2. *Gravitation und Quantentheorie. II;*
von A. H. Bucherer.

In dieser Zeitschrift[1]) habe ich eine Ableitung der Gravitationswirkungen auf Grund der Quantentheorie gegeben. Die Energiegleichung der Bewegung erscheint dort als eine Hypothese, der anscheinend nur der Vorzug innerer Wahrscheinlichkeit zukommt. Die folgenden Ausführungen dienen hauptsächlich der Begründung dieser Gleichung.

I. Die Unterscheidung longitudinaler und transversaler Masse im Schwerefeld.

Bevor wir den Ausdruck für die im Schwerefeld bestehende Bewegungsenergie ableiten können, müssen wir untersuchen, ob die gravitierenden Massen abhängig von der Bewegungsrichtung sind. Wir haben mit zwei Klassen von Bewegungen zu tun, wenn wir die Einwirkung des Schwerefeldes untersuchen: Erstlich die Wirkung auf Systeme, in denen die Ursache der Bewegung elektrische, magnetische oder elastische Kräfte sind. Zweitens solche, in denen, wie in unserem Sonnensystem, wesentlich reine Gravitationskräfte wirken. Ein Beispiel der ersteren Klasse ist ein Wasserstoffatom, in dem ein Elektron um einen positiven Kern kreist. In die zweite Klasse gehören außer den Himmelskörpern die Lichtstrahlen, deren Bewegung, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit im unendlichen, nur noch vom Gravitationsfelde abhängt. Bei der Untersuchung der Systeme erster Klasse vergleichen wir die Bewegung außerhalb des Schwerefeldes mit einer solchen im Felde und bezeichnen die außerhalb bestehenden Werte — sie entsprechen den von der klassischen Theorie innerhalb des Feldes angenommenen — mit dem Index 0. Auf die Körper zweiter Klasse wirken außerhalb des Schwerefeldes keine Kräfte. Sie bewegen sich dort

1) A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. 68. S. 1. 1922.

gradlinig. Der Index 0 bezeichnet bei ihnen Werte, die nach der klassischen Mechanik im Abstande r bestehen würden.

Betrachten wir zunächst die Bewegung eines Körpers zweiter Klasse.

Es gilt die Gleichung, a. a. O., für die kinetische Energie:

$$(1) \qquad E = \frac{1}{2} m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r r_0^2}\right) \left[\left(\frac{d r}{d t}\right)_0^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r r_0^2}\right) r^2 \left(\frac{d\varphi}{d t}\right)_0^2\right].$$

Hiervon fällt auf die radiale Bewegung

$$(2) \qquad E_r = \frac{1}{2} m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right) \left(\frac{d r}{d t}\right)_0^2$$

und auf die aus der Quantentheorie abgeleitete Rotationsenergie:

$$(3) \qquad E_t = \frac{1}{2} m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right) \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right) r^2 \left(\frac{d\varphi}{d t}\right)_0^2.$$

Hier bedeutet $m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right)$ die bei einer Rotation wirkende Masse. Wir wollen sie transversale[1]) nennen. Der Faktor $\left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)$ entspricht der aus der abgeleiteten Rotverschiebung sich ergebenden Zeitdilatation:

$$d t' = d t_0 \left(1 + \frac{\mu}{r r_0^2}\right).$$

Während E_t sich aus der Quantentheorie ergibt, ist der Ausdruck von E_r zunächst nur hypothetisch. Ich ließ mich durch folgende Erwägungen zu seiner Aufstellung führen. Zunächst erinnerte die bei der Rotationsenergie wirkende Masse an die transversale Masse der speziellen Relativitätstheorie, die dann auftritt, wenn ein Himmelskörper aus dem Unendlichen, mit einer Anfangsgeschwindigkeit gleich Null beginnend, in ein Schwerefeld eintritt und nun eine annähernd parabolische Bahn um den Zentralkörper beschreibt.

Nach Newton wäre in diesem Falle:

$$u^2 = \frac{2\mu}{r};$$

daher in der spezifischen Relativitätstheorie bei Vernachlässigung höherer Glieder:

$$\frac{u^2}{v_0^2} = \frac{2\mu}{r v_0^2}.$$

1) Die transversale Masse ist mit der Ruhemasse a. a. O. Gl. (8) identisch, weil sie sich auf dasselbe konstante r bezieht.

