1922. № 9.
ANNALEN DER PHYSIK.
VIERTE FOLGE. BAND 68

1. *Gravitation und Quantentheorie;*

von A. H. Bucherer.

Die Einsteinsche Theorie nimmt erkenntnistheoretisch eine eigenartige Stellung ein. Während sie die fundamentalen Begriffe der Physik erweitert und ergänzt und zur Entdeckung neuer Gesetzmäßigkeiten führt, knüpft sie nicht an die konkreten Bilder der Erscheinungswelt an und bringt keine Aufklärung über das eigentliche Wesen der Gravitation; sie verknüpft die Schwerkraft nicht mit anderen Eigenschaftsgrößen der Materie.

Vielen Physikern hat sich die Überzeugung aufgedrängt, daß der abstrakten Einsteinschen Theorie ein physikalisches Gegenstück entsprechen müsse, mit anderen Worten, daß sich die Einsteinschen Gravitationseffekte aus einer sinnfälligen Hypothese ableiten lassen. Die dahingehenden Bestrebungen sind bekannt. Ich verweise besonders auf die gedankenreiche, bedeutende Arbeit P. Lenards, „Äther und Uräther“.

I.

Ich glaube in der Quantenhypothese eine Grundlage zur Erklärung dieser Effekte gefunden zu haben. Zu den weiteren Voraussetzungen, auf die ich mich stütze, gehört das Resultat der Maxwellschen Theorie, daß der Energie E eine träge Masse zuzuordnen ist:

$$m = \frac{E}{v^2}, \tag{1}$$

wo v die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Schließlich ordne ich der Energie eine schwere Masse zu auf Grund der Versuche Zeemans und Southerns.

Wir betrachten zunächst folgenden Vorgang. Wir bringen ein Lichtquant von der Frequenz n_0 unter maximaler Arbeitsleistung aus dem Unendlichen auf die Entfernung r von einem Zentralkörper. Hierbei wird eine Arbeit $\mu m / r$ gewonnen wenn m die Masse des Lichtquants bedeutet. Da die Energie des Lichtquants um denselben Betrag abnimmt, und hierdurch seine Frequenz von n_0 auf n sinkt, so ergibt sich die Beziehung:

$$(2)\qquad \begin{cases} h\,n = h\,n_0 - \dfrac{\mu\,m}{r} \\[2ex] h\,n = h\,n_0\left(1 - \dfrac{\mu\,m}{r\,h\,n_0}\right). \end{cases}$$

Gemäß Gleichung (1) können wir für die Energie $h\,n_0$ des Lichtquants $m_0\,v^2$ setzen, wobei m_0 den Wert der Masse außerhalb des Gravitationsfeldes bedeutet. Es ergibt sich:

$$(3)\qquad n = n_0\left(1 - \frac{\mu}{r\,v_0^2}\right).$$

Findet z. B. die Schwingung auf der Oberfläche der Sonne statt, wo $r = R$, so wird:

$$(4)\qquad -\frac{\Delta n}{n} = \frac{\mu}{R\,v_0^2}$$

oder, wenn λ die Wellenlänge bezeichnet:

$$(5)\qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\mu}{R\,v_0^2}.$$

Es tritt also eine Verschiebung der Linien des Sonnenspektrums auf gegenüber den außerhalb des Gravitationsfeldes gemessenen Linien. Da wegen der Größe des Abstandes der Erde von der Sonne die Verhältnisse so liegen, als ob die Beobachtung im Unendlichen stattfände, so wird der Erdbeobachter eine Verschiebung nach Gleichung (5) messen. Einstein findet denselben Wert für die Rotverschiebung. Auch haben K. Försterling und Mohorovičić schon unter Benutzung der Quantentheorie diese Gleichung abgeleitet, wie ich nachträglich gefunden habe.

Da die Lichtquanten neutrale Körper darstellen, so liegt es nahe, eine solche Einwirkung eines Schwerefeldes auf beliebige frei schwingende oder frei rotierende Körper auszudehnen[1]), *gleichgültig, unter welcher Kraftwirkung sie sich bewegen.*

---

1) Um die Planetenbewegung einzuschließen, kennzeichne der Index 0 die Werte, die bei Gültigkeit der Formeln der klassischen Mechanik bestehen würden.

Betrachtet man die Vorgänge der Emission und der Absorption, bei denen Teile der Atommassen in Strahlungsmassen und letztere in Atommassen übergehen, so wäre es nicht folgerichtig, bei diesen Übergängen eine Wechselwirkung verschiedenartiger Massengattungen anzunehmen.

