6. *Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes*

(Bemerkungen zu der Notiz von Herrn J. B. Johnson);

von W. Schottky.

Herr Johnson war so freundlich, mir seine kürzlich (Ann. d. Phys. **67**. S. 154—156. 1922) veröffentlichte „Bemerkung zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt" im Manuskript zuzusenden. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Berichtigung eines Rechenfehlers, der mir in meiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand (Ann. d. Phys. **57**. 541—567. 1918) unterlaufen war. Da diese Korrektur, für die ich Herrn Johnson sehr dankbar bin, sowohl für meine früheren theoretischen Schlußfolgerungen wie für die aus Herrn Hartmanns experimentellen Untersuchungen gezogenen Schlüsse von fundamentaler Bedeutung ist, möchte ich hier in einigen daran anknüpfenden Bemerkungen zu der veränderten Sachlage Stellung nehmen.

Zunächst noch ein paar Worte zu der mathematischen Seite des Problems. Die Berechnung des Integrals

$$S_1 = \int_0^\infty \frac{d\,x}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2} \tag{I}$$

durch Partialbruchzerlegung, wie sie Herr Johnson angibt, und wie sie auch meiner eigenen Rechnung zugrunde lag, ist offenbar nicht ganz leicht zu übersehen, und es werden nur die wenigsten Leser Zeit finden können, sich von der Richtigkeit des Resultats zu überzeugen. Es wird daher vielleicht nicht überflüssig sein, wenn ich noch eine andere ganz einfache Berechnungsweise dieses Integrals hierher setze, die mir mein Vater, F. Schottky, freundlichst mitteilte, ohne daß wir übrigens untersuchen konnten, ob es sich dabei um ein Novum, oder nicht vielmehr um eine den Spezialisten geläufige Umformung handelt.

Die Berechnung beruht darauf, daß man das Integral (I) mit einem anderen Integral

$$\text{(II)} \qquad S_2 = \int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}$$

kombiniert, welches aus (I) hervorgeht, indem man $z = 1/x$ als neue Variable einführt, das Integral (I) durch z ausdrückt, wobei wieder von 0 bis ∞ integriert werden muß, und schließlich für z wieder den Buchstaben x setzt. Das bestimmte Integral (I) ist also gleich dem bestimmten Integral (II), und die Summe beider Integrale hat den doppelten Wert jedes einzelnen Integrals. Es ist also auch

$$S_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}\,.$$

Hier läßt sich aber der Integrand durch weitere Umformung als Differential einer bekannten Funktion darstellen. Setzt man

$$x - \frac{1}{x} = r\,y, \quad \text{so wird} \quad \frac{x^2+1}{x^2} = r\,dy,$$

und der Nenner

$$= x^2\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + r^2\right] = r^2 x^2 (y^2+1),$$

also schließlich der Integrand gleich:

$$\frac{1}{r}\,\frac{d\,y}{y^2+1} = \frac{1}{r}\cdot d(\operatorname{arc\,tg} y)\,.$$

Dabei ist über t von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren, da $x - 1/x$ für $x = 0$ den Wert $-\infty$ und für $x = \infty$ den Wert $+\infty$ annimmt. Es wird also schließlich:

$$S_1 = \frac{1}{2r}\left[\operatorname{arc\,tg}\infty - \operatorname{arc\,tg}(-\infty)\right] = \frac{1}{2r}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2r}\,.$$

Damit ist die Berechnung Herrn Johnsons auf einem etwas einfacheren Wege bestätigt; statt $2\pi/r^2$ ist in unseren Rechnungen der Ausdruck $\pi/2r$ einzusetzen, d. h. es sind alle mit dem Integral (I) proportionalen Resultate mit $r/4$ zu multiplizieren.

Bei Durchsicht der Rechnung und Vergleich mit dem nach einer anderen Methode erhaltenen Ergebnis (vgl. die Bemerkung am Schluß) hat sich jedoch noch eine zweite Korrektur ergeben, bei der es sich um einen Zahlenfaktor 2 handelt.

Bei der Darstellung des Schwankungsstromes i durch eine Fouriersche Reihe (a. a. O. S. 555, 556) ist die Darstellung benutzt:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

wobei

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T j \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

Hier ist T die große Zeit, die die Grundperiode der Fourierreihe bestimmt; $j = i - i_0$ ist die Wechselstromkomponente des Schwankungsstromes. (Die zweite Gleichung würde für das konstante Glied der Entwicklung ($k = 0$) nicht gelten, doch interessieren die konstanten Glieder, die sich auf die Gleichstromkomponente von i beziehen, bei unserer Aufgabe nicht, da der Effekt immer unter Zwischenschaltung von Transformatoren oder Kapazitäten gemessen wird, die zwar bis zu genügend tiefen Frequenzen „bildgetreu" übertragen, jedoch die Gleichstromkomponente völlig annulieren.)

Mit dieser Einschränkung sind jedoch die beiden hingeschriebenen Gleichungen vollkommen richtig, wie man durch Einsetzen der zweiten in die erste und unter Benutzung geläufiger Beziehungen leicht beweisen kann. Andererseits ist unzweifelhaft ebenso richtig die Darstellung

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin(\omega_k t),$$

wobei

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T j \cdot \cos(\omega_k t)\, dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T j \cdot \sin(\omega_k t)\, dt.$$

Nun tritt folgendes Dilemma auf. C_k^2 ist, wie sich durch Vergleich dieser Darstellungen ergibt, $= A_k^2 + B_k^2$.

Statt

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2$$

zu berechnen (Gl. 7, S. 557) kann man also auch

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} A_k^2 + \sum_{k=k_1}^{k_2} B_k^2$$

berechnen. Wendet man nun genau dieselben Überlegungen, die auf der Zusammensetzung des Schwankungsstromes aus unabhängigen Elementarereignissen beruhen, und die früher (a. a. O.) bei der Berechnung von $\sum C_k^2$ benutzt sind, auf die Berechnung von $\sum A_k^2$ und $\sum B_k^2$ einzeln an, so erhält man für jede einzelne dieser Summen denselben Ausdruck (Gl. 12, S. 559) wie für $\sum C_k^2$, also im ganzen jetzt für die aus A_k^2 und B_k^2 zusammengesetzte $\sum C_k^2$ einen doppelt so großen Wert als früher.

