher als oben.

5. Englische Gradmessung.

			T
Dunnose.	50° 37′ 7″633	0	
Greenwich.	51 28 39,000	0° 51 31,367	49059,89
Blenheim.	51 50 27,632	1 13 19,999	69829,19
Arburyhill. . . .	52 13 28,031	1 36 20,398	91696,39
Clifton	5 327 31,130	2 50 23,497	162075,93

Die Polhöhen sind von den, in den Phil. Transact. 1803 angegebenen verschieden; sie sind aus einer neuen Combination der von *Mudge* gemachten Reductionen seiner Beobachtungen hervorgegangen. Das Nähere hierüber und die Ursache, weshalb ich mir habe erlauben müssen, an *Mudges* eigenen Angaben etwas zu ändern, wird man in einem besonderen Aufsatze kennen lernen. Die von *Dunnose* an gerechneten Entfernungen der verschiedenen Parallelen sind ursprünglich (Ph. Tr. 1803. p. 441 u. 487)

Greenwich.	52282,67 Fathoms
Blenheim.	74416,33 ———
Arburyhill	97720,00 ———
Clifton	172722,83 ———

müssen aber, nach *Katers* Prüfung der zur Messung angewandten Scale, um 0,00007 vergröfsert werden, resp. um

3,66; 5,21; 6,84; 12,09.

Die in Toisen angegebenen Entfernungen stimmen mit den so vergröfserten überein.

6. Hannoversche Gradmessung.

			T
Göttingen.....	51°31 47″85		
Altona........	53 32 45,27	2°0′ 57″42	115163,725

Aus *Gaufs* Breitenunterschied etc. S. 71 genommen.

7. Dänische Gradmessung.

			T
Lauenburg....	53°22′ 17″046		
Lysabbel.....	54 54 10,352	1°31′ 53″306	87436,538

Diese Resultate sind mir von Herrn Etatsrath *Schumacher* mitgetheilt. Sie würden sich mit denen der vorigen Gradmessung verbinden lassen, wenn die Polhöhenbestimmungen beider Gradmessungen nicht auf verschiedenen Sternen beruheten, wodurch ihre Verbindung von den Bestimmungen der Declinationen dieser Sterne abhängig werden würde. Die Gefahr, Unternehmungen von so ausgezeichneter Genauigkeit, wie diese beiden, durch die Einmischung eines fremden Elementes zu entstellen, glaube ich vermeiden zu müssen, desto mehr, da das 9860ᵀ,46 südlich von Altona liegende Lauenburg auch 21031ᵀ,51 östlich liegt, also in einem Winkel mit dem Meridiane von fast 65° erscheint, und daher die Entfernung seines Parallels von dem Parallel von Altona nicht mit derselben Sicherheit gefunden werden kann, welche, bei geringeren Neigungen gegen den Meridian, erreichbar ist.

8. Preufsische Gradmessung.

			T
Trunz.......	54°13′ 11″466		
Königsberg...	54 42 50,500	0°29′ 39″034	28211,629
Memel.......	55 43 40,446	1 30 28,980	86176,975

Ein besonderes Werk über diese Gradmessung ist jetzt unter der Presse.

9. Russische Gradmessung.

			T
Belin.........	52° 2′ 40″864		
Nemesch......	54 39 4,519	2°36′ 23″655	148811,418
Jacobstadt.....	56 30 4,562	4 27 23,698	254543,454
Bristen.......	56 34 51,550	4 32 10,686	259110,085
Dorpat........	58 22 47,280	6 20 6,416	361824,461
Hochland......	60 5 9,771	8 2 28,907	459363 008

Diese Zahlen hat mir Herr General *von Tenner* mitgetheilt. Die sich auf die *Struve*sche Gradmessung beziehenden für Jacobstadt, Dorpat und Hochland stimmen mit denen überein, welche sich in dem Werke über die Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Rufslands I S. 312 u. 338 angegeben finden.