Es gilt daher ganz allgemein für beliebige Körper:

$$n = n_0\left(1 - \frac{\mu}{r v_0^2}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_r = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 \left(1 - \frac{\mu}{r v_0^2}\right), \tag{6}$$

wo $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Der Index 0 bedeutet, daß sich der Wert der betreffenden Größe auf seine Stelle außerhalb des Gravitationsfeldes bezieht.[1])

Rotiert ein Körper unter der Einwirkung einer Kraft außerhalb des Gravitationsfeldes, und bezeichnen wir seine kinetische Energie mit E, wo

$$E_0 = \frac{1}{2} m_0 R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2,$$

so ist seine Energie im Abstande r vom Zentralkörper:

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 \tag{7}$$

Daher ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0}\left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right).$$

Da aber nach Gleichung (4)

$$\frac{h n}{h n_0} = \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\mu}{r v_0^2},$$

so folgt für eine rotierende Masse:

$$m = m_0\left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right), \tag{8}$$

und unter Zuhilfenahme von (3) für Kreisbewegungen:

$$v^2 = v_0^2\left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right). \tag{9}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde nur durch den Abstand vom Zentralkörper be-

1) Vgl. Anm. 1 auf vorhergehender Seite.

stimmt ist. Die Bewegung findet also so statt, als ob sie kräftefrei, aber in nichteuklidischem Raume vor sich ginge.

Aus Gleichung (6) wollen wir folgern, daß bei einer Zerlegung der Geschwindigkeit in eine radiale und dazu senkrechte Komponente, abweichend von der klassischen Mechanik die Gleichung besteht für die Lichtenergie:

$$E = \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + r^2\left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2\right]\left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right) \tag{10}$$

II. Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld.

Da ein Lichtstrahl einen Energiestrom darstellt und deshalb auch einen Massenstrom, so wird er im Schwerefeld wie jede andere Masse abgelenkt werden. Man denke sich einen aus dem Unendlichen kommenden Lichtstrahl, der die Sonnenoberfläche streift. Um welchen Winkel wird er von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt werden? Seine Bewegung ist bestimmt durch Gleichung (10).

$$\left\{\begin{aligned}&\left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right)\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + r^2\left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2\right]\\ &\qquad = v_0^2\left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right)\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Zur Eliminierung von t benutzen wir den Flächensatz:

$$\text{Es ist: } \frac{r^2}{1}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = L. \tag{12}$$

Eliminiert man t vermittelst dieser Gleichung und setzt x für $\frac{1}{r}$, so findet man

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_0^2 + \left(1 - \frac{2\mu x}{v_0^2}\right)x^2 = \frac{v_0^2}{L^2}. \tag{13}$$

Diese Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_0^2 = \left(\frac{v_0^2}{L^2} - x^2\right)\left(1 + \frac{2\mu x^3}{v_0^2\left(\frac{v_0^2}{L^2} - x^2\right)}\right)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} - x^2}} - \frac{\frac{\mu x^3}{v_0^2}\,dx}{\left(\frac{v_0^2}{L^2} - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = d\varphi. \tag{14}$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu integrieren und liefert:

$$\arcsin x \frac{L}{v} - \frac{\frac{2 v_0^2}{L^2} - x^2}{\sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} - x^2}} = \varphi .$$

$$x = \frac{v_0}{L} \sin \left(\varphi + \frac{\frac{2 v_0^2}{L^2} - x^2}{\sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} - x^2}} \right). \tag{15}$$

Nach dieser Gleichung wird x ein Maximum, wenn die rechte Seite den Wert $\frac{v_0}{L}$ annimmt, dann ist r ein Minimum, d. h. gleich dem Sonnenradius R. Also $R = \frac{L}{v}$.

Geht der Strahl, aus dem Unendlichen kommend, den Sonnenrand streifend, nach dem Unendlichen zurück, so geht der Wert von x von null über $1/R$ wieder auf null über. Setzt man in Gleichung (15) x gleich null, so wird

$$\varphi = - \frac{2 \mu}{L v} = - \frac{2 \mu}{R v^2} . \tag{16}$$

Wird x über den Wert $1/R$ gehend nochmals null, so ist die Ablenkung doppelt so groß, da nach Gleichung (15) die durch das Perihel geteilten Kurvenstücke symmetrisch, d. h. kongruent sind. Die Totalablenkung α beträgt daher