Dieser doppelte Wert ist nun nach meiner Ansicht der richtige und zwar aus folgendem Grunde. Bei der Auswertung der (noch richtigen) Gl. (9) (a. a. O., S. 557) wird die Voraussetzung benutzt, daß in dem Ausdruck

$$j \varDelta t \cdot j' \varDelta t' \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) \cdot \sin(\omega_k t' + \varphi_k')$$

die gestrichenen und ungestrichenen Größen voneinander unabhängig sind für alle Fälle, in denen nicht $t = t'$ und demnach $j = j'$ ist. Das trifft deshalb nicht zu, weil wir in den Größen φ_k noch Parameter vor uns haben, die von dem gesamten zeitlichen Verlauf von j bzw. j' während der ganzen Fourierperiode T abhängen. Es sind also hier die angestellten Unabhängigkeitsbetrachtungen nicht zulässig, wohl aber in dem Fall der getrennten Entwicklung mit den Koeffizienten A_k und B_k, in denen solche abhängigen Parameter nicht mehr auftreten. Demnach wird jetzt (S. 559, unten):

$$\overline{C_k^2} = \frac{4}{T} e \, i_0 \qquad (e \text{ Elementarladung})$$

und ebenso ist die rechte Seite von Gl. (13) (S. 560) mit 2 zu multiplizieren. Daraus folgt dann, daß statt des Johnsonschen Korrektionsfaktors $r/4$, mit dem der früher berechnete Effekt zu multiplizieren wäre, der richtige Wert durch Multiplikation mit $r/2$ zu erhalten ist.

Nun zu den physikalischen Folgerungen. Unter den Voraussetzungen der grundlegenden Betrachtung — Schwingungskreis mit Selbstinduktion L, Widerstand R und Kapazität C in Spannungsschaltung an ein Entladungsrohr angelegt, das den „Schroteffekt“ zeigt[1]) — wird nunmehr die durch die Summe

1) A. a. O. S. 555.

der Partialenergien $E_k = \frac{1}{2} L a_k^2$ definierte Gesamtenergie des Schroteffektes

$$\text{(III)} \qquad \overline{E_S} = \frac{\omega_0}{2r} \cdot L e i_0 = \frac{\omega_0}{2\varrho} \cdot \omega_0 L e i_0$$

$\Big(\omega_0$ Eigenschwingung des Schwingungskreises, $\varrho = \frac{R}{L}$, $r = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{\varrho}{\omega_0}\Big)$ statt Gl. (14) auf S. 560 der zitierten Arbeit, welche lautet: $\left(E_S = \frac{\omega_0^2}{\varrho^2} \cdot \omega_0 L e i_0\right)$.

(Entsprechend sind dort die Gleichungen (14′) und (14″) zu berichtigen; in der letzteren Gleichung wäre überdies in der alten Formel r^3 statt r^2 im Nenner zu verbessern gewesen.)

Um diese Gleichungen anschaulich zu deuten, war nun früher zunächst versucht worden, den sinusförmigen Strom von der Frequenz ω_0 einzuführen, der, in der Entladungsröhre fließend, im Schwingungskreis das Hin- und Herpendeln einer elektrischen Energie bewirkt hätte, die gleich der durch den Schroteffekt hervorgerufenen Energie $\overline{E_S}$ ist. Ein solcher Strom, von der Effektivamplitude c_0, würde, wie sich durch Spezialisierung von Gl. (5), S. 555 a. a. O. auf die Frequenz ω_0 ergibt, im Schwingungskreis eine magnetische Scheitelenergie, und damit eine konstante Totalenergie

$$\text{(IV)} \qquad E_0 = c_0^2 \cdot \frac{L}{r^2} = c_0^2 \cdot \frac{L \omega_0^2}{\varrho^2}$$

hervorrufen. (Es ist hier noch zu bemerken, daß diese Gl. (5) für die *Effektiv*werte der Partialströme C_k, und nicht für ihre *Scheitel*werte, wie dort angegeben, richtig ist. Dies Versehen beschränkt sich aber auf Gl. (5); die folgende Gleichung (6), a. a. O. setzt die Gl. (5) in der richtigen Form ein.) — Soll nun c_0 so bestimmt werden, daß $E_0 = \overline{E_S}$ wird, so ergibt sich aus (III) und (IV):

$$\text{(V)} \qquad \left\{\begin{aligned} c_0^2 \frac{\omega_0^2}{\varrho^2} L &= \frac{\omega_0^2}{2\varrho} L e i_0, \\ c_0^2 &= \frac{\varrho e i_0}{2}, \\ c_0 &= \sqrt{\frac{\varrho e i_0}{2}} = \sqrt{\frac{i_0 e R}{2L}}, \end{aligned}\right.$$

die sich von der Johnsonschen Gleichung (2) nur durch den erwähnten weiteren Korrektionsfaktor 2 unterscheidet.

Nun war für die frühere entsprechende Gleichung:

$$\left(c_0 = \sqrt{\omega_0 e i_0} = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{e_0 i_0}{\tau}}\right)$$

eine plausible physikalische Deutung gegeben worden, indem festgestellt wurde, daß dieser Strom c_0, bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$ [1]), gleich der Wurzel aus dem mittleren Schwankungsquadrat der während aufeinander folgender Zeitintervalle τ übergehenden Gesamtströme ist. Die neue und unzweifelhaft richtige Berechnung führt jedoch auf einen anderen Ausdruck; wenn die „Abklingzeit" des Schwingungskreises

$$\vartheta = \frac{2}{\varrho}$$

eingeführt wird, folgt jetzt:

$$\text{(VI)} \qquad c_0 = \sqrt{\frac{e i_0}{\vartheta}} \, .$$

Dieser Ausdruck ist aber jetzt nicht so zu deuten, daß etwa statt des mittleren Stromschwankungsquadrates während der Zeitintervalle τ jetzt das Schwankungsquadrat während der Abklingzeiten ϑ für den auf den Schwingungskreis mit der Eigenschwingung τ wirkenden Schwankungsstrom in Betracht zu ziehen wäre, sondern es ist so (vgl. a. a. O. S. 551), als ob nur der τ/ϑte Teil des auf die Zeitintervalle τ bezogenen mittleren Stromschwankungsquadrates maßgebend wäre, eine Beziehung, für die ich keine einfache Erklärung sehe. Ich muß gestehen, daß die frühere, einleuchtende Formel mit daran schuld gewesen ist, wenn ich, den scheinbar entgegenstehenden experimentellen Ergebnissen zum Trotz, an der Richtigkeit meiner Rechnung zunächst nicht gezweifelt habe.