10. Schwedische Gradmessung.

			T
Malörn........	65°31′ 30″265		
Pahtawara... .	67 8 49,830	1°37′ 19″565	92777,981

Dieses sind die Angaben von *Swanberg*, p. 157 seines Werkes. Herr *Schmidt* hat die Amplitude 0″785 gröfser, die Entfernung der Parallelen 17ᵀ,251 kleiner angenommen. Diese Unterschiede sind aus zwei Anmerkungen hervorgegangen, welche Herr *Swanberg* zu seiner Reduction der Beobachtungen macht. Die eine derselben giebt an, wie die Polhöhen ausgefallen seyn würden, wenn man die Dichtigkeit der Luft, und damit die Strahlenbrechung, nicht auf die gewöhnliche Art von den Thermometerständen abhängig, sondern in einem zusammengesetzteren Verhältnisse zu denselben, hätte annehmen wollen, welches gewisse Versuche von *Prony* anzudeuten schienen. Die andere zeigt, welche Entfernung man aus der Messung berechnet haben würde, wenn man von der Annahme ausgegangen wäre, das von Paris gesandte Doppelmeter habe seine wahre Länge bei der Normaltemperatur der Toise $=$ 13° R. Da die Zweifel, durch welche diese beiden Anmerkungen veranlafst worden sind, als völlig beseitigt angesehen werden können, so hätte Herr *Schmidt* keine Rücksicht darauf nehmen sollen.

2.

Die Theorie, mit welcher die angeführten 10 Gradmessungen verglichen werden sollen, ist folgende. Wenn die beiden halben Axen eines elliptischen Rotationssphäroids durch a und b bezeichnet werden, und wenn

$$\frac{a-b}{a+b} = n$$

gesetzt wird, so ist die Länge des Bogens des Meridians zwischen dem Aequator und der Polhöhe φ, das Integral:

$$s = a(1-ee)\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-ee\sin\varphi^2)}}$$

oder die Entwickelung desselben:

$$s = a(1-n)^2(1+n)N\left\{\varphi - \alpha\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha'\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\alpha''\sin 6\varphi + ..\right\}$$

worin

$$N = 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2 n^4 + .$$

$$N\alpha = \frac{3}{2}n + \frac{3.5}{2.4}.\frac{3}{2}n^3 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{3.5}{2.4}n^5 + .$$

$$N\alpha' = \frac{3.5}{2.4}n^2 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{3}{2}n^4 + \ldots$$

$$N\alpha'' = \frac{3.5.7}{2.4.6}n^3 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{3}{2}n^5 + \ldots$$

u. s. w.

gesetzt worden sind. Will man diesen Ausdruck, statt von der halben grofsen Axe, von der Länge des mittleren Meridiangrades (g) abhängig machen, so hat man $\varphi = 180°$ zu setzen, wodurch man

$$180g = a(1-n)^2(1+n)N\pi,$$

also

$$s = \frac{180g}{\pi}\left\{\varphi - \alpha\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha'\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\alpha''\sin 6\varphi + \ldots\right\}$$

erhält.

Hieraus folgt der Ausdruck der Entfernung der, den Polhöhen φ und φ' entsprechenden Parallelkreise:

$$s'-s = \frac{180\,g}{\pi}\Big\{\varphi'-\varphi-2\alpha\sin(\varphi'-\varphi)\cos(\varphi'+\varphi) + \tfrac{2}{2}\alpha'\sin 2(\varphi'-\varphi)\cos 2(\varphi'+\varphi)\Big\}$$

Wenn man, zur Abkürzung, l für die Amplitude $\varphi'-\varphi$ und $2L$ für die Summe der Polhöhen $\varphi'+\varphi$ schreibt, unter ω die Zahl $\frac{648000}{\pi} = 206264''8$ versteht und l in Secunden ausdrückt, so erhält man daraus

$$\frac{3600}{g}(s'-s) = l-2\omega\alpha\sin l\cos 2L+\omega\alpha'\sin 2l\cos 4L - \tfrac{2}{3}\omega\alpha''\sin 3l\cos 6L+\ldots.$$