$$\alpha = \frac{4 \mu}{R v_0^2} . \tag{17}$$

Setzt man die Konstanten ein, so erhält man

$$\alpha = 1{,}7'' .$$

III. Die Perihelbewegung des Merkur.

Es ist das Verdienst Gerbers, auf Grund der Annahme, daß Gravitationswirkungen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, Berechnungen der Merkurbahn versucht zu haben. Er gelangt — allerdings vermittelst falscher Schlüsse — zu einer mit der Einsteinschen identischen Formel für die Perihelbewegung. Auf dieselbe fundamentale Grundlage stützen sich die Versuche einer Berechnung unter Heranziehung der speziellen Relativitätstheorie. Streng genommen gehört die Planetenbewegung nicht in dieses Gebiet. Aber gewisse Ergebnisse dieser Theorie müssen doch annähernd auf die Planetenbewegung anwendbar sein. Diese Annahme erhält eine Stütze durch die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten kreisender Elektronen, bei denen ganz analoge Verhältnisse obwalten. A. Sommerfeld konnte nämlich, gestützt auf den von mir und anderen erbrachten Nachweis der Gültigkeit der relativistischen Massenformel aus der Feinstruktur gewisser Spektren schließen, daß die Masse des in elliptischen Bahnen sich bewegenden Elektrons tatsächlich gemäß dieser Formel veränderlich ist. Es ist natürlich unstatthaft, nun rückwärts aus den Berechnungen der Feinstruktur auf die Richtigkeit der Massenformel zu schließen. Hierzu fehlt die Theorie der kreisenden Elektronen.

Unter anderem war bei früheren Berechnungen der Perihelbewegung auf dieser Grundlage übersehen worden, daß die Bewegung des Beobachters eine Rolle spielt. Mit Unrecht findet man daher in der Literatur die Angabe, die spezielle Relativität liefere 7″ in 100 Erdjahren.

Wir wenden uns nunmehr der Untersuchung der Merkurbewegung auf Grund unserer Hypothesen zu.

Diese Bewegung werde von einem außerhalb des Schwerefeldes befindlichen Beobachter wahrgenommen. Da wir zwischen den Massen der Lichtquanten und denen der gewöhnlichen Materie keinen prinzipiellen Unterschied machen, so gilt für die Bewegungsenergie der letzteren, analog (11):

$$(18)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{\mu}{r v_0^2}\right)\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + r^2\left(1-\frac{2\mu}{r v^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2\right] \\ \qquad\qquad = -\int\limits_\infty^r \frac{2\mu}{r^2}\left(1+\frac{\mu}{r v_0^2}\right) dr - K. \end{cases}$$

Führt man die Integration aus, so ergibt sich bei etwas geändertem Werte von μ

$$(19)\quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + r^2\left(1-\frac{2\mu}{r v_0^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 = \frac{2\mu'}{r}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\mu}{r v_0^2}\right) - K.$$

Um t zu eliminieren, benutzen wir den Flächensatz:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L. \tag{20}$$

und erhalten, indem wir noch x für $\frac{1}{r}$ schreiben:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + x^2 = \frac{2\mu x}{L^2} + \frac{2\mu x^3}{v_0^2} - \frac{\mu^2 x^2}{L^2 v_0^2} - K. \tag{21}$$

Das Ergebnis ist eine Perihelbewegung von 36″ in hundert Erdjahren.

Unsere Lösung bezieht sich, wie schon bemerkt, auf den Standort eines außerhalb des Gravitationsfeldes befindlichen Beobachters. Verlegen wir den ruhenden Standort in das Schwerefeld, etwa im Abstande ϱ des Erdradius von der Sonne, so sind die Überlegungen, die zur Gleichung (6) geführt haben, entsprechend zu ändern. Indem nämlich das Lichtquant nunmehr anstatt aus der Unendlichkeit herangebracht zu werden, aus der Entfernung ϱ auf den Abstand r gebracht wird, gewinnt man die maximale Arbeit $\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu m}{\varrho}$ und es ergeben sich die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} n &= n_\varrho \left(1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2}\right) \\ m &= m_\varrho \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2} - \frac{\mu}{\varrho v_0^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Man sieht leicht, daß man anstatt der Gleichung (21) folgende erhält:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)_\varrho^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2\mu}{rL^2} + \frac{2\mu}{r^3 v_0^2} - \frac{2\mu}{r^2 \varrho v_0^2} - \frac{\mu^2}{L^2 r^2 v_0^2} - K. \tag{23}$$

Behandelt man ϱ wegen der geringen Exzentrizität der Erdbahn als Konstante, so ergibt eine Lösung der Gleichung (23) den Wert von 30″,4 für 100 Erdjahre.

Ein im Abstande ϱ von der Sonne ruhender, d. h. an der Erdbewegung nicht teilnehmender Beobachter würde daher eine kleinere Perihelbewegung messen müssen, und die Rotationsgeschwindigkeit würde ihm auch weniger verlangsamt erscheinen als dem außerhalb des Schwerefeldes befindlichen. Das läßt sich aus Gleichung (22) leicht verständlich machen, denn danach würden Lichtschwingungen, gemessen im Abstande ϱ, gegen solche, gemessen im Abstande $r = \infty$, verlangsamt erscheinen, und da die Atome, die die Lichtquanten emittieren, als Uhren aufgefaßt werden können, so müßten Uhren im Abstande ϱ langsamer gehen als solche im Abstande $r = \infty$.