Von welchem Einfluß ist nun die an Gleichung (14) anzubringende Korrektur auf die berechnete Größenordnung des Effektes? Wenn es sich um Elektronen oder einwertige Ionen handelt, ist mit $e = \varepsilon = 1{,}56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb nach Gl. (III), falls wir noch

$$\frac{\omega_0}{\varrho} = \frac{\pi\,\vartheta}{\tau}$$

einsetzen,

1) Hier war damals (S. 561, oben) der Faktor $\sqrt{2}$ weggelassen worden.

$$\overline{E_S} = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon\,\frac{\vartheta}{\tau}\,\omega_0\,L\,i_0 = 2{,}46\cdot 10^{-19}\cdot\frac{\vartheta}{\tau}\,\omega_0\,L\,i_0\,,$$

d. h. $\tau/2\pi\vartheta$ mal so groß als S. 561, unten berechnet. Mit den in der Verstärkertechnik gebräuchlichen Werten $\vartheta/\tau = 3$ bis 30 ergibt das einen rund 20 bis 200 mal kleineren Effekt als früher berechnet; wenn also die Voraussetzungen unserer Rechnung zutreffen — und wir werden aus den korrigierten Resultaten sehen, daß das doch, wenigstens der Größenordnung nach, der Fall ist — so bewegt sich die Schrotenergie $\overline{E_S}$ in den maßgebenden Schwingungskreisen der Verstärkeranordnungen zwischen $5\cdot 10^{-22}$ und $5\cdot 10^{-18}$ technischen Energieeinheiten, während früher Größenordnungen bis 10^{-15} Energieeinheiten berechnet wurden. Diese Korrektur ist deshalb besonders wichtig, weil sie zeigt, daß in Verstärkeranordnungen (aber nicht in unserer später zu besprechenden Experimentalanordnung) die Schwingungsenergie des Schroteffektes in *dieselbe* Größenordnung fällt, wie die Energie der Wärmeschwingungen bei Zimmertemperatur, die nach S. 545 (a. a. O.) $4\cdot 10^{-21}$ technische Energieeinheiten (Joule) beträgt. Es besteht weiter die Möglichkeit, durch geeignete Wahl der Schwingungskreise die Energie der Schroteffektschwingung unter die der Wärmeschwingung herabzudrücken und so (NB. falls keine anderen Störungen auftreten!), die elektrischen Freiheitsgrade ganzer Schwingungskreise in Verstärkeranordnungen, allein auf Grund ihrer Wärmeenergie bei Zimmertemperatur beispielsweise in einem Telephon „abzuhören".

Es war dann, um die kleinste in einer Verstärkeranordnung noch meßbare Leistung zu bestimmen, die „Schrotleistung" L_S berechnet worden, die der Schrotenergie E_S entspricht. Die richtige Rechnung ergibt nunmehr statt Gl. (15), a. a. O. S. 562, die Gleichung:

$$\text{(VII)} \qquad \mathsf{L}_S = \frac{\pi\,e\,\omega_0\,L\,i_0}{\tau}\,.$$

Hier geht nun die Dämpfung des Schwingungskreises nicht mehr ein; die Störung der Verstärkerleistung durch den Schroteffekt und damit die kleinste aufnehmbare Signalenergie ist, im Gegensatz zu der Folgerung 1, S. 562 unten, von der Dämpfung des Eingangskreises *unabhängig*. Dagegen bleibt die Abhängigkeit von der Eigenfrequenz des Eingangskreises bestehen, allerdings nur in quadratischem Anwachsen, während früher ein Anwachsen mit der 3. Potenz berechnet war.

Setzt man wieder den Wert der Elementarladung ε für e ein, so folgt:

$$L_S = 4{,}92 \cdot 10^{-19} \frac{\omega_0 L i_0}{\tau} \text{ Watt.}$$

Die Grenzen dieser Schrotleistung in den Eingangskreisen der Verstärkeranordnungen[1]) sind ca. 10^{-18} und 10^{-14} Watt; die Grenze infolge der Wärmebewegung war ca. 10^{-17} Watt; Signalleistungen bis zu dieser Größenordnung lassen sich also bei im übrigen idealer Anordnung noch verstärken.

Nun zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt. Hier tritt, wenn man unserem gewissermaßen durch die historische Entwicklung gegebenen Gedankengang folgt, eine Schwierigkeit auf. Ich hatte in meiner ersten Arbeit nur den Idealfall behandelt, daß das Entladungsrohr einen unendlich großen inneren Widerstand besitzt, also nicht seinerseits auf die in ihm fließenden Schwankungsströme eine Rückwirkung ausüben kann. Diese Annahme war unter unseren experimentellen Bedingungen, wo wir, um starke Effekte zu bekommen, mit extrem hohen i_0-Werten arbeiteten, jedoch keineswegs erfüllt, es handelte sich also jetzt um die rechnerische Lösung eines allgemeineren Problems, das noch dadurch verwickelter wurde, daß der zur Messung der Spannungsschwankungen am Schwingungskreis dienende Verstärker in seinem Eingangskreis ebenfalls nicht einen praktisch unendlich hohen Widerstand besaß; außerdem war im Entladungsstromkreis des Rohres und am Verstärker noch eine Kapazität zu berücksichtigen. Herr Hartmann ist nun so vorgegangen, daß er den „Schwankungsstrom", der den Schwingungskreis von der Eigenschwingung τ anregt, ein für allemal durch den oben berechneten sinusförmigen Strom c_0 ersetzte und eine dazu