Die Aufgabe fordert, dafs an die beobachteten Polhöhen φ, φ', φ''...., um sie den gemessenen Entfernungen der Parallelen entsprechend zu machen, Aenderungen x, x', x''.. .. angebracht werden, deren Summe der Quadrate

$$xx+x'x'+x''x''+\ldots$$

ein Minimum wird: die Werthe von g und α, α', α''.... welche diese Bedingung erfüllen, gehören dann zu dem gesuchten elliptischen Rotationssphäroide. Schreibt man $\varphi+x$ und $\varphi'+x'$ für φ und φ' und vernachlässigt man den Einflufs dieser Aenderungen auf L, so wie auch die Quadrate und Producte von x und x', so verwandelt der gefundene Ausdruck sich in:

$$\frac{3600}{g}(s'-s) = l-2\omega\alpha\sin l\cos 2L+\omega\alpha'\sin 2l\cos 4L-\ldots + (x'-x)\rho$$

wo ρ für

$$1-2\alpha\cos l\cos 2L+2\alpha'\cos 2l\cos 4L-\ldots.$$

geschrieben ist; man hat also

$$x'-x = \frac{1}{\rho}\Big\{\frac{3600}{g}(s'-s)-(l-2\omega\alpha\sin l\cos 2L+\omega\alpha'\sin 2l\cos 4L..)\Big\}$$

und mufs nun g und die Abplattung der Erde so bestimmen, dafs sie die Erfüllung der gemachten Bedingung herbeiführen.

Nimmt man $g_{,}$ und $\alpha_{,}$ als Näherungswerthe von g und α an, setzt man

$$g = \frac{g_{,}}{1+i};\quad \alpha = \alpha_{,}(1+k),$$

und vernachlässigt man die Quadrate und Producte von i und k, so verwandelt der Ausdruck von $x'-x$ sich in:

$$\frac{1}{\rho}\Big\{\frac{3600}{g}(s'-s)-l\Big\}+\frac{\omega}{\rho}(2\alpha_{,}\sin l\cos 2L-\alpha_{,}'\sin 2l\cos 4L+\ldots..)$$
$$+\frac{1}{\rho}.\frac{3600}{g}(s'-s)i+\frac{\omega}{\rho}\Big(2\alpha_{,}\sin l\cos 2L-\alpha_{,}\frac{d\alpha_{,}'}{d\alpha_{,}}\sin 2l\cos 4L+\ldots..\Big)k$$

die Ausdrücke der darin vorkommenden $\alpha_{,}'$ und $\alpha_{,}\frac{d\alpha_{,}'}{d\alpha_{,}}$ durch $\alpha_{,}$ sind resp.

$$\frac{5}{6}\alpha_{,}^2+\frac{25}{162}\alpha_{,}'^4 \quad\text{und}\quad \frac{5}{3}\alpha_{,}^2+\frac{50}{81}\alpha_{,}^4.$$

Setzt man also

$$m = \frac{1}{\rho}\Big\{\frac{3600}{g_{,}}(s'-s)-l\Big\}+\frac{\omega}{\rho}\Big\{2\alpha\sin l\sin 2L-\Big(\frac{5}{6}\alpha_{,}^2+\frac{25}{162}\alpha_{,}^4\Big)\sin 2l\cos 4L\Big\}$$
$$a = \frac{1}{\rho}.\frac{3600}{g_{,}}(s'-s)$$
$$b = \frac{\omega}{\rho}\Big\{2\alpha_{,}\sin l\cos 2L-\Big(\frac{5}{3}\alpha_{,}^2+\frac{5i}{81}\alpha_{,}^4\Big)\sin 2l\cos 4L\Big\}$$

so hat man

$$x'-x = m+ai+bk,$$

und eine ähnliche Gleichung für die Verbindung des südlichsten Punktes einer Gradmessung mit jedem nördlicheren Punkte derselben.

Die Summe der Quadrate der an alle Polhöhen einer Gradmessung anzubringenden Veränderungen ist also:

$$xx+(m+ai+bk+x)^2+(m'+a'i+b'k+x)^2+\text{etc.}\ldots$$

für andere Gradmessungen sind diese Summen:

$$x_{,}x_{,}+(m_{,}+a_{,}i+b_{,}k+x_{,})^2+(m_{,}'+a_{,}'i+b_{,}'k+x_{,})^2+\text{etc.}$$
$$x_2x_2+(m_2+a_2i+b_2k+x_2)^2+(m_2'+a_2'i+b_2'k+x_2)^2+\text{etc.}$$

u. s. w.