Folglich ist die transversale Masse gemäß dieser Theorie:

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_0^2}}} = m_0\left(1 + \frac{\mu}{r\,v_0^2}\right)$$

Die longitudinale:

$$m_l = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{u^2}{v_0^2}\right)^{3/2}} = m_0\left(1 + \frac{3\,\mu}{r\,v_0^2}\right) \tag{3}$$

Der Gedanke, daß bei radialer Bewegung Gleichung (3) in Frage kommen könnte, lag daher nahe. In der Tat ergibt sich diese Beziehung, wenn wir z. B. ein in radialer Richtung aus dem Unendlichen kommendes Lichtquant in seiner Bewegung im Schwerefelde verfolgen. Wir nehmen an, daß die longitudinale Masse von der Form sei:

$$m_l = m_0\left(1 + \frac{n\,\mu}{r\,v_0^2}\right),$$

wo n eine zu bestimmende positive oder negative Zahl bedeutet. Unter Berücksichtignng der Zeitdilatation erhält man:

$$E_r = m_0\left(1 + \frac{n\,\mu}{r\,v_0^2}\right)\left(1 - \frac{2\,\mu}{r\,v_0^2}\right)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)_0^2. \tag{4}$$

Offenbar nimmt E_r im unendlichen den Wert $m_0\,v_0^2$ an. Dann wird also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie

$$E_r + P = m_0\,v_0^2. \tag{4a}$$

Vernachlässigt man gegenüber dem großen Wert der rechten Seite kleinere Größen höherer Ordnung, so wird:

$$E_r - \frac{\mu\,m_0}{r} = m_0\,v_0^2. \tag{4b}$$

Es folgt aus (4) und (4b)

$$\left(1 + \frac{n\,\mu}{r\,v_0^2} - \frac{2\,\mu}{r\,v_0^2}\right)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)_0^2 = \frac{\mu}{r} + v_0^2. \tag{5}$$

Es läßt sich für die rechte Seite auch schreiben:

$$v_0^2\left(1 + \frac{\mu}{r\,v_0^2}\right) \tag{5a}$$

Beachten wir ferner, daß $\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)_0^2 = v_0^2$ ist, so ergibt sich:

$$1 + \frac{n\,\mu}{r\,v_0^2} - \frac{2\,\mu}{r\,v_0^2} = 1 + \frac{\mu}{r\,v_0^2}$$

$n = 3$ und der gesuchte Ausdruck:

$$m_l = m_0 \left(1 + \frac{3\mu}{r v_0^2}\right) \tag{6}$$

Der radiale Teil der Lichtenergie ist:

$$E_r = m_0 \left(1 + \frac{3\mu}{r v_0^2}\right)\left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)\left(\frac{d r}{d t}\right)_0^2 = m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right)\left(\frac{d r}{d t}\right)_0^2 \tag{7}$$

Daraus folgt dann der von mir a. a. O. gegebene Ausdruck für die gesamte Bewegungsenergie des Lichts:

$$E = m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right)\left[\left(\frac{d r}{d t}\right)_0^2 + r^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)\left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_0^2\right] . \tag{8}$$

Diese Energie ist bis auf eine Konstante, wie Gleichung (5a) zeigt, gleich dem negativen Wert der potentiellen Energie:

$$E = m_0 v_0^2 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right) . \tag{9}$$

Die Bewegungsenergie gewöhnlicher Materie ist die Hälfte des durch (8) bezeichneten Wertes.

Die Gleichung (8) steht auf den ersten Blick im Widerspruch mit dem früheren Resultat a. a. O., daß die Lichtenergie E_l durch das Gravitationsfeld verringert wird. Die Voraussetzungen aber waren ganz verschieden. Bringt man ein schwingendes System, etwa ein Wasserstoffatom von einer Stelle außerhalb des Gravitationsfeldes in das Feld unter maximaler Arbeitsleistung und läßt es da ruhen, so entnehme ich dem Atom einen entsprechenden Energiebetrag, der sich nun in einer veränderten kinetischen Energie der kreisenden Elektronen äußern muß. Bei einem aus dem Unendlichen kommenden Lichtstrahl kommt dagegen der Verlust an potentieller Energie der kinetischen Energie zugute. Die Lichtgeschwindigkeit nimmt in letzterem Falle zu. Die Gleichung

$$v^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)$$

ist aber deshalb, wie ich anfangs vermutet hatte, allgemeingültig. Eine klarere Übersicht über die hier in Frage kommenden Beziehungen bietet die Betrachtung des emittierenden Atoms an Stelle des Lichtquants.

II. Beziehungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Zunächst fragen wir uns, ob die eingeführte Unterscheidung der beiden Arten von Massen auch bei der allgemeinen Relativitätstheorie in Frage kommt. Diese Theorie kennt strenge genommen den Massenbegriff nicht, wenn er auch implizite in den Gleichungen enthalten ist. M. v. Laue[1]) bezeichnet als Masse schlechthin die von mir als transversale eingeführte, während K. Försterling[2]) aus der allgemeinen Relativitätstheorie als Masse schlechthin ableitet, was in meinen Entwicklungen als longitudinale erscheint. Er läßt diese Masse bei der Rotation eines Elektrons um den positiven Kern, wo also die Richtung der Bewegung senkrecht zur Kraftrichtung ist in Wirkung treten. Mir scheint, daß wenn die allgemeine Relativitätstheorie den ihr ursprünglich fremden Massenbegriff einführen will, sie zwischen den zwei Arten von Massen unterscheiden muß. Enge verknüpft mit der Massenformel ist durch die Energiebeziehungen die Gleichung für die Lichtgeschwindigkeit. Letztere folgt aus dem für die Masse angesetzten Werte. So findet von Laue a. a. O. Seite 179 für die Lichtgeschwindigkeit schlechthin $v^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)$. Aus dieser Beziehung hatte Einstein bekanntlich seine erste Berechnung der Lichtablenkung im Schwerefeld gewonnen, die er aber später zurückzog. Fragt man nach dem tieferen Grunde des Fehlers so scheint er mir darin zu bestehen, daß Einstein eine nur unter bestimmten Voraussetzungen gültige kinematische Beziehung anstatt einer dynamischen herangezogen hatte. Die Bewegungsrichtung einer im Schwerefeld befindlichen Masse ist nicht nur von den „Komponenten" der Geschwindigkeit, sondern auch von den „Componenten" der Masse abhängig. Die Bewegung geht so vor sich, als ob die Geschwindigkeitskomponenten mit verschiedenem Gewicht behaftet wären. Man kann also streng genommen von Komponenten bzw. von einer Zerlegung der Geschwindigkeit nicht mehr reden — wenigstens nicht in einem euklidischen Raum, wie er bei meinen Entwicklungen zugrunde gelegt wird.

---

1) v. Laue, Die Relativitätstheorie II. S. 186.

2) K. Försterling, Bohrsches Atom u. Relativitätstheorie, Zeitschrift f. Phys. III. 5. S. 406.

Zusammenfassung.

1. Aus der Quantentheorie im Verein mit der aus der Maxwellschen Thorie sich ergebenden Verknüpfung der Energie mit einer trägen und der aus den Versuchen Zeemans und Southerns folgenden Verknüpfung der Energie mit der schweren Masse folgt die Rotverschiebung und weiter die Formel der transversalen Masse.

2. Aus der Rotverschiebung ergibt sich eine Beziehung zwischen Zeitintervallen, die außerhalb und innerhalb eines Schwerefeldes gemessen werden und diese Beziehung führt vermittels des Energiesatzes zur Aufstellung der Formel für die longitudinale Masse und damit zur Aufstellung der Gleichung für die kinetische Energie und für die *Ablenkung eines Lichtstrahles im Schwerefeld.*

3. Durch eine Verallgemeinerung der aus dem Verhalten der Lichtstrahlen gezogenen Folgerungen und ihre Übertragung auf die gewöhnliche Materie wird die Bewegungsgleichung auf die freien Bewegungen aller Arten von Massen ausgedehnt und auch die *Perihelbewegung des Merkur abgeleitet.*

4. Von dem Standpunkt der gewonnenen Resultate aus ergibt sich auch für die allgemeine Relativitätstheorie die Notwendigkeit bei einer Einführung von Massen zwischen longitudinaler und transversaler Masse zu unterscheiden.

Bonn, den 20. Mai 1922.

(Eingegangen 22. Mai 1922.)