---

1) Wie in meiner zweiten Notiz (Ann. d. Phys. 20. S. 79—81. 1921) hervorgehoben, kommt bei Röhren, die unterhalb der Ionisierungsspannung der Restgase arbeiten, statt des Eingangskreises der Schwingungskreis hinter der ersten Anode in Frage.

gehörige „elektromotorische Kraft der Schwankung" aus dem inneren Widerstand des Rohres bestimmte, worauf alle weiteren Rechnungen nach bekanntem Verfahren durchgeführt werden konnten. Diese Methode, deren Berechtigung durch genauere Überlegungen gestützt wird, gründet sich aber doch darauf, daß außer der Eigenschwingung τ des Schwingungskreises, die die Periode dieses Ersatzstromes c_0 bestimmt, keine weiteren Konstanten der verschiedenen Stromkreise in den Wert von c_0 eingehen; und wenn jetzt, nach Gl. (VI) der „Ersatzstrom" c_0 von der Abklingzeit ϑ des Schwingungskreises abhängig ist (statt, wie früher, nur von der Periode τ), so läßt sich nicht ohne weiteres übersehen, ob und wie in dieser Abklingzeit der endliche Rohrwiderstand und der parallel gelegte Widerstand der Verstärkermeßanordnung zu berücksichtigen ist. Sicher würde man durch sorgfältige Überlegungen auch auf diesem unserem bisherigen Wege zu dem weiter unten anzugebenden, sehr einfachen Resultat kommen; zweckmäßiger ist es jedoch wohl jetzt, schon bei der Berechnung der Partialenergien (a. a. O. S. 555) den verallgemeinerten Stromkreis einzuführen.

Die nachstehende Fig. 1 stellt schematisch die Verallgemeinerung des dort behandelten Schwingungskreises (a. a. O. Fig. 6, S. 554) dar, die der Versuchsanordnung von Herrn Hartmann[1]), Fig. 8, zugrunde liegt. L, R sind wieder Selbstinduktion und Widerstand (einschließlich Verlustwiderstand) der verwen-

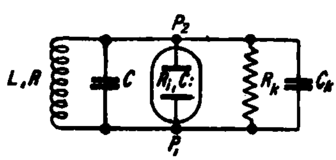

Fig. 1.

deten Spule, C ist die Kapazität des Schwingungskreises, R_i ist der Ohmsche Widerstand des Glühkathodenentladungsrohres, C_i seine (nach den Untersuchungen Herrn Hartmanns durch Wärmeträgheitseffekte der Elektronenemission mitbedingte)

1) C. A. Hartmann, Ann. d. Phys. 65. S. 65. 1921.

scheinbare Kapazität, R_k und C_k[1]) endlich der Ohmsche Widerstand und die Kapazität des Eingangskreises der benutzten Verstärkeranordnung, die ja mit einer *WC*-Kopplung im Eingangskreise benutzt wurde.

Es handelt sich nun zunächst wieder um die Aufgabe, die Anregung des Schwingungskreises L, R, C durch einen der sinusförmigen Partialströme beliebiger Frequenz zu untersuchen, in die wir, gemäß unserer Fourierzerlegung, den Wechselstrombestandteil des korpuskularen Entladungsstromes aufgeteilt haben. Der frühere Ansatz (S. 555) ging davon aus, daß die Momentanspannungen in beiden Zweigen des Schwingungskreises L, R, C gleich sein müssen.

Unter den neuen, verallgemeinerten Verhältnissen gehen wir besser von einer *Strom*bilanz aus. Bezeichnen wir den Momentanwert des Partialschwankungsstromes wieder mit i, so können wir für die beiden Elektroden der Rohre, die Punkte P_1 und P_2, die Bilanz aufstellen, daß dieser Schwankungsstrom gleich sein muß der Summe der nach außen abfließenden Ströme, vermindert um den „Rückwirkungsstrom", der infolge der Spannungsschwankungen zwischen P_1 und P_2 in der Röhre selbst auftritt. Durch geeignete Festlegung der Stromrichtungen — indem wir alle Ströme in Richtung von P_1 nach P_2 positiv rechnen — wird der Schwankungsstrom entgegengesetzt gleich der *Summe aller* unter der Wirkung der Spannungsschwankungen zwischen P_1 und P_2 in den verschiedenen Zweigen fließenden Ströme, einschließlich des Rückwirkungsstromes. Man kann also, wie man sofort sieht, die ganze Anordnung Fig. 1 als einen einheitlichen Schwingungskreis mit verschiedenen, parallel geschalteten Kapazitäten C, C_i und C_k, einem Serienwiderstand R und den Parallelwiderständen R_i und R_k auffassen, der von außen an den Punkten P_1 und P_2 (oder an anderen, mit diesen kurzgeschlossenen Punkten) durch einen konstanten äußeren Wechselstrom zu erzwungenen Schwingungen beliebiger Frequenz angeregt wird.

1) Diese, von Herrn Hartmann benutzte Bezeichnung ist nicht mit dem partiellen Schwankungsstrom C_k meiner ersten Arbeit zu verwechseln!

Bezeichnen wir den durch L und R fließenden Strom mit J, während wir für die in allen anderen Zweigen fließenden Momentanströme gleich ihre Abhängigkeit von dem Potentialunterschied $V_{P_1} - V_{P_2} = \Phi$ einführen, so erhalten wir folgende Bilanz:

$$-i = J + \frac{\Phi}{R_i} + \frac{\Phi}{R_k} - \frac{d\Phi}{dt}(C + C_i + C_k),$$

wobei das letzte Glied, nach bekannten Formeln, den zur Aufladung der Kapazitäten nötigen Strom darstellt.