Jede derselben giebt also zur Bestimmung des ihr zukommenden Werthes von x die Gleichung

$$0 = \mu x+(m)+(a)i+(b)k$$

in welcher μ die Anzahl der beobachteten Polhöhen und (m), (a), (b) die gewöhnlichen *Gaufs*ischen Bezeichnungen sind. Sie liefert ferner, zur Bestimmung von i und k, welche auf allen vorhandenen Gradmessungen gegründet werden soll, die Beiträge:

$$(am)+(a)x+(aa)i+(ab)k$$

und

$$(bm)+(b)x+(ab)i+(bb)k$$

welche sich, durch die Elimination von x, in

$$(am)-\frac{(a)(m)}{\mu}+\Big\{(aa)-\frac{(a)(a)}{\mu}\Big\}i+\Big\{(ab)-\frac{(a)(b)}{\mu}\Big\}k$$

und

$$(bm)-\frac{(b)(m)}{\mu}+\Big\{(ab)-\frac{(a)(b)}{\mu}\Big\}i+\Big\{(bb)-\frac{(b)(b)}{\mu}\Big\}k$$

verwandeln. Die Summen sowohl des ersten, als des zweiten dieser Beiträge, welche aus allen vorhandenen Gradmessungen hervorgehen, werden $= 0$ gesetzt und ergeben dadurch die beiden, zur Bestimmung von i und k erforderlichen Gleichungen.

3.

Ich werde die einzelnen Bedingungsgleichungen hier mittheilen, welche ich aus jeder der zehn der Untersuchung zum Grunde gelegten Gradmessungen abgeleitet habe. Ich beabsichtige dadurch die Erlangung des Vortheils, etwanige spätere Aenderungen der als beobachtet angenommenen Resultate, zur Verbesserung der Rechnung benutzen zu können, ohne diese ganz wiederholen zu dürfen. Um unnöthig vielziefrige Zahlen zu vermeiden, werde ich nicht i und k, sondern

$$10000\,i = p \quad \text{und} \quad 10\,k = q$$

als die unbekannten Gröfsen annehmen. Ich bin von den Annahmen

$$g = \frac{57008^T}{1+i} \qquad \alpha = \frac{1+k}{400}$$

ausgegangen.

1. Peruanische Gradmessung.

$$x_1^1 - x_1 = +1''966 + 1{,}1225\,p + 5{,}6059\,.\,q$$

2. Erste Ostindische Gradmessung.

$$x_2^1 - x_2 = +0''937 + 0{,}5697\,p + 2{,}5835\,.\,q$$

3. Zweite Ostindische Gradmessung.

$$x_3^1 - x_3 = +0''455 + 1{,}0212\,p + 4{,}8270\,.\,q$$
$$x_3^2 - x_3 = +6{,}681 + 1{,}7428\,p + 8{,}1250\,.\,q$$
$$x_3^3 - x_3 = +1{,}745 + 2{,}4983\,p + 11{,}4652\,.\,q$$
$$x_3^4 - x_3 = +3{,}878 + 3{,}5624\,p + 15{,}9264\,.\,q$$
$$x_3^5 - x_3 = +8{,}272 + 4{,}6585\,p + 20{,}1840\,.\,q$$
$$x_3^6 - x_3 = +2{,}677 + 5{,}7458\,p + 24{,}0262\,.\,q$$

4. Französische Gradmessung.

$$x_4^1 - x_4 = -0''297 + 0{,}9709\,p + 0{,}8601\,.\,q$$
$$x_4^2 - x_4 = -3{,}641 + 0{,}9768\,p + 0{,}8642\,.\,q$$
$$x_4^3 - x_4 = -4''259 + 1{,}6374\,p + 1{,}1889\,.\,q$$
$$x_4^4 - x_4 = -9{,}319 + 2{,}7037\,p + 1{,}2671\,.\,q$$
$$x_4^5 - x_4 = -3{,}092 + 3{,}6651\,p + 0{,}8659\,.\,q$$
$$x_4^6 - x_4 = +0{,}889 + 4{,}4533\,p + 0{,}2051\,.\,q$$

5. Englische Gradmessung.

$$x_5^1 - x_5 = +3''504 + 0{,}3095\,p - 0{,}3178\,.\,q$$
$$x_5^2 - x_5 = +4{,}937 + 0{,}4405\,p - 0{,}4658\,.\,q$$
$$x_5^3 - x_5 = +3{,}758 + 0{,}5784\,p - 0{,}6308\,.\,q$$
$$x_5^4 - x_5 = -0{,}892 + 1{,}0223\,p - 1{,}2226\,.\,q$$

6. Hannoversche Gradmessung.

$$x_6^1 - x_6 = +5''679 + 0{,}7263\,p - 0{,}9294\,.\,q$$

7. Dänische Gradmessung.

$$x_7^1 - x_7 = -0''369 + 0{,}5513\,p - 0{,}8537\,.\,q$$

8. Preufsische Gradmessung.

$$x_8^1 - x_8 = -0''368 + 0{,}1779\,p - 0{,}2852\,.\,q$$
$$x_8^2 - x_8 = +3{,}790 + 0{,}5433\,q - 0{,}9157\,.\,q$$

9. Russische Gradmessung.

$$x_9^1 - x_9 = +0''248 + 0{,}9384\,p - 1{,}3293\,.\,q$$
$$x_9^2 - x_9 = +5{,}110 + 1{,}6049\,p - 2{,}5184\,.\,q$$
$$x_9^3 - x_9 = +5{,}939 + 1{,}6337\,p - 2{,}5741\,.\,q$$
$$x_9^4 - x_9 = +2{,}909 + 2{,}2809\,p - 3{,}9289\,.\,q$$
$$x_9^5 - x_9 = +5{,}276 + 2{,}8953\,p - 5{,}3824\,.\,q$$

10. Schwedische Gradmessung.

$$x_{10}^1 - x_{10} = -0''507 + 0{,}5839\,p - 1{,}9711\,.\,q$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen habe ich die durch (m), (a), (b), (am), (aa) u. s. w. bezeichneten Summen. für jede der Gradmessungen erhalten:

	(m)	(a)	(b)	(am)	(aa)	(ab)	(bm)	(bb)
1	+ 1,966	+1,1225	+ 5,6059	+ 2,2068	1,2600	+ 6,2926	+ 11,0211	31,4261
2	+ 0,937	0,5697	+ 2,5835	+ 0,5338	0,3246	+ 1,4718	+ 2,4207	6,6745
3	+23,708	19,2290	+84,5538	+84,1994	77,7283	+336,5465	+369,5289	1459 0687
4	—19,719	14,4072	+ 5,2513	—43,3870	45,1527	+ 11,1389	— 22,7680	5,2976
5	+11,307	2,3507	— 2,6370	+ 4,5209	1,6694	— 1,9183	— 4,6932	2,2105
6	+ 5,679	0,7263	— 0,9294	+ 4,1247	0,5275	— 0,6750	— 5,2780	0,8638
7	— 0,369	0,5513	— 0,8537	— 0,2034	0,3039	— 0,4706	+ 0,3150	0,7288
8	+ 3,422	0,7212	— 1,2009	+ 1,9936	0,3268	— 0,5482	— 3,3655	0,9198
9	+19,482	9,3532	—15,7331	+40,0469	19,7106	— 34,0396	— 68,3130	59,1418
10	— 0,507	0,5839	— 1,9711	— 0,2960	0,3409	— 1,1509	+ 0,9994	3,8852

Nach der Elimination von x_1, x_2, x_3, ... folgen hieraus die Beiträge der verschiedenen Gradmessungen zu den, zur Bestimmung von p und q dienenden Gleichungen:

	$(am_{,})$	$(aa_{,})$	$(ab_{,})$	$(bm_{,})$	$(bb_{,})$
1	+ 1,1034	0,6300	+ 3,1463	+ 5,5106	15,7131
2	+ 0,2669	0,1623	+ 0,7359	+ 1,2104	3,3373
3	+19,0734	24,8940	+104,2771	+83,1572	437,7342
4	− 2,8019	15,5002	+ 0,3308	− 7,9757	1,3582
5	− 0,7950	0,5642	− 0,6785	+ 1,2701	0,8197
6	+ 2,0624	0,2638	− 0,3375	− 2,6390	0.4319
7	− 0,1017	0,1519	− 0,2353	+ 0,1575	0,3644
8	+ 1,1710	0,1534	− 0,2595	− 1,9957	0,4391
9	+ 9,6768	5,1302	− 9,5138	−17,2270	17,8868
10	− 0,1480	0,1705	− 0,5755	+ 0,4997	1,9426
Summe...	+29,5073	47,6205	+96,8900	+61,9681	480,0273

Man hat also, zur Bestimmung von p und q die Gleichungen:

$$0 = +29{,}5073 + 47{,}6205\,p + 96{,}8900\,q$$
$$0 = +61{,}9681 + 96{,}8900\,p + 480{,}0273\,q$$

aus deren Auflösung sich

$$p = -0{,}60574; \quad \text{Gewicht} = 28{,}064$$
$$q = -0{,}0068280 \ldots\ldots\ldots = 282{,}892$$

ergiebt.

4.

Vergleicht man die einzelnen beobachteten Polhöhen mit dieser Bestimmung von p und q, so erhält man die Aenderungen, welche man ihnen beilegen mufs, um sie mit dem elliptischen Rotationssphäroide, dem die gefundenen Werthe dieser Gröfsen zugehören, übereinstimmend zu machen:

$$\begin{cases} x_1 = -0''624 \\ x_1^1 = +0{,}624 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -0{,}287 \\ x_2^1 = +0{,}287 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1{,}640 \\ x_3^1 = -1{,}837 \\ x_3^2 = +3{,}929 \\ x_3^3 = -1{,}487 \\ x_3^4 = -0{,}029 \\ x_3^5 = +3{,}672 \\ x_3^6 = -2{,}608 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = +4{,}069 \\ x_4^1 = +3{,}178 \\ x_4^2 = -0{,}170 \\ x_4^3 = -1{,}190 \\ x_4^4 = -6{,}897 \\ x_4^5 = -1{,}249 \\ x_4^6 = +2{,}259 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = -1{,}980 \\ x_5^1 = +1{,}338 \\ x_5^2 = +2{,}793 \\ x_5^3 = +1{,}432 \\ x_5^4 = -3{,}483 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = -2{,}623 \\ x_6^1 = +2{,}623 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = +0{,}349 \\ x_7^1 = -0{,}349 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8 = -0{,}998 \\ x_8^1 = -1{,}472 \\ x_8^2 = +2{,}469 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = -2{,}321 \\ x_9^1 = -2{,}632 \\ x_9^2 = +1{,}834 \\ x_9^3 = +2{,}646 \\ x_9^4 = -0{,}766 \\ x_9^5 = +1{,}238 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{10} = +0{,}424 \\ x_{10}^1 = -0{,}424 \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate dieser Aenderungen ist $= 203{,}391$, und der mittlere Werth jeder derselben

$$= \sqrt{\frac{203{,}391}{38-10}} = \pm 2''695$$

Aus dieser Bestimmung und den oben angegebenen Gewichten der Bestimmungen von p und q folgen die mittleren Fehler dieser Gröfsen:

$$= \pm 0{,}5087 \quad \text{und} = \pm 0{,}1602$$

oder die mittleren Fehler

$$\text{von } i = \pm 0{,}00005087$$
$$\text{von } k = \pm 0{,}01602.$$

Man hat also:

$$g = \frac{57008}{1-0{,}000060574} = \overset{T}{57011{,}453} \quad \overbrace{\pm \overset{T}{2{,}900}}^{\text{M. Fehler.}}$$

$$\alpha = \frac{1-0{,}0006828}{400} = 0{,}002498293. \pm 0{,}00004002.$$

5.

Ich habe nur noch die beiden Axen des elliptischen Rotationssphäroids aufzusuchen und die sich darauf beziehenden Zahlenwerthe einiger Formeln, welche man anzuwenden häufig Veranlassung findet, zu entwickeln.

Die Umkehrung der Reihe (§. 2)

$$\alpha = \frac{\frac{3}{2}n + \frac{45}{16}n^3 + \frac{525}{128}n^5 + \ldots}{1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \ldots}$$

giebt den Ausdruck von n durch α, nämlich

$$n = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{23}{486}\alpha^5 + \ldots$$

und, durch die Substitution des gefundenen Werthes von α:

$$n = \frac{a-b}{a+b} = 0{,}0016655304.$$

Hieraus erhält man das Axenverhältnifs des elliptischen Rotationssphäroids, welches den in die Untersuchung gezogenen Gradmessungen am nächsten entspricht:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2} : \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = 300{,}7047 : 299{,}7047; \quad \text{M.F.} = \pm 4{,}81\,\text{Einh.}$$

Ferner erhält man die Axen selbst, nach den im 2ten § gegebenen Formeln:

$$a = \frac{180\,g}{\pi(1-n)^2(1+n)N}$$
$$b = \frac{180\,g}{\pi(1+n)^2(1-n)N}$$

in Zahlen ausgedrückt:

$$a = \overset{T}{3271953{,}854} \quad \log a = 6{,}5148071699$$
$$b = 3261072{,}900 \quad \log b = 6{,}5133605073$$

Die Länge des Erdquadranten, welche, nach der anfänglichen Absicht 10000000 Meter seyn sollte, ist dieser Bestimmung zufolge:

$$90 \cdot g \cdot \frac{864}{443{,}296} = \overset{m}{10000565{,}278}$$

ihre mittlere Unsicherheit ist $= 508^{m},7$, also fast so grofs wie ihre Abweichung von der runden Zahl. Man sieht hieraus, wie unsicher das Meter selbst jetzt, wo die Zahl der Gradmessungen sich beträchtlich vermehrt hat, noch seyn würde, wenn es seine ursprüngliche Erklärung, dafs es der 10000000te Theil des Erdquadranten seyn solle, behalten hätte. Noch immer würde seine Unsicherheit wenigstens $0^{L},0225$ betragen, eine Gröfse, welche nur bei sehr rohen Maafsangaben unbedeutend erscheinen könnte.

Die Formeln, deren Zahlenentwickelung ich mittheilen wollte, sind folgende:

1) Länge eines Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= \varphi$:

$$m = 57011^{T}453 - 284^{T}851 \cos 2\varphi + 0^{T}593 \cos 4\varphi - 0^{T}001 \cos 6\varphi.$$

2) Länge eines Grades des Parallels:

$$p = 57153^{T}885 \cos\varphi - 47^{T}576 \cos 3\varphi + 0^{T}059 \cos 5\varphi$$

oder, wenn

$$\sin\psi = e \sin\varphi, \ldots . (\log e = 8{,}9110835)$$

so ist

$$\log p = 4{,}7566845{,}4 + \log\cos\varphi - \log\cos\psi.$$

3) Halbmesser der Krümmung im Meridiane $= r'$, in der darauf senkrechten Richtung $= r''$, in dem Azimuthe $\alpha = r$:

$$\frac{\omega}{r'} = 0''06314600 + 0''00031552 \cos 2\varphi + 0''00000013 \cos 4\varphi$$

$$\frac{\omega}{r''} = 0{,}06293548 + 0{,}00010482 \cos 2\varphi - 0{,}00000004 \cos 4\varphi$$

oder

$$\log\frac{\omega}{r'} = 8{,}8025112.9 + 3\log\cos\psi$$

$$\log\frac{\omega}{r''} = 8{,}7996179.6 + \log\cos\psi$$

und

$$\frac{\omega}{r} = \lambda + \lambda' \cos 2\alpha,$$

wo

$$\lambda = 0''06304074 + 0''00021017 \cos 2\varphi + 0''00000004 \cos 4\varphi$$
$$\lambda' = 0{,}00010526 + 0{,}00010535 \cos 2\varphi + 0{,}00000009 \cos 4\varphi$$

4) Entfernung vom Mittelpunkte der Erde $= \rho$ und sogenannte verbesserte Breite $= \varphi'$:

$$\log . \rho \cos\varphi' = \log . \cos\varphi - \log\cos\psi$$
$$\log . \rho \sin\varphi' = \log . \sin\varphi - \log\cos\psi - 0{,}0028933.3.$$

Bessel.

Schreiben des Herrn Professors *Weisse*, Directors der Sternwarte in Cracau, an den Herausgeber.

Cracau 1837. Febr. 12.

Ich bin so frei, Ihnen die an der hiesigen Sternwarte im J. 1836 gemachten Beobachtungen von Mondsternen, Sternbedeckungen, so wie einige Planetenbeobachtungen zu übersenden. Selten ist ein Jahr den astronomischen Beobachtungen so ungünstig, wie es das verflossene war; besonders zu Ende des Jahres, in den Monaten November und December hatten wir oft durch ganze Wochen keinen Sonnenblick; im December hatten wir 27 ganz trübe Tage. In diesem Monate hatten wir auch einen ganz besonders tiefen Stand des Barometers: den 7ten um die Mittagsstunde fing das Barometer zu fallen an, bis es den 10ten um 3^{h} Nachmittags den tiefen Stand von $26^{z}\ 6^{L},23$ erreichte; von diesem Augenblicke an stieg es wieder; doch zeigte es mit wenigen Ausnahmen fast den ganzen Monat durch einen niedern Stand; das monatliche Mittel war $27^{z}\ 2^{L},7$.

Zugleich lege ich die an der hiesigen Sternwarte gemachten Beobachtungen des *Halley*'schen Cometen bei. Die Beobachtungen wurden theils an dem Kreis-, theils an dem Filar-Micrometer des Aequatoreals gemacht. An den Tagen, wo der Comet einen tiefen Stand hatte, wurde natürlich auf die Refraction Rücksicht genommen. Am 19ten September wurde der Comet mit einem Sterne aus der Hist. Cél. p. 52 sub $6^{h}\ 4'\ 52''$ verglichen. Dieser Stern ist in der Declination unrichtig angegeben, wie ich mich aus Vergleichungen desselben mit $\varkappa$ Aurigae am Aequatoreale überzeugte. Aus Beobachtungen an dem Meridiankreise ergab sich die mittlere Declination dieses Sterns für den Anfang des Jahres 1837 $= +29^{\circ}\ 50'\ 10''0$.

Nach der in der Hist. Cél. angegebenen Position fand ich keinen Stern am Himmel.

Ich erwarte eben eine schöne Acquisition für unsere Sternwarte; der Erbe des Astronomen *Sniadecki* hat aus dessen Nachlasse ein Chronometer für unsere Sternwarte bestimmt, an welchem Institute *Sniadecki* viele Jahre hindurch für die Wissenschaft gewirkt hat. Ich habe den Herrn *Slavinski*, Director der Sternwarte in Wilna ersucht, uns dieses schöne Geschenk wohlverpackt zu übersenden.

Dr. *M. Weisse.*

Mondsterne auf der Cracauer Sternwarte im Jahre 1836 beobachtet.

Datum.	Gestirne.	Scheinb. AR.	Anz. d. Fäden.
1836 Jänner 11	74 l^{2} Virginis	$13^{h}23'25''79$	5
	82 m Virginis	13 22 59,66	5
	Mond II	13 47 58,76	5
	2 Librae	14 14 35,61	5
26	38 Arietis	2 36 1,61	5
	42 π Arietis	2 40 8,66	5
	Mond I	3 1 56,59	5
	25 η Tauri	3 37 44,49	5
27	25 η Tauri	3 37 44,64	5
	Mond I	3 50 35,90	5
	61 δ' Tauri	4 13 29,10	5
	74 ε Tauri	4 19 2,99	4

Datum.	Gestirne.	Scheinb. AR.	Anz. d. Fäden.
1836 Jänner 28	61 δ' Tauri	$4^{h}13'29''13$	5
	74 ε Tauri	4 19 2,99	5
	Mond I	4 41 29,98	5
	109 n Tauri	5 9 26,11	4
	112 β Tauri	5 15 56,22	5
Febr. 25	97 i Tauri	4 41 47,90	5
	102 ι Tauri	4 53 17,85	5
	Mond I	5 12 56,11	5
	136 C Tauri	5 43 1,45	5
	1 H Geminor.	5 54 9,29	5
26	136 C Tauri	5 43 1,28	5
	1 H Geminor.	5 54 9,22	5