Aus dieser Betrachtung können wir einen weiteren Schluß ziehen. Ein im Abstande ϱ ruhender Beobachter vergleiche seine Uhr mit einer im Abstande r des Merkur befindlichen, ebenfalls ruhenden. Er konstatiert, daß letztere im Verhältnis:

$$1 : \left(1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2}\right)$$

langsamer geht.

Nun läßt er letztere Uhr sich mit einer gewissen Geschwindigkeit, es sei die Erdgeschwindigkeit u_ϱ, bewegen, dann geht diese Uhr gegen seine ruhende bekanntlich im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - \frac{u_\varrho^2}{v_0^2}}$ langsamer. Dieselbe Uhr geht aber auch in diesem Verhältnis langsamer, wenn umgekehrt der Beobachter im Abstande ϱ sich mit der Geschwindigkeit u_ϱ bewegt und die Uhr im Abstande r ruht. In letzterer Lage befindet sich ein Erdbewohner, der seine Uhr mit der im Abstande r vom Zentralkörper befindlichen vergleicht.

Seine Uhr geht langsamer im Verhältnis:

$$1 : \left(1 - \frac{\mu}{r r_0^2} + \frac{\mu}{\varrho r_0^2}\right)\sqrt{1 - \frac{u_\varrho^2}{r_0^2}} \tag{24}$$

oder

$$1 : \left(1 - \frac{\mu}{r r_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2} - \frac{1}{2}\frac{u_\varrho^2}{v_0^2}\right).$$

Anstatt der Beziehungen (22) hat man daher für einen beobachtenden Erdbewohner:

$$(24a)\quad \begin{cases} n = n_\varrho'\left(1 - \dfrac{\mu}{r v_0^2} + \dfrac{\mu}{\varrho r_0^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_\varrho^2}{v_0^2}\right) \\ m = m_\varrho'\left(1 + \dfrac{\mu}{r r_0^2} - \dfrac{\mu}{\varrho r_0^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{u_\varrho^2}{v_0^2}\right). \end{cases}$$

Nun ist:

$$(25)\quad \frac{u_\varrho^2}{v_0^2} = \frac{2\mu}{\varrho v_0^2} - K.$$

Daher geht die Gleichung (24a) über in:

$$(26)\quad \begin{cases} n = n_\varrho'\left(1 - \dfrac{\mu}{r r_0^2} + K\right) \\ m = m_\varrho'\left(1 + \dfrac{\mu}{v_0^2 r} - K\right). \end{cases}$$

Vernachlässigen wir die kleine Exzentrizität der Erdbahn und behandeln ϱ wieder als Konstante, so nimmt K den Wert $\frac{\mu}{\varrho v_0^2}$ an, wodurch die Gleichungen (26) übergehen in:

$$(27)\quad \begin{cases} n = n_o'\left(1 - \dfrac{\mu}{r r_0^2} + \dfrac{\mu}{2\varrho v_0^2}\right) \\ m = m_\varrho'\left(1 + \dfrac{\mu}{r v_0^2} - \dfrac{\mu}{2\varrho v_0^2}\right). \end{cases}$$

Wir können nun das aus der Betrachtung der Uhren gewonnene Ergebnis auf das System Sonne—Merkur anwenden, und um die Analogie zu versinnbildlichen, können wir uns dieses System selbst als Uhr denken, dessen Zeiger der von der Sonne nach dem Merkur gezogene Radiusvektor ist. Verfahren wir dann ganz analog wie bei der Ableitung der Gleichungen (21) und (23), so erhalten wir:

$$(28)\quad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2\mu}{r L^2} + \frac{2\mu}{r^3 v_0^2} - \frac{\mu}{r^2 \varrho v_0^2} - \frac{\mu}{r^2 r_0^2} - K.$$

Diese Gleichung liefert rund 33″ Drehung der Merkurbahn in 100 Erdjahren. Das Endresultat unserer Berechnung ergibt sich demgemäß um rund 3″ kleiner als das Einsteinsche.

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Bahn eines materiellen Punktes eine geodätische Linie im Raum-

Zeitkontinuum, und als solche vom frei beweglichen Bezugssystem unabhängig. Das Ergebnis unserer Berechnung weist diese Invarianz nicht auf.

Überblicken wir das Ergebnis unserer Untersuchung, so erkennen wir, daß sich die Einwirkung des Schwerefeldes auf freie Bewegungen aus dem Fundamentalsatz der Quantentheorie, daß die Energie eines Lichtquants proportional seiner Frequenz sei, ableiten läßt. Hierbei haben wir noch die Verallgemeinerung eingeführt, daß die gewöhnliche Materie denselben Einflüssen unterworfen sei wie die Masse der Lichtquanten.

(Eingegangen 3. März 1922.)