Setzt man hier noch

$$C + C_i + C_k = C_1, \quad \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\mathsf{P}}$$

(so daß also P der Kombinationswiderstand von Rohr und Verstärker ist), so vereinfacht sich (VII) zu:

$$\text{(VII')} \qquad J + \frac{\Phi}{\mathsf{P}} - C_1 \frac{d\Phi}{dt} = -i.$$

Jetzt erst führen wir die Gleichung

$$\Phi = -L\frac{dJ}{dt} + RJ$$

und die differenzierte Gleichung

$$\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{d^2J}{dt}$$

in (VII') ein und erhalten:

$$J\left(1 + \frac{R}{\mathsf{P}}\right) - \left(C_1 R + \frac{L}{\mathsf{P}}\right)\frac{dJ}{dt} + C_1 L \frac{d^2J}{dt^2} = -i$$

oder

$$\frac{d^2J}{dt^2} + \frac{1 + \frac{R}{\mathsf{P}}}{C_1 L} J - \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{C_1 \mathsf{P}}\right)\frac{dJ}{dt} = -\frac{i}{C_1 L}.$$

Das ist, bis auf das negative Vorzeichen von i (das durch die einheitliche Festsetzung der Stromrichtung gegenüber der früheren andersartigen Definition bedingt ist), die der zweiten Gleichung S. 555 entsprechende Gleichung, die die Form einer reinen Schwingungsgleichung hat. Diese Gleichung vereinfacht sich noch weiter, wenn wir schon jetzt den Bruch R/P, der bei der Meßanordnung etwa den Wert 10^{-5} hat, gegen 1 vernachlässigen. Bezeichnen wir dann, entsprechend wie früher, den Ausdruck $1/C_1 L$ mit ω_1^2 (Eigenschwingung des Kreises unter Berücksichtigung der Zusatzkapazitäten) und den Ausdruck

$$\frac{R}{L} + \frac{1}{C_1 L} \quad \text{mit} \quad \varrho_1$$

(Dämpfungskonstante unter Berücksichtigung der äußeren Nebenschlußwiderstände), so erhalten wir formal ganz dieselbe Gleichung wie früher:

$$\frac{d^2 J}{d t^2} + \omega_1^2 J - \varrho_1 \frac{d J}{d t} = - \omega_1^2 i,$$

so daß die weitere Rechnung genau in derselben Form verläuft, und nur statt der Größe r ebenfalls die Größe

$$\text{(VIII)} \qquad r_1 = \frac{\varrho_1}{\omega_1} = \frac{R}{\omega_1 L} + \frac{1}{\omega_1 C P}$$

auftritt.

Die mittlere Schrotenergie des Schwingungskreises $\overline{E_S} = \sum E_k$ wird also schließlich, entsprechend Gl. (III):

$$\text{(IX)} \qquad \overline{E_S} = \frac{\omega_1}{2 r_1} \cdot \omega_1 L e i_0 .$$

Von hier gelangt man nun sehr leicht zu der der Hartmannschen Formel (10) (S. 69) entsprechenden Formel, die den Zusammenhang zwischen der elektrischen Elementarladung und dem Effektivwert der Spannungsschwankung V' von der Frequenz ω_1 an dem Ende des Entladungsrohres darstellt.

Nimmt man nämlich, wie das bei schwachgedämpften Schwingungen zulässig ist, an, daß der Verlauf der elektrischen und magnetischen Vorgänge im Schwingungskreis mit hinreichender Annäherung als rein sinusförmig (und zwar hier von der Periode ω_1) betrachtet werden kann, so besteht zwischen dem Scheitelwert der magnetischen Energie in der Selbstinduktion L, aus dem wir die Energie $\overline{E_S}$ berechnet hatten, und der Effektivspannung V' an den Enden der Selbstinduktionsspule die Beziehung:

$$\text{(X)} \qquad \overline{E_S} = V'^2 \cdot \frac{L}{\omega_1^2 L^2 + R^2},$$

die man leicht verifiziert, indem man sowohl $\overline{E_S}$ wie V' durch den in der Spule fließenden Wechselstrom (der ebenfalls periodisch von der Frequenz ω_1 angenommen werden kann) ausdrückt.[1])

[1]) Zur Erläuterung der Beziehung (X) zwischen der berechneten Gesamtenergie E_S des Schroteffektes und dem Quadrat der gemessenen Spannungsschwankung sind noch einige Bemerkungen nötig, da hier ein Widerspruch vorhanden zu sein scheint. Es scheint zunächst, als ob bei dem Abhören mit dem Telephon und Vergleich der Intensität mit der eines reinen Tones nicht die Gesamtenergie, die wir berechneten, gemessen würde, sondern nur eine Partialenergie, eben die, die der reinen Schwingung entspricht. Aber selbst, wenn man davon absieht und annimmt, daß wirklich Mittelwerte der Spannungsschwankungen (etwa durch ein Hitzdrahtinstrument) gemessen würden, so ist nicht ohne weiteres einzusehen, wie dieser Mittelwert mit dem der partiellen Stromenergien in der Spule, $E_k = \sum \frac{1}{2} L a_k^2$ zusammenhängen soll, die ja für die Frequenz ω_k und die ihr entsprechende Partialspannung V_k' den Wert haben:

$$E_k = V_k'^2 \cdot \frac{L}{\omega_k^2 L^2 + R^2} .$$

Denn *wenn* außer der Spannungsschwankung selbst noch etwas anderes als die im Endapparat (hinter dem Verstärker) gemessene mittlere Energie in Frage kommt, so ist es nicht eine Eigenschaft der Schwingungsspule (L und R), sondern höchstens die (frequenzabhängige) Impedanz und Verstärkung der *Verstärkerschaltung*, sowie die Frequenzabhängigkeit der Eigenschaften des *Meßapparates*.

Das ist in der Tat richtig, macht aber für das Resultat verschwindend wenig aus. Denn wenn man wirklich den Mittelwert von $V_k'^2$ bildet, so findet man, daß bis auf Faktoren, die sich auf die Eigenschwingung ω_1 beziehen, zwar jetzt statt des Integrals S_1 das Integral:

$$\int\limits_0^\infty \frac{(x^2 + r^2)\, d x}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2}$$

auftritt. Das ist aber wegen der am Anfang hervorgehobenen Gleichheit der Integrale (S_1) und (S_2) einfach gleich $(1 + r^2) \cdot \pi / 2 r$.

Solange nun $r = R/\omega_0 L$ (wir brauchen hier den idealisierten und den verallgemeinerten Fall nicht auseinanderzuhalten) klein gegen 1 ist, wie wir immer angenommen haben, ist dieses Integral einfach wieder $= \pi/2r$ zu setzen, die Berechnung von $\sum V_k'^2$ führt also zu keinem anderen Wert wie die von $\sum E_k$. Mit noch größerem Recht kann man aber dann die noch viel geringere Frequenzabhängigkeit der Verstärkerimpedanz und Verstärkung in dem in Frage kommenden Gebiet vernachlässigen. Und was schließlich die harmonische Auslese einer reinen Frequenz durch das Ohr betrifft, so kommt es hier offenbar nur darauf an, daß das Ohr nicht schärfer „auswählt“ als der Schwingungskreis selbst, was bei den von uns benutzten schwachen Dämpfungen wohl gewährleistet ist.

Aus (IX) und (X) folgt:

$$V'^2 \cdot \frac{L}{\omega_1{}^2 L^2 + R^2} = \frac{\omega_1}{2 r_1} \cdot \omega_1 L e i_0 \qquad \text{oder}$$

$$\text{(XI)} \qquad V'^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\omega_1 L}\right)^2} = \frac{\omega_1{}^2 L^2}{2 r_1{}^2} \cdot \omega_1 r_1 \cdot e i_0 \,.\text{[1]}$$

Hier ist $R/\omega_1 L$ von der Größenordnung $^1/_{100}$ (Hartmann, S. 63, Tab. 6), d. h. $(R/\omega_1 L)^2$ ist von der Größenordnung 10^{-4}, also neben 1 vollständig zu vernachlässigen. Wir erhalten also statt (XI):

$$\text{(XI')} \qquad V'^2 = \frac{\omega_1{}^2 L^2}{2 r_1{}^2} \cdot \omega_1 r_1 e i_0 \,.$$

Hier gehen wir nun auf die Definitionsgleichung (VII) für r_1 zurück. Es ist

$$r_1 = \frac{R}{\omega_1 L} + \frac{1}{\omega_1 C_1 \mathsf{P}} = \omega_1 L \left(\frac{R}{\omega_1{}^2 L} + \frac{1}{\mathsf{P}}\right),$$

da $\omega_1{}^2 L C_1$, das im zweiten Nenner auftritt, definitionsgemäß $= 1$ ist. Nun sieht man aber leicht, daß das Klammerglied, das sich in der Form

$$\frac{1}{\frac{\omega_1{}^2 L^2}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{\mathsf{P}}}$$

schreiben läßt, nichts anderes ist als der reziproke Wert des von Hartmann mit Z' bezeichneten absoluten Betrages des Kombinationswiderstandes unserer ganzen Schwingungsanordnung Fig. 1 bei Resonanz; und zwar gilt dies ohne jede Vernachlässigung.

Also:

$$\text{(XII)} \qquad r_1 = \frac{\omega_1 L}{Z'},$$

oder

$$\text{(XII')} \qquad \frac{\omega_1 L}{r_1} = Z'$$

(XI') erhält also schließlich die Form:

$$\text{(XIII)} \qquad V'^2 = \frac{1}{2} Z'^2 \frac{\omega_1 L}{Z'} \cdot \omega_1 e i_0 \,,$$

woraus:

$$\text{(XIV)} \qquad e = \frac{V'^2}{Z'^2 \omega_1 i_0} \cdot \frac{2 Z'}{\omega_1 L} \,.$$

[1] Die Zerlegung der rechten Werte in Faktoren mit $1/r_1{}^2$ und r_1 erfolgt mit Rücksicht auf die beabsichtigte Herausschälung des Korrektionsfaktors.

Vergleichen wir das mit der Hartmannschen Formel (10), S. 69

$$\varepsilon = \frac{J'^2}{i_0\,\omega_0\,Z'^2},$$

so sieht man, daß beide Formeln identisch sind bis auf den Faktor $2Z'/\omega_1 L$ oder, nach (XII) $2/r_1$, da unsere Größe ω_1 mit der Frequenz ω_0 der Hartmannschen Formel identisch ist. (Die Eigenschwingung ω_0 ist dort jedesmal mit Hilfe der Stimmgabel an der fertigen Schaltung, also unter Zuschaltung der Kapazitäten C_i und C_k bestimmt.)

Die Berücksichtigung der komplizierteren Stromkreise hat mit den begangenen Vernachlässigungen

$$\left[\left(\frac{R}{\omega_1 L}\right)^2 \ll 1, \qquad \frac{R}{\mathsf{P}} \ll 1\right],$$

also zu einem sehr einfachen Resultat geführt: der Korrektionsfaktor $2/r$, der bei dem idealen Stromkreis anzubringen gewesen wäre, wird bei dem Stromkreis mit Rohrrückwirkung und Verstärkerimpedanz einfach zu dem entsprechenden Faktor $2/r_1$, wobei r_1 das Dämpfungsverhältnis für diesen komplizierteren Kreis bedeutet.

Damit wird nun auch die Korrektur unserer früheren Resultate sehr einfach. Die Werte von Z' und L sind für alle in Frage kommenden Werte von ω aus den Tabellen 6 (S. 63) und 8 (S. 69) von Herrn Hartmann zu entnehmen (ω_1 gleich dem Hartmannschen ω_0), und man erhält so die in der 1. und 4. Spalte der umstehenden Tabelle angegebenen Werte. Wie man sieht, ist $Z'/\omega_1 L$ von der Größenordnung 100, $2Z'/\omega_1 L$ also etwa 200, und die früheren zu kleinen Werte von ε kommen damit in die richtige Größenordnung. Die genauen Resultate sind aus den Spalten 3 und 6 zu ersehen.

Graphisch sind die neuen Resultate in Fig. 2 dargestellt, die der Fig. 9 der Hartmannschen Arbeit entspricht, und die die berechneten Werte von ε (in Einheiten von 10^{-19} Coulomb) als Funktion der Eigenschwingung ω_1 des Schwingungskreises darstellt. Der Standardwert der elektrischen Elementarladung, $\varepsilon = 1{,}56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, ist dabei als gestrichelte gerade Linie eingetragen, und man sieht ohne weiteres, daß ein Wert von dieser Größenordnung für den von uns beobachteten Effekt

Tabelle.

ω_1	1	2	3	4	5	6
	$i_0 = 2\ MA$			$i_0 = 20\ MA$		
	$\frac{Z'}{\omega_1 L}$	$\varepsilon_{\text{falsch}}$	$\varepsilon_{\text{richtig}}$	$\frac{Z'}{\omega_1 L}$	$\varepsilon_{\text{falsch}}$	$\varepsilon_{\text{richtig}}$
1500	69,5	$33 \cdot 10^{-22}$	$4{,}6 \cdot 10^{-19}$	63,1	$27 \cdot 10^{-22}$	$3{,}4 \cdot 10^{-19}$
2400	110	18,5	4,1	116	16,7	2,9
3000	152	7,3	2,1	109	6,7	2,2
3200	156	5,1	1,6	108	4,9	1,1
3500	159	3,3	1,0	101	3,3	0,7
4000	157	3,6	1,1	94,9	3,2	0,6
4500	152	4,6	1,4	89,1	2,8	0,5
5000	148	6,7	2,0	85,5	5,8	1,0
6000	142	5,7	1,6	76,9	4,4	0,7
7000	134	3,2	0,9	68,4	3,2	0,44
8170	123	1,8	0,45	60,6	1,1	0,13
9400	111	2,2	0,5	54,0	1,4	0,15
10000	108	3,2	0,7	50,8	1,7	0,17
10700	102	2,1	0,43	48,3	1,0	0,10
12000	92,5	2,7	0,5	43,4	2,1	0,18
14000	79,8	3,7	0,6	40,6	1,3	0,09
15000	74,4	6,7	1,0	35,3	4,5	0,32

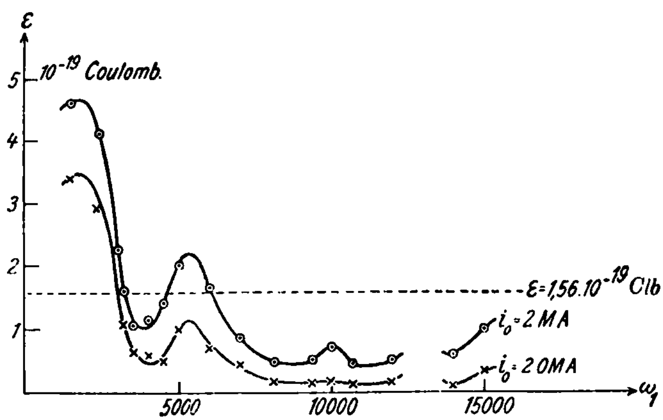

Fig. 2.

eine ausgezeichnete Bedeutung haben muß, da er ungefähr den Mittelwert aller Messungen darstellt. Diese nunmehr richtige Größenanordnung der aus dem Effekt berechneten Werte für zufällig zu halten, wäre wohl ein bedeutend kühnerer Schritt als unsere frühere — auf dem falsch berechneten Resultat aufgebaute — Annahme, daß die falsche Größenanordnung durch gewisse Unzulänglichkeiten der Voraussetzungen vorgetäuscht sei, denn die Gründe, weshalb ein physikalisches Resultat sich anders ergeben kann, als man erwartet hat, sind doch überwiegend zahlreich — besonders wenn man die Möglichkeit von Rechenfehlern noch einschließt — gegenüber der Wahrscheinlichkeit, daß das *wirkliche Eintreffen* eines erwarteten Resultats ganz andere Gründe hat, als die erwarteten. Wir würden also in unseren Versuchen nunmehr — wenn es überhaupt zurzeit noch nötig ist, hierfür Beweise zu sammeln — einen weiteren Beleg für das Auftreten einer elektrischen Elementarladung von der ungefähren Größe $1{,}56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb bei den thermischen Entladungsvorgängen im Vakuum erblicken.

Was ich weiter zur Diskussion der feineren Eigenschaften des beobachteten Effektes zu sagen habe, möchte ich jedoch, ebenso wie die früheren bei Herrn Hartmann (S. 74—77) wiedergegebenen Überlegungen, nur als Vermutung äußern, mit allen durch die Ungenauigkeit der Messungen und die Kompliziertheit der Erscheinungen bedingten Vorbehalten. Ich möchte zunächst bemerken, daß ich mich auf Grund der in Fig. 2 wiedergegebenen Resultate nicht ohne weiteres der Meinung von Herrn Johnson anschließen kann, daß wir es hier mit einer Entladung zu tun haben, bei denen ganze Gruppen von Elektronen auf einmal ausgesandt werden. Wenn dies ausschließlich und regelmäßig mit der gleichen Zahl von Elektronen in jeder Gruppe der Fall wäre, so müßte sich das Resultat der Messungen in Fig. 2 durch eine zum Standardwert parallele Gerade darstellen lassen, deren Abstand von der Abszisse ein ganzes Vielfaches des Standardwertes ist. Aber auch wenn ungleiche, aufeinander nicht rückwirkende Gruppen von Elektronen ausgesandt würden, wäre, wie die genauere Überlegung zeigt, eine solche Gerade zu erwarten, deren Höhe sich aus der Wahrscheinlichkeit des Auftretens der verschiedenen Gruppen berechnen ließe; keinesfalls wäre jedoch eine Frequenzabhängigkeit des berechneten Elementarquantums dadurch zu erklären.

Um es kurz zu sagen: es scheint mir, daß unsere Annahme einer thermischen Nachwirkung, einer Beeinflussung der Elektronenemission an irgendeiner Stelle durch die dort kurz vorher ausgetretenen Elektronen, durch die Korrektur, welche unsere Meßresultate durch Herrn Johnson erfahren haben, nicht widerlegt ist, sondern fast noch etwas an Wahrscheinlichkeit gewonnen hat. Denn wenn aus den früher angestellten Überlegungen (S. 76, Mitte) eine „günstige Beeinflussung" der Schwankungen in den Fällen gefolgert wurde, wo das „sterile Gebiet" nach $^1/_2$, $^3/_2$ Perioden usw. sein Maximum erreicht hat, so stand dem bisher die auf diese Weise nicht zu deutende Tatsache gegenüber, daß der ganze Effekt für alle Frequenzen etwa 300 mal schwächer war als erwartet, so daß stets nur eine „ungünstige Beeinflussung" zu konstatieren war. Nach dem korrigierten Ergebnis Fig. 2 schwankt jedoch der berechnete Wert der Elementarladung um den Standardwert herum; die Maxima, deren Amplitude übrigens mit zunehmender Frequenz abnimmt, liegen z. T. wesentlich *über* dem Standardwert. Ferner ist jetzt ein weiteres Maximum, bei ca. $\omega_1 = 1800$, wenn auch sehr unbestimmt, zum Vorschein gekommen. Soviel man aus den Kurven, in denen jetzt die Wellenlinien genau den Messungen entsprechend, und nicht, wie früher, ausgleichend durchgezogen sind, entnehmen kann, liegen die Maxima jetzt etwa bei folgenden Frequenzen:

1800 5300 10000 ? 15500.

Diese Schwingungszahlen verhalten sich wie:

1 : 2,9 : 5,6 : ? : 8,6,

also innerhalb der Meßgrenzen wie:

1 : 3 : 5 : ? : 9.

Die Übereinstimmung mit der thermischen Rückwirkungstheorie, die einen „Begünstigungseffekt" erwarten läßt, wenn die „sterile Fläche" nach $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$, $^7/_2$, $^9/_2$ Perioden ihren Maximalwert erreicht hat, also, bei gegebener Entstehungszeit der maximalen sterilen Fläche, bei Frequenzen, die sich wie 1 : 3 : 5 : 7 : 9 usw. verhalten, kann natürlich eine zufällige sein, doch habe ich diese Beziehungen immerhin für der Erwähnung wert gehalten. Wenn diese Überlegungen eine reelle Basis haben, müßte das Maximum bei 1800 übrigens das erste überhaupt auftretende sein, und die Kurve dürfte, ehe sie sich bei kleinen Frequenzen aperiodisch dem Standardwert nähert, nur noch *ein* Minimum vorher besitzen. Die natürliche Extrapolation der Kurve scheint dem jedenfalls nicht zu widersprechen.

Weshalb von dem dritten Maximum an die scheinbaren ε-Werte unter dem Standardwert liegen, weshalb bei höherem Sättigungsstrom die „Begünstigungseffekte" anscheinend mehr unterdrückt und nur die schwankungs*verkleinernden* Wirkungen stärker werden, und weshalb bei $\omega_1 = 15000$ wieder eine so ausgesprochen ansteigende Tendenz des scheinbaren ε-Wertes auftritt, muß überhaupt noch völlig offen bleiben. Beachtenswert erscheint mir jedoch auf alle Fälle die Tatsache, daß der Unterschied zwischen den Werten für $i_0 = 2\,MA$ und $20\,MA$ durch die Korrektur von Herrn Johnson nicht herabgedrückt worden ist, wie ich zunächst vermutet hatte, sondern vergrößert; es scheint mir das jedenfalls auch *zugunsten* einer thermischen Beeinflussung zu sprechen.

Herr Johnson hat, außer dem Rechenfehler, noch die „bedenkliche Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung" in meiner Ableitung der Schwingungsenergie des Schroteffektes beanstandet. Vielleicht beseitigt die zweite hier angebrachte Korrektur (Ersatz der „kohärenten" Fourierdarstellung durch die gewöhnliche, mit zwei „inkohärenten" Reihen) einige weitere Bedenken in dieser Richtung; freilich bleibt die Ableitung dabei immer noch schwierig und unübersichtlich. Daß der Gedankengang jedoch noch weitere *tatsächliche* Fehlschlüsse enthält, glaube ich nicht, und zwar habe ich da ein Argument, das ich nicht unterdrücken kann, obwohl die Situation dadurch für uns nicht gerade verbessert wird. Schon im Jahre 1920 habe ich von Herrn Ornstein in Utrecht eine Zuschrift erhalten, in der er eine Berechnung des quadratischen Mittelwertes der Stromstärke J im Schwingungskreis auf Grund einer ganz anderen, von ihm schon in anderen Fällen benutzten Methode durchgeführt hat, welche zu einem von dem meinigen abweichenden Ergebnis führte. Wie sich jetzt feststellen ließ, entspricht die Ornsteinsche Rechnung, über die damals wegen

Zeitmangel keine völlige Klärung erzielt werden konnte, genau dem nach meiner Methode berechneten, nunmehr korrigierten Resultat, so daß an der tatsächlichen Berechtigung meiner Wahrscheinlichkeitsbetrachtung wohl kein Zweifel besteht. Bedauerlich ist nur, daß wir nicht schon früher versucht haben, die Resultate Herrn Hartmanns nach der Ornsteinschen Formel, die, wie sich jetzt herausgestellt hat, die richtige war, auszuwerten.

Siemensstadt, den 23. März 1922.

(Eingegangen 30. März 1922.)

Zusatz bei der Korrektur. 2. 6. 22. Wie ich einer freundlichen Zuschrift Herrn Johnsons, nach Übersendung des Manuskripts dieser Arbeit entnehme, hält er nach Einführung des zweiten Korrektionsfaktors 2, der die „zu großen" ε-Werte reduziert, seine Hypothese der „Gruppenemission" von Elektronen nicht mehr für unbedingt notwendig. Die Annahme eines *Abkühlungseffektes durch einzelne Elektronen* sei zwar merkwürdig, aber doch nicht merkwürdiger als die ursprüngliche Hypothese des Schroteffektes selbst, daß nämlich durch die Emission einzelner Elektronen abhörbare Diskontinuitäten im Stromübergang auftreten könnten. — Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Bedenken Herrn Johnsons richteten sich, wie er mir mitteilt, hauptsächlich gegen die Anwendung der Fourierzerlegung auf eine vollständig chaotische Reihe von Ereignissen; das Ergebnis scheine nun doch schließlich die Methode zu rechtfertigen